

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCL

1953

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XV.

(2° semestre 1953)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1953

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1953 - Luglio-agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Biologia. — *Il potere germinativo dei tessuti somatici ridestato da agenti cancerigeni. Individualità dei blastomi.* Nota (*) del Socio **ACHILLE RUSSO.**

Come fu detto in Note precedenti, alle quali si rimanda ⁽¹⁾, le cellule dei tessuti somatici hanno potere germinativo analogo a quello delle cellule sessuali. Tale condizione, variamente documentata, ha avuto la più evidente dimostrazione nel ciclo di sviluppo di un *Infusorio ciliato*, rappresentato nell'annessa figura, che costituisce la chiave di volta per la soluzione del più vasto problema, che ha i suoi riflessi su l'eziologia dei tumori ⁽²⁾.

Nonostante casi particolari (*resti di organi embrionali*) abbiano fatto sospettare un potere germinale fosse necessario all'origine dei neoplasmi, oggi si ritiene essa sia dovuta ai numerosi *agenti cancerigeni endogeni o esogeni*.

Tale parere, che esclude altri fattori, fu avvalorato da conoscenze non ancora convenientemente vagliate, come la formazione di neoplasmi direttamente nei tessuti (*melanomi*) ovvero trasmessi da individui cancerosi ad individui immuni, come nel *fattore del latte*, che, con l'allattamento, il blastoma fu comunicato ai topi sani, e con alcuni *virus*, come quello ottenuto dal filtrato del *sarcoma* del pollo, che iniettato, riproduce il *sarcoma* ⁽³⁾.

(*) Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1953.

(1) A. RUSSO, *Diminuzione cromatica nei blastomeri somatici di alcuni Metazoi e negli individui equivalenti di un Ciliato*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », Roma 1949; *Ulteriori notizie sul potere germinativo del soma nei Metazoi ecc.* « Atti Accad. Gioenia », 1950; *Carattere femminile del soma e sua indipendenza in relazione all'origine dei blastomi*. Ibid., 1951.

(2) Alcuni cancerologi, non potendo constatare tale potere nei topi o in altri animali domestici in uso nei Laboratori, non credono che un *Protozoo* sia capace di tanto! Però, anche GALILEO, per quanto riferisce un suo discepolo, V. VIVIANI, soleva dire, 4 secoli fa: *La natura opera molto col poco e le sue operazioni sono tutte in pari grado meravigliose*.

(3) Tali fenomeni non potrebbero prodursi ove mancasse il *potere germinativo* nei tessuti somatici.

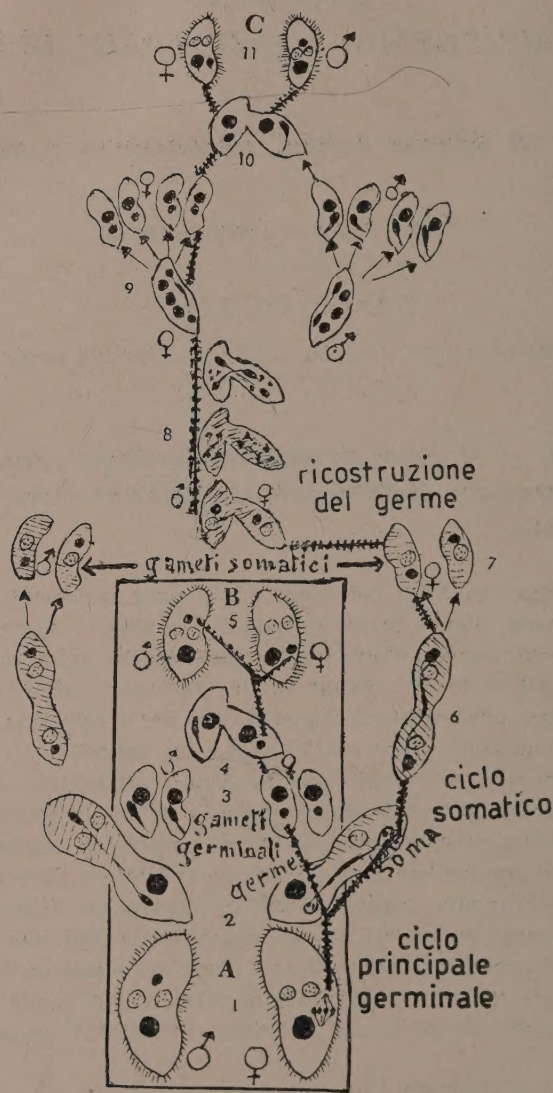


Fig. 1. - Ciclo evolutivo di *Cryptochilum echini* Mps.

1 A. - Individui adulti maschile (♂) e femminile (♀). Il femminile inizia il ciclo, che si svolge secondo la linea tratteggiata. 2. Divisione differenziale per la formazione del germe e del soma (tratteggiato). 3. Gameti ♂ e ♀ germinali. 4. Inizio della coniugazione germinale.

5 B. - Individui adulti derivati, che inizieranno un nuovo ciclo germinale. 6-7. Sviluppo dei gameti somatici con eliminazione di sostanza nucleare, come nella produzione dei germinali. 8. Stadi della coniugazione somatica. 9. Ricostruzione dei gameti germinali. 10. Coniugazione germinale.

11 C. - Individui adulti, che producono un secondo ciclo evolutivo del Ciliato.

Per meglio intendere tali ed altri simili fenomeni si è supposto debba esistere un fattore, che renda possibile lo sviluppo del neoplasma, onde fu fatta l'ipotesi che una *potenza blastogena* latente fosse presente in tutti gli organismi (*Lacassagne*).

A tale ipotesi, da più anni (1914-1930), fu sostituita una realtà, dimostrata da osservazioni dirette, cioè che le cellule dei tessuti somatici hanno un *potere germinativo*, che dà ragione di tutti i fenomeni proliferativi cancerosi comunque prodotti.

Nella figura, che qui si riproduce, tale potere è chiaramente manifesto nell'individui somatici (6), che producono gameti (7), i quali, coniugando fra loro (8), ricostituiscono le forme adulte (11), dalle quali ha origine un nuovo ciclo.

Fatti equivalenti non si riscontrano nei tessuti dei *Metazoi*, ma il loro *potere germinativo* è dimostrato da fenomeni comuni, che si osservano nel corso dello sviluppo degli elementi sessuali femminili, come l'*eliminazione* di una parte della sostanza nucleare. Ma, a maggiore convalida di tale potere è noto che, in alcuni gruppi di animali, nuovi individui si generano direttamente *dal soma*, senza elementi germinali preesistenti, a mezzo di particolari formazioni, come gli *stoloni proliferi* nei *Poriferi* o nei *Tunicati*.

Alla identità dei fenomeni, che accomunano le cellule dei tessuti con quelle sessuali, potrebbe essere aggiunta la produzione di nuovi organismi da *ova* non fecondate da spermatozoi, ma solo assoggettate a stimoli prodotti da agenti di diversa natura, anche meccanici (*Trichomiroff*)⁽⁴⁾. Analogamente, stimoli, prodotti dagli *agenti cancerigeni*, ridestando il *potere germinativo* delle cellule somatiche, sono causa dell'origine dei blastomi, i quali, per tale origine, assumono il carattere di organismi viventi con propria individualità. Essi, difatti, sono distinti, fra l'altro, dalle comuni manifestazioni patologiche di origine batterica, che sono reversibili, per la irreversibilità delle cellule tumorali, trasformate in elementi neoplastici.

Ma, oltre a tale carattere, l'individualità dei tumori ed il loro valore di organismi viventi è dimostrata da fenomeni fondamentali, comuni alle piante ed agli animali; essenziali fra essi il *potere riproduttivo*, cioè la capacità di produrre nuovi individui, e la *trasmissione dei propri caratteri* negli *incroci*, secondo le *leggi di Mendel*. Come altrove si è detto, il *potere riproduttivo* si manifesta con il distacco di cellule, che producono altri tumori (*metastasi*) e la *trasmissione* dei caratteri, accoppiando portatori di tumori con individui immuni ed ottenendosi nella 2^a *generazione filiale* la dissociazione di tali caratteri per la 2^a legge mendeliana.

Da quanto si è detto risulta che il *potere germinativo* dei tessuti e gli *agenti cancerigeni* collaborano per lo sviluppo del neoplasma. Il primo però,

(4) Sono da ricordare le classiche ricerche di LOEB su la *partenogenesi sperimentale* nelle ova di *Echino* e del *Baco da seta* e quelle di IVES DELAGE, MORGAN ed altri su le ova di vari animali.

essendo sempre in atto, è da ritenere sia un fattore costante ed invariabile, sul quale meglio potrebbero fondarsi particolari ricerche di *sterilizzazione*, come si è cennato in Note precedenti.

Qualunque possa essere il risultato di tali ricerche, il *cancro*, che affligge tanto l'umanità, deve essere considerato un organismo vivente non solo per la sua origine da un tessuto germinale, ma anche per i particolari fenomeni della vita, che esso compie.

Biologia. — *Eziologia dei tumori illustrata alla Radio da Rondoni.* Nota (*) di ACHILLE RUSSO.

Rondoni, seguendo la maggioranza dei cancerologi, in una comunicazione fatta alla *Radio* nel maggio scorso su l'*eziologia dei tumori*, ha confermato l'errore che causa unica fondamentale dell'origine dei neoplasmi siano gli *agenti cancerogeni* molto numerosi e tanto diversi tra loro.

Per dimostrare tale causa sia essenziale ed agisca per lo più senza altro intervento, ha riferito su alcune manifestazioni, ma non ha tenuto alcun conto di un altro fattore, sempre necessario, sul quale vertono pubblicazioni varie in «Atti accademici» di questi ultimi anni, il *potere germinativo delle cellule somatiche*, nelle quali i tumori s'impiantano, come è riportato alla fine di questa Nota. Oltre ai cancri professionali, prodotti da agenti *chimici, fisici o biologici*, che agiscono direttamente sui tessuti con i quali sono a contatto, gli è sembrato particolarmente favorevole alla sua tesi, la trasmissione diretta a mezzo di sostanze amorfe, prodotte dagli stessi tumori e ritenute equivalenti ai *virus*. Tumori diversi, infatti, furono trasmessi con il filtrato di *sarcomi*, come quello del pollo, mentre il *carcinoma* della glandula mammaria dei topi veniva trasmesso ai topi sani con l'allattamento, ritenendosi la trasmissione dipenda da *fattore del latte*, analogo ai *virus*.

Seguendo lo stesso indirizzo si è ammesso inoltre che disporrebbero a produrre direttamente il tumore particolari stati del *ricambio*, dipendenti dalla nutrizione, da squilibri ormonici o da cause ereditarie, senza individuare alcun fattore e limitandosi solo a supporre particolari processi infiammatori, anomalie embrionali o di altra natura, nella fase preparatoria preblastomatosa.

Dopo quanto fu succintamente esposto, che rispecchia lo stato attuale più appariscente delle conoscenze su l'*eziologia dei tumori*, fu accolta con molta diffidenza l'affermazione che nessuno degli *agenti cancerogeni* potrebbe produrre un tumore in mancanza di un fattore fondamentale, il *potere germinativo delle cellule dei tessuti somatici*.

Tale potere, della cui esistenza furono date prove tangibili, valorizza gli *agenti cancerogeni*, sia esogeni sia endogeni comunque prodotti, e con essi collabora alla produzione della *neoplasia*; talchè ciascuno dei due fattori rappresenta una parte del complesso fenomeno.

(*) Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1953.

Dei due fattori quello *germinale*, essendo sempre operante, per azione dei più diversi *stimoli*, prodotti dagli *agenti cancerigeni*, offre maggiore possibilità di attenuarlo con mezzi terapeutici ⁽¹⁾.

In fine è opportuno rilevare che Rondoni ha messo bene in evidenza una parte della verità, relativa alla causa dell'origine dei tumori, ma che è in ritardo con i nuovi studi, a meno che non abbia nuovi risultati da opporre a quelli biologici, estesi a diversi gruppi animali, che dettero la più chiara dimostrazione di quanto sopra si è affermato e qui documentato ⁽²⁾.

I risultati delle ricerche del Rondoni sarebbe utile fare conoscere per il progresso della *cancerologia*, che, dopo tante verbose ipotesi, per nuovi sviluppi ha bisogno di altri documenti, fondati su fatti concreti.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Risolubilità di generali equazioni lineari a derivate parziali mediante serie di potenze.* Nota di HANS HORNICH, presentata ^(*) dal Socio M. PICONE.

In una conferenza ⁽¹⁾ tenuta nell'« Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo » ho stabilito le condizioni per la risolubilità regolare di generali equazioni lineari a derivate parziali; nella discussione i proff. M. Picone e F. G. Tricomi hanno fatto la domanda, se i risultati ottenuti cambiano sostanzialmente, se vengono ammesse anche delle soluzioni in forma di serie di po-

(1) I patologi, conoscendo solo il primo di tali fattori, rivolsero alle sue diverse manifestazioni le ricerche per combatterlo, ottenendo pochi soddisfacenti risultati.

(2) A. RUSSO, *Ciclo evolutivo di « Cryptochilum echini »* Mps. « Memorie R. Accad. Lincei » con 6 Tavole, 1930.

A. Russo, *Stati del ciclo evolutivo di un Ciliato, ecc.* « Atti Società ital. delle Scienze detta dei XL », 1948.

A. RUSSO, *Diminuzione cromatica nei blastomeri somatici di alcuni Metazoi e negli individui di un Ciliato (« Cryptochilum echini » Mps.), loro potere germinale causa dei processi di rigenerazione e delle neoformazioni.* « Rend. Acc. Naz. Lincei ». Roma, 1949.

A. RUSSO, *Ulteriori notizie sul potere germinativo del soma nei Metazoi e su le sue manifestazioni in relazione al ciclo biologico di un Ciliato (« Cryptochilum echini » Mps.* « Atti Acc. Gioenia », Catania, 1950.

A. RUSSO, *Un equivoco da chiarire (a proposito dell'origine dei neoplasmi).* « Boll. Acc. Gioenia ». Catania, 1950.

A. RUSSO, *Potere germinativo dei tessuti somatici e germi embrionali nell'origine dei neoplasmi.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », Roma, 1951.

A. RUSSO, *Potere germinativo del soma e germi embrionali nelle proliferazioni cellulari preblastomatoze.* « Boll. Acc. Gioenia », Catania, 1951.

A. RUSSO, *Carattere femminile dei tessuti somatici e loro indipendenza in relazione allo originale dei tumori* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », 1952.

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) Conferenza dell'8 gennaio 1953, il cui contenuto sarà pubblicato fra breve nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ».

tenze ad esponenti positivi e negativi. Nella Nota presente mostrerò che anche in questo caso appaiono le stesse condizioni aritmetiche per la risolubilità; però è importante osservare che qui esistono anche delle soluzioni non banali delle equazioni omogenee a derivate parziali.

Nella equazione a derivate parziali

$$\mathcal{L}(u) \equiv \sum_{i_1, \dots, i_n} g_{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f$$

i coefficienti g_{i_1, \dots, i_n} siano $\neq 0$ soltanto per un numero finito di n -ple degli indici (i_1, \dots, i_n) ; i g_{i_1, \dots, i_n} siano delle serie di potenze regolari

$$g_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{h_1, \dots, h_n} g_{i_1, \dots, i_n}^{h_1, \dots, h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n},$$

le quali convergano per $|x_i| < \delta, \delta > 0$, e f sia una serie di Laurent

$$f = \sum_{j_1, \dots, j_n} f_{j_1, \dots, j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n},$$

la quale converga per $0 < |x_i| < \delta$. Se anche la soluzione u di $\mathcal{L}(u) = f$ è una serie di Laurent

$$u = \sum_{l_1, \dots, l_n} u_{l_1, \dots, l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n},$$

allora il confronto dei coefficienti fornisce

$$f_{j_1, \dots, j_n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} \sum_{h_1, \dots, h_n} u_{l_1, \dots, l_n} g_{i_1, \dots, i_n}^{h_1, \dots, h_n} \binom{l_1}{i_1} i_1! \dots \binom{l_n}{i_n} i_n!$$

per ogni n -pla (j_1, \dots, j_n) con

$$h_1 + l_1 - i_1 = j_1, \dots, h_n + l_n - i_n = j_n \quad (i_1, \dots, i_n \geq 0).$$

Ponendo

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} g_{i_1, \dots, i_n}^{h_1, \dots, h_n} \binom{l_1}{i_1} i_1! \dots \binom{l_n}{i_n} i_n! = A_{j_1, \dots, j_n}^{l_1, \dots, l_n}$$

si ha

$$f_{j_1, \dots, j_n} = \sum_{l_1, \dots, l_n} A_{j_1, \dots, j_n}^{l_1, \dots, l_n} u_{l_1, \dots, l_n}.$$

Senza ledere la generalità possiamo supporre

$$g_{i_1, \dots, i_n}^{h_1, \dots, h_n} = 0,$$

se vale una delle disuguaglianze seguenti:

$$h_1 < i_1, h_2 < i_2, \dots, h_n < i_n.$$

Allora anche

$$A_{j_1, \dots, j_n}^{l_1, \dots, l_n} = \sum g_{i_1, \dots, i_n}^{j_1 - l_1 + i_1, \dots, j_n - l_n + i_n} \binom{l_1}{i_1} i_1! \dots \binom{l_n}{i_n} i_n!$$

s'annulla sempre, se vale $o j_1 < l_1$ o $j_2 < l_2 \dots$ o $j_n < l_n$, e si ha

$$f_{j_1 \dots j_n} = A_{j_1 \dots j_n}^{j_1 \dots j_n} u_{j_1 \dots j_n} + \sum A_{j_1 \dots j_n}^{l_1 \dots l_n} u_{l_1 \dots l_n},$$

ove l'ultima somma è estesa a tutte le n -ple $(l_1 \dots l_n)$ che « precedono » la n -pla (j_1, \dots, j_n) , cioè per le quali è $l_1 \leq j_1, \dots, l_n \leq j_n$ e $(l_1 \dots l_n) \neq (j_1 \dots j_n)$.

Nel seguito supporremo che tutti gli

$$A_{j_1 \dots j_n}^{j_1 \dots j_n} = \sum_{i_1 \dots i_n} g_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \binom{j_1}{i_1} i_1! \dots \binom{j_n}{i_n} i_n!$$

siano diversi da 0 (ciò che è il caso, per esempio, se $g_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \neq 0$ e i $g_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}$, in numero finito, non soddisfano a nessuna equazione lineare con coefficienti interi).

L'equazione omogenea

$$\mathcal{L}(u) = 0$$

non ha altra soluzione regolare che la soluzione banale $u \equiv 0$; se ammettiamo anche soluzioni in forma di serie di Laurent possono esistere anche delle soluzioni non banali (per esempio per $y + x^2 y' = 0$ la soluzione $y = ce^{1/x}$; qui è sempre $A_j^j = 1$). Siccome in questo caso è

$$A_{j_1 \dots j_n}^{j_1 \dots j_n} u_{j_1 \dots j_n} + \sum A_{j_1 \dots j_n}^{l_1 \dots l_n} u_{l_1 \dots l_n} = 0,$$

ogni n -pla $(j_1 \dots j_n)$ con $u_{j_1 \dots j_n} \neq 0$ ne ha almeno una $(l_1 \dots l_n)$, che la precede, con $u_{l_1 \dots l_n} \neq 0$; quindi:

Una soluzione non banale di $\mathcal{L}(u) = 0$, la quale sia una serie di Laurent, ha sempre un numero infinito di termini con potenze negative.

Se per ogni n -pla (i_1, \dots, i_n)

$$(*) \quad g_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} = g_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

(cioè $g_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} = 0$ per $j_1 \neq i_1$ o $j_2 \neq i_2 \dots$ o $j_n \neq i_n$) e se per $\mathcal{L}(u) = f$ con f regolare la soluzione u è una serie di Laurent, allora u è necessariamente regolare.

Infatti, se decomponiamo la serie di Laurent $u = u_1 + u_2$, ove u_1 contenga tutti i termini di u con potenze non negative, allora $\mathcal{L}(u_1)$ contiene solo termini con potenze non negative e $\mathcal{L}(u_2)$ contiene solo termini che hanno almeno una potenza negativa. Quindi è $\mathcal{L}(u_1) = f$ e $\mathcal{L}(u_2) = 0$ e u_2 è una soluzione dell'equazione omogenea. Ogni termine di u_2 fornisce per $\mathcal{L}(u_2)$ un termine con le stesse potenze di x_i ; dunque ogni termine di u_2 sarebbe una soluzione di $\mathcal{L}(u) = 0$: ma questo è impossibile, poiché ogni soluzione non banale di $\mathcal{L}(u) = 0$ che è una serie di Laurent, deve contenere un numero infinito di termini con potenze negative.

Se una equazione a derivate parziali $\mathcal{L}(u) = f$ con i coefficienti dati dalla (*), non ammette una soluzione regolare, allora essa non ammette nem-

meno una soluzione in forma di serie di Laurent. Ora ho dimostrato nella Nota citata ⁽¹⁾ che per $(j_1, \dots, j_n \geq 0)$

$$(**) \quad \lim_{j_1 + \dots + j_n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_{j_1 \dots j_n}^{j_1 \dots j_n}} = 0$$

e per f regolare, in genere non esiste nessuna soluzione regolare di $\mathcal{L}(u) = f$; per queste equazioni non esistono dunque nemmeno soluzioni in forma di serie di Laurent ⁽²⁾.

Lo stesso teorema vale anche per equazioni generali della forma $\mathcal{L}(u) = f$, se l'equazione omogenea $\mathcal{L}(u) = 0$ non ammette soluzioni in forma di serie di Laurent: anche qui, se vale la (**), ci sono sempre delle funzioni f tali che $\mathcal{L}(u) = f$ non ha nessuna soluzione in forma di serie di Laurent; la dimostrazione è analoga a quella data nella Nota citata.

Geometria. — Sul massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r linearmente indipendenti, ai quali appartengono gli S_k tangenti di una V_k di S_r . Nota ^(*) di DIONISIO GALLARATI, presentata dal Corrisp. B. SEGRE.

1. In due Note recenti ⁽¹⁾, suggeritemi dalla lettura di una Memoria del prof. B. Segre ⁽²⁾, mi sono occupato di determinare il numero dei complessi algebrici di rette, d'ordine assegnato, che contengano una data rigata algebrica appartenente allo spazio S_r e di determinare il massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r in cui possa esser contenuto un sistema continuo ∞^1 di S_k ; ed ho caratterizzato le varietà luoghi di $\infty^1 S_k$ che appartengono al massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r , tra loro linearmente indipendenti. Inoltre ho caratterizzato le curve algebriche di S_r i cui S_k osculatori stiano nel massimo numero possibile di complessi lineari.

Restando nel medesimo ordine di idee, dimostro qui che il massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r linearmente indipendenti ai quali possano appartenere tutti gli S_k tangenti di una V_k algebrica di S_r , dotata di $\infty^k S_k$ tangenti, è

$$\theta(r, k) = \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1;$$

(2) A questo tipo appartengono per esempio le equazioni a derivate parziali trattate in « Rendiconti di matematica », Roma XI (1952).

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1953.

(1) D. GALLARATI, *Sul numero dei complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIV, fasc. 2, pp. 213-220 (1953); *Sulle varietà di S_r composte di $\infty^1 S_k$, i cui S_k appartengono al massimo numero di complessi lineari*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIV, fasc. 3, pp. 408-412 (1953).

(2) B. SEGRE, *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti*. « Mem. Acc. Naz. dei Lincei », vol. VII, fasc. XIX, pp. 577-592 (1928).

provo quindi che *tale massimo è raggiunto dalle* $S_{k-1} - V_k^{r-k+1}$ *di* S_r ⁽³⁾ *ed inoltre, per* $r = 5$, *dalla superficie di Veronese.*

Non ho potuto sincerarmi se, anche per $k > 1$, queste varietà siano o meno le sole a godere di tale proprietà; dimostro qui tuttavia una proposizione generale, da cui discende che, se gli S_k tangenti di una V_k di S_r appartengono a $\theta(r, k)$ complessi lineari linearmente indipendenti di S_k , la proiezione di V_k da un suo punto generico su un S_{r-1} è una V_k i cui S_k tangenti appartengono a $\theta(r-1, k)$ complessi lineari linearmente indipendenti di S_k dell' S_{r-1} .

2. In S_r consideriamo una varietà algebrica V_k : è noto che, presi comunque $(r-k)(k+1)$ S_k di S_r , esiste qualche S_{r-k-1} a cui tutti quegli S_k si appoggino. Poiché la totalità degli S_k di S_r appoggiati ad un dato S_{r-k} costituisce un complesso lineare (speciale) di S_k , segue da ciò che esiste certo qualche complesso lineare di S_k di S_r che contiene $(r-k)(k+1)$ S_k tangenti di V_k sicché la dimensione δ del sistema lineare che i complessi lineari di S_k di S_r staccano sulla varietà degli S_k tangenti di V_k non può essere inferiore ad $(r-k)(k+1)$. D'altra parte, se α è il numero massimo dei complessi lineari di S_k di S_r linearmente indipendenti che contengano tutti gli S_k tangenti di V_k , risulta $\delta = \binom{r+1}{k+1} - 1 - \alpha$ e quindi

$$\binom{r+1}{k+1} - 1 - \alpha \geq (r-k)(k+1)$$

da cui

$$\alpha \leq \theta(r, k).$$

Proveremo che tale limite massimo è effettivamente raggiunto, mostrando che gli S_k tangenti di una V_k^{r-k+1} algebrica (dotata di $\infty^k S_k$ tangenti) appartengono ad un sistema lineare $\infty^{\theta(r,k)-1}$ di complessi lineari di S_k .

Come è noto, ogni V_k^{r-k+1} di S_r è una $S_{k-1} - V_k^{r-k+1}$, oppure se $k = r-3$ è un cono che proietta da un S_{r-6} la superficie di Veronese; poichè vogliamo limitarci alla considerazione di V_k con $\infty^k S_k$ tangenti, ci interessano soltanto le $S_{k-1} - V_k^{r-k+1}$ ed inoltre, per $r = 5$, la superficie di Veronese.

Se con m_α denotiamo gli ordini delle V_α minime (cioè, d'ordine minimo) di una $S_{k-1} - V_k^{r-k+1}$, con una scelta opportuna dell' $(r+1)$ -edro $T(A_0, A_1, \dots, A_r)$ di riferimento in S_r le equazioni parametriche di $S_{k-1} - V_k^{r-k+1}$ possono ridursi alla forma seguente (ov'è posto $m_0 = 0$, $m_k = r-k+1$, $v_0 = 1$):

$$\sigma x_{m_\alpha + l + \alpha} = v_\alpha u^l \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = 0, 1, \dots, k-1 \\ l = 0, 1, \dots, m_{\alpha+1} - m_\alpha \end{array} \right).$$

(3) Per uno studio di tali varietà, cfr. A. BELLATALIA, *Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari*, « R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XXXVI, 28 febbraio 1901.

Le coordinate grassmanniane del generico S_k tangente alla $S_{k-1} - V_k^{r-k+1}$ sono proporzionali ai minori d'ordine massimo estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{array}{c} x_\sigma \\ \frac{\partial x_\sigma}{\partial u} \\ \frac{\partial x_\sigma}{\partial v_\varrho} \end{array} \right\|$$

ossia ai minori della matrice

$$M = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial x_\sigma}{\partial u} \\ x_\sigma - \sum_{\varrho} v_\varrho \frac{\partial x_\varrho}{\partial v_\varrho} \\ \frac{\partial x_\sigma}{\partial v_\varrho} \end{array} \right\| = \| M_0 \| M_1 \| \dots \| M_{k-1} \|,$$

ove si è indicata con M_j la matrice a $k+1$ righe ed $m_{j+1} - m_j + 1$ colonne avente le righe tutte costituite da elementi nulli, eccetto la prima, che è

$$0 \quad v_j \quad 2uv_j \quad 3u^2v_j \dots (m_{j+1} - m_j) u^{m_{j+1} - m_j - 1} v_j;$$

e la riga di posto $j+2$, che è

$$1 \quad 0 \quad u^2 \quad u^3 \dots u^{m_{j+1} - m_j}.$$

Consideriamo i minori d'ordine $k+1$ estratti da M , e sia N_0 il numero di quelli tra essi che sono identicamente nulli; gli altri possono essere suddivisi in gruppi di tipo diverso: precisamente, diremo *minore di tipo (j)* un minore ottenuto prendendo una colonna da ciascuna delle matrici

$$M_0, M_1, \dots, M_{j-1}, M_{j+1}, \dots, M_{k-1}$$

e due colonne dalla matrice M_j . È immediato riconoscere che solamente i minori così formati possono essere non nulli, ed un'analisi che non presenta alcuna difficoltà mostra che un minore di tipo (j) si riduce ad un monomio della forma

$$\lambda u^{\gamma_j} v_j,$$

con $0 \leq \gamma_j \leq \varepsilon_j = m_{j+1} - m_j + r - k + 1$.

Se ora indichiamo con $N(\gamma_j)$ il numero dei minori di tipo (j) in cui la u compare con uno stesso esponente γ_j , il numero dei legami lineari che vincolano i minori di tipo (j) è ovviamente

$$\sum_{\gamma_j=0}^{\varepsilon_j} \{N(\gamma_j) - 1\}$$

sicch  il numero complessivo delle relazioni lineari indipendenti che intercedono fra le coordinate grassmanniane del generico S_k tangente di $S_{k-1} - V_k^{r-k+1}$  :

$$X = N_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\gamma_j=0}^{\varepsilon_j} \{N(\gamma_j) - 1\} = N_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\gamma_j=0}^{\varepsilon_j} N(\gamma_j) - \sum_{j=0}^{k-1} (\varepsilon_j + 1).$$

Ma, com'  ovvio,

$$N_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\gamma_j=0}^{\varepsilon_j} N(\gamma_j)$$

  il numero complessivo dei minori d'ordine $k+1$ estratti da M , e d'altra parte risulta

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} (\varepsilon_j + 1) &= \sum_{j=0}^{k-1} \{m_{j+1} - m_j + r - k\} = m_k - m_0 + k(r - k) = \\ &= r - k + 1 + k(r - k) = (r - k)(k + 1) + 1, \end{aligned}$$

sicch  si ha effettivamente:

$$X = \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1 = \theta(r, k).$$

Per quanto riguarda la superficie \mathfrak{F}^4 di Veronese, si verifica subito che i suoi piani tangenti appartengono a 10 complessi lineari linearmente indipendenti di piani di S_5 , ed   appunto $\theta(5, 2) = 10$.

3. Dimostriamo ora che:

Se gli S_k tangenti di una V_k di S_r che sia di classe differenziale \mathfrak{Q}^2 e sia dotata di ∞^k S_k tangenti appartengono ad N complessi lineari di S_k dello spazio S_r tra loro linearmente indipendenti, gli S_k tangenti della V_k proiezione di V_k da un suo punto generico su uno spazio S_{r-1} appartengono ad almeno $N - \binom{r}{k} + k + 1$ complessi lineari linearmente indipendenti di S_k dell' S_{r-1} .

Siano x_0, x_1, \dots, x_r coordinate proiettive omogenee di punto in S_r , e sia $T(A_0, A_1, \dots, A_r)$ il relativo $(r+1)$ -edro di riferimento. Se

$$(I) \quad \rho x^i = a^i(u_1, u_2, \dots, u_k) = a^i(u) \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

sono le equazioni parametriche di una V_k , ove $a^i(u_1, \dots, u_k)$ denotino funzioni di u_1, \dots, u_k definite in un intorno \mathcal{U} di $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$ e di classe differenziale \mathfrak{Q}^2 , tali che in \mathcal{U} risulti

$$\frac{\partial(a^0, a^1, \dots, a^r)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} \neq 0,$$

e se V_k appartiene ad N complessi lineari di S_k di S_r tra loro linearmente indipendenti (nel senso che a tali complessi appartengono tutti gli S_k tangenti di V_k), le coordinate grassmanniane:

$$p^{i_0 i_1 \dots i_k} = \left\| \begin{array}{ccc} a^{i_0} & a^{i_1} & \dots & a^{i_k} \\ \frac{\partial a^{i_0}}{\partial u_1} & \frac{\partial a^{i_1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial a^{i_k}}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a^{i_0}}{\partial u_k} & \frac{\partial a^{i_1}}{\partial u_k} & \dots & \frac{\partial a^{i_k}}{\partial u_k} \end{array} \right\| \quad (i_0, i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, r; i_0 < i_1 < \dots < i_k)$$

del generico S_k tangente di V_k soddisfano ad un sistema di equazioni lineari del tipo

$$(2) \quad \omega_{i_0 i_1 \dots i_k}^{(\xi)} p^{i_0 i_1 \dots i_k}(u) = 0 \quad (\xi = 1, \dots, N),$$

ove

$$\left\| \omega_{i_0 i_1 \dots i_k}^{(\xi)} \right\|$$

è una matrice di rango N , ad N righe ed $R + 1 = \binom{r+1}{k+1}$ colonne.

Supponiamo ancora che il punto $A_0(1, 0, \dots, 0)$ sia un punto generico di V_k , il quale si ottenga dalle (1) ponendovi $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$; ciò implica che si abbia

$$a^0(0, \dots, 0) \neq 0 \quad ; \quad a^i(0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Posto allora

$$J_{i_1 i_2 \dots i_k}(u_1, \dots, u_k) = \frac{\partial(a^{i_1}, \dots, a^{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)},$$

risulta

$$p^{i_0 i_1 \dots i_k}(0, \dots, 0) = a^0(0, \dots, 0) J_{i_1 \dots i_k}(0, \dots, 0) \\ (i_1 i_2 \dots i_k \neq 0; i_1 < i_2 < \dots < i_k),$$

$$p^{i_0 i_1 \dots i_k}(0, \dots, 0) = 0 \quad (i_0 i_2 \dots i_k \neq 0; i_0 < i_1 < \dots < i_k),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_j} p^{i_0 i_1 \dots i_k} \right]_0 = a^0(0, \dots, 0) \left[\frac{\partial}{\partial u_j} J_{i_1 \dots i_k} \right]_0 \\ (i_1 \dots i_k \neq 0; i_1 < i_2 < \dots < i_k; j = 1, \dots, k),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_j} p^{i_0 i_1 \dots i_k} \right]_0 = 0 \quad (i_0 i_2 \dots i_k \neq 0; i_0 < i_1 < \dots < i_k; j = 1, \dots, k),$$

e quindi, ponendo nelle (2) $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$, si ottiene che sussistono le N relazioni

$$(3) \quad \omega_{i_0 i_1 \dots i_k}^{(\xi)} p^{i_0 i_1 \dots i_k}(0, \dots, 0) = 0 \quad (\xi = 1, \dots, N; i_1 i_2 \dots i_k \neq 0);$$

inoltre, derivando le (2) rispetto ad u_j ($j = 1, \dots, k$) e ponendovi poi $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$, si trova che sono soddisfatte altresì le relazioni

$$(4) \quad \omega_{i_0 i_1 \dots i_k}^{(\xi)} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} p^{i_0 i_1 \dots i_k} \right]_0 = 0 \quad (\xi = 1, \dots, N; i_1 i_2 \dots i_k \neq 0, \\ j = 1, \dots, k).$$

Ma le (3), (4) implicano che la matrice

$$\left\| \omega_{i_1 \dots i_k}^{(E)} \right\|$$

abbia rango $\rho \leq N - k + 1$; invero se esistessero $k + 1$ costanti c^j ($j = 0, 1, \dots, k$) soddisfacenti alle

$$c^j \left[\frac{\partial}{\partial u_j} p^{i_0 i_1 \dots i_k} \right]_0 = 0 \quad (i_1 \dots i_k \neq 0)$$

(ove formalmente si è posto $\frac{\partial}{\partial u_0} p^{i_0 i_1 \dots i_k}$ in luogo di $p^{i_0 i_1 \dots i_k}$), ossia addirittura alle

$$c^j \left[\frac{\partial}{\partial u_j} p^{i_0 i_1 \dots i_k} \right]_0 = 0$$

(per ogni combinazione $i_0 i_1, \dots, i_k$), poiché A_0 è un punto generico di V_k , le $p^{i_0 i_1 \dots i_k}(u_1, \dots, u_k)$ sarebbero integrali di una medesima equazione differenziale alle derivate parziali, del primo ordine, lineare ed omogenea, onde la varietà V^* immagine sulla grassmanniana degli S_k di S_r della totalità degli S_k tangenti di V_k avrebbe dimensione inferiore a k , contro l'ipotesi che V_k sia dotata effettivamente di $\infty^k S_k$ tangenti.

Pertanto l'eliminazione delle $p^{i_0 i_1 \dots i_k}$ (con $i_1 \dots i_k \neq 0$) dalle (2) conduce ad almeno

$$N - \binom{r}{k} + k + 1$$

relazioni lineari indipendenti vincolanti le $p^{i_0 i_1 \dots i_k}$ ($i_0, \dots, i_k \neq 0$); e ciò significa appunto che la proiezione di V_k dal punto A_0 sull' $S_{r-1} \equiv A_1 \dots A_r$ è una V'_k i cui S_k tangenti appartengono ad almeno $N - \binom{r}{k} + k + 1$ complessi lineari linearmente indipendenti di S_k di S_{r-1} .

Notiamo infine il seguente

COROLLARIO. — Se V_k appartiene a $\theta(r, k)$ complessi lineari linearmente indipendenti di S_k di S_r , la sua proiezione da un suo punto generico su un S_{r-1} è una V'_k che appartiene a $\theta(r-1, k)$ complessi lineari linearmente indipendenti di S_k dell' S_{r-1} .

Meccanica. — *Sullo slittamento elastico nel rotolamento.* Nota^(*) di ETTORE FUNAIOLI, presentata dal Socio E. PISTOLESI.

PREMESSA. — Come è noto, tra le cause che provocano una perdita di lavoro nel rotolamento di un rullo su di una superficie, deve considerarsi anche lo slittamento elastico, che si manifesta nel caso che sull'asse del rullo si eserciti, non soltanto una forza N ⁽¹⁾ diretta perpendicolarmente alla direzione di avanzamento, ma anche una forza T diretta secondo questa direzione e di senso tale da ostacolare il moto del rullo (e, naturalmente, per

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1953.

(1) Limitiamo lo studio al problema piano. Per questo le forze N, T e la coppia TR , debbono intendersi riferite alla unità di lunghezza del rullo.

l'equilibrio, una coppia TR, essendo R il raggio del rullo); ossia quando il rullo si comporti da rullo rimorchiatore,

Ci proponiamo di calcolare questo slittamento e mettere in evidenza la dipendenza di esso dalla forza T, sia nel caso che il coefficiente di attrito di strisciamento tra rullo e suolo possa ritenersi indipendente dalla velocità, sia nel caso che questa ipotesi non possa ritenersi plausibile.

GEOMETRIA DEL CONTATTO. - Riferiamo il rullo ed il suolo a due coppie di assi ortogonali $y z_1$, $y z_2$ le quali, quando i corpi siano in contatto, in assenza di deformazioni, vengano a coincidere, salvo per il segno degli assi z che sono orientati verso l'interno dei corpi ai quali sono riferiti (ved. fig. 1).

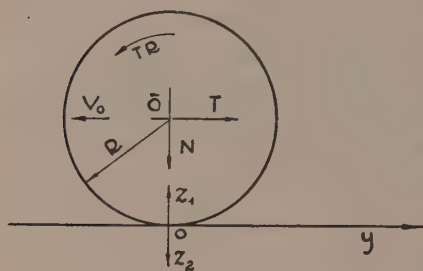


Fig. 1.

Gli assi y sono cospiranti con la forza T applicata all'asse del rullo. Il riferimento yz_1 rimane solidale con l'asse del rullo, mentre l'asse y del riferimento yz_2 rimane coincidente con la linea di confine del suolo a grande distanza dalla zona di contatto.

Supponiamo i due corpi a contatto perfettamente elastici e costituiti dallo stesso materiale. In questo caso, quando il rullo viene compresso contro il suolo, punti aventi origina-

riamente la stessa ascissa y vengono a coincidere dopo la deformazione. Ciò non avviene più se, oltre alla forza N, viene applicata al rullo anche una forza T perché, in questo caso, nascono nei punti della zona di contatto degli spostamenti secondo y . Tuttavia, data la piccolezza di questi spostamenti, è lecito ritenere, ai soli fini della valutazione degli spostamenti secondo z dei punti della zona di contatto, che il contatto avvenga tra punti aventi originariamente la stessa y . In questo modo possiamo scrivere:

$$(I) \quad \zeta_1 + \zeta_2 = \delta - y^2/2 R,$$

dove abbiamo indicato con ζ_1 , ζ_2 rispettivamente gli spostamenti, secondo z , dei punti del contorno del rullo e del suolo in corrispondenza della zona di contatto, con δ l'abbassamento dell'asse del rullo, con $y^2/2 R$ l'ordinata z_1 di un punto del contorno del rullo prima della deformazione (per la piccolezza della zona di contatto si è assimilato il contorno del rullo ad un arco di parabola).

ALCUNI RICHIAMI DI ELASTICITÀ. - Consideriamo una striscia di spessore unitario di un suolo elastico e, scelti gli assi yz come in fig. 1, effettuiamo su di una porzione $-a \leq y \leq a$ di detta striscia una distribuzione di pressione normale p_n (di risultante N) e tangenziale p_t (di risultante T). Indichiamo con γ_N , γ_N , γ_T , γ_T gli spostamenti secondo y e secondo z , sulla linea di con-

fine, dovuti rispettivamente alla distribuzione di pressione normale e tangenziale.

Come potrebbe vedersi sviluppando opportunamente quanto, ad esempio, esposto alla p. 87 e sgg. nell'opera citata nella bibliografia in [1], si ottengono per detti spostamenti le seguenti espressioni:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_N &= \frac{1-\nu}{2E} \left(N - 2 \int_{-a}^y p_n du \right) \\ \zeta_N &= -\frac{1+\nu}{\pi E} N - \frac{2}{\pi E} \int_{-a}^a p_n \ln |y-u| du + \frac{2N}{\pi E} \ln d \\ \eta_T &= -\frac{2T}{\pi E} \ln h + \frac{2}{\pi E} \int_{-a}^a p_t \ln |y-u| du \\ \zeta_T &= \frac{1-\nu}{2E} \left(T - 2 \int_{-a}^y p_t du \right) \end{aligned} \right.$$

nelle quali si è indicato con u il punto dell'asse y in corrispondenza del quale è applicata la pressione $p = p(u)$, mentre d ed h sono delle costanti le quali, nel caso che la forza N e la forza T fossero concentrate nel punto $y = z = 0$, rappresenterebbero rispettivamente la quota di un punto dell'asse z in cui potesse ritenersi $\zeta_N = 0$ e la distanza, misurata lungo la linea di confine, alla quale potesse ritenersi $\eta_T = 0$.

Le (2) possono ritenersi valide, oltre che per un suolo, anche per corpi cilindrici, purché la lunghezza $2a$ della zona sulla quale sono distribuite le pressioni sia piccola rispetto al raggio di curvatura della sezione normale del cilindro in un punto interno alla zona di contatto; in particolare possono essere utilizzate per lo studio delle deformazioni sia del suolo, che del rullo.

DISTRIBUZIONE DELLA PRESSIONE NORMALE. — Ammessa la validità della (1), la distribuzione della p_n è ancora quella che si avrebbe se fosse $T = 0$. Infatti per le (2) si ha:

$$\zeta_1 + \zeta_2 = -\frac{2N(1+\nu)}{\pi E} - \frac{4}{\pi E} \int_{-a}^a p_n \ln |y-u| du + \frac{4N}{\pi E} \ln d,$$

espressione nella quale non compare p_t . Pertanto, come potrebbe facilmente vedersi, e come del resto è noto (ved. ad esempio [2], [3]), la distribuzione di p_n è definita dalla:

$$(3) \quad p_n = \frac{2N}{\pi a} \sqrt{1 - (u/a)^2},$$

dove a , semilarghezza della zona di contatto, è data dalla espressione:

$$(4) \quad a = \sqrt{\frac{8RN}{\pi E}}.$$

LO SLITTAMENTO ELASTICO. È noto dalla Meccanica applicata (vedi [4]) come si giustifichi la presenza dello slittamento elastico. Riteniamo, comunque, opportuno dare un cenno di richiamo.

Per comodità di ragionamento supponiamo di imprimere al sistema considerato una velocità $-V_0$, essendo V_0 la velocità di avanzamento del rullo, ossia riduciamoci al caso di un rullo ruotante intorno ad un asse fisso, mentre il suolo si sposta con velocità $-V_0$ secondo l'asse y . Consideriamo la velocità dei punti del contorno del rullo e del suolo in questa disposizione. Se indichiamo con ε_1 la dilatazione in un punto della periferia del rullo, valutata secondo la tangente al contorno nel punto, con ε_2 la analoga dilatazione in un punto della linea di confine del suolo, risulta immediatamente che un elemento del contorno del rullo (o del suolo), avente prima della deformazione lunghezza ds , viene ad avere dopo la deformazione lunghezza $ds' (1 + \varepsilon_1)$ (o, rispettivamente, $ds' (1 + \varepsilon_2)$). Così, se indichiamo con $R\omega$ e V_0 le velocità dei punti del contorno del rullo e del suolo a grande distanza dalla zona di contatto, le velocità dei punti del contorno, ove le dilatazioni non siano nulle, vengono ad assumere i valori $R\omega (1 + \varepsilon_1)$, $V_0 (1 + \varepsilon_2)$. Indicando con v la velocità relativa tra i punti del contorno del rullo e del suolo che vengono a contatto si ha:

$$(5) \quad v = R\omega (1 + \varepsilon_1) - V_0 (1 + \varepsilon_2) \cong V_0 (R\omega/V_0 - 1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Definiamo slittamento elastico il rapporto:

$$(6) \quad k = \frac{R\omega - V_0}{V_0}.$$

Premessi questi richiami, passiamo a calcolare le dilatazioni in un punto della linea di confine, dovute ad una distribuzione qualunque di pressioni normali e tangenziali.

Per la distribuzione di pressione normale si ha:

$$\varepsilon_{yN} = \frac{\partial \eta_N}{\partial y} = - \frac{1-v}{E} \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-a}^a p_n du \right] = - \frac{1-v}{E} p_n(y),$$

mentre per la distribuzione di pressione tangenziale si ottiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yT} = \frac{\partial \eta_T}{\partial y} &= \frac{2}{\pi E} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a p_t \ln |y - u| du = \\ &= \frac{2}{\pi E} \frac{\partial}{\partial y} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^{2-\varepsilon} p_t \ln |y - u| du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a p_t \ln |u - y| du = \frac{2}{\pi E} \int_{-a}^a p_t \frac{du}{y - u}. \end{aligned}$$

Si ha così

$$(7) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{4}{\pi E} \int_{-a}^a p_t \frac{du}{y - u},$$

che possiamo introdurre nella (5).

CALCOLO DELLO SLITTAMENTO NELLA IPOTESI CHE IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DI STRISCIAMENTO SIA COSTANTE. RISULTATI. — Ci soffermiamo molto brevemente su questo caso, poiché esso è stato trattato, sia pure con procedimento diverso da quello da noi seguito, da H. Poritsky [5], il quale è pervenuto a risultati che, a parte un banale errore di calcolo nella valutazione di k , praticamente coincidono con quelli da noi trovati, la differenza tra le due soluzioni giustificandosi per il fatto che, mentre H. Poritsky considera uno stato di deformazione piano, noi abbiamo, con le (2'), introdotto uno stato di tensione piano.

I risultati ai quali siamo pervenuti sono i seguenti:

a) la zona di contatto può essere suddivisa in due zone distinte: una zona di strisciamento, dove $v > 0$ e dove la pressione tangenziale è data da $p_t = f p_n$, essendo f il coefficiente di attrito di strisciamento cinetico; una zona di aderenza, dove cioè $v = 0$, adiacente al punto nel quale si inizia il contatto tra rullo e suolo e dove $p_t \leq f p_n$;

b) la larghezza della zona di aderenza, sia b , vale:

$$(8) \quad b = 2a\sqrt{1 - T/fN};$$

c) la distribuzione di pressione tangenziale sulla zona di aderenza è data da:

$$(9) \quad p_t = \frac{2Nf}{\pi a} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} - \left(1 - \frac{y}{a}\right) \left(\frac{\dot{\delta}}{a} + \frac{u}{a} - 1 \right) \right];$$

d) la velocità di strisciamento, definita dalla (5'), è data da:

$$(10) \quad v = V_0 \frac{8Nf}{\pi E a} \left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \frac{y}{a} \left(2 - \frac{\dot{\delta}}{a}\right) - \left(1 - \frac{\dot{\delta}}{a}\right) \right],$$

valida per $-a \leq y \leq a - b$. Naturalmente nella zona di aderenza $v = 0$.

e) lo slittamento, definito dalla (6), risulta:

$$(11) \quad k = \frac{8Nf}{\pi E a} \left[1 - \sqrt{1 - T/fN} \right].$$

CALCOLO DELLO SLITTAMENTO NELLA IPOTESI CHE f DIPENDA DALLA VELOCITÀ. — Come potrebbe vedersi con semplici considerazioni sul valore delle grandezze in giuoco, nei casi pratici le velocità di strisciamento risultanti dalla (5') sono sempre molto piccole, dell'ordine di qualche cm/sec. Come è noto, a queste velocità il coefficiente di attrito è particolarmente sensibile alla velocità. Da numerose esperienze effettuate a suo tempo anche presso la Facoltà di Ingegneria di Pisa (ved. [6]), risulta che può scriversi, con soddisfacente accordo con l'esperienza:

$$(12) \quad f = \beta v^\alpha,$$

dove β ed α sono due coefficienti, dipendenti dalla natura dei materiali a contatto, i cui valori, secondo le prove citate in [6], sono compresi, per i materiali metallici ivi considerati, tra 0,10 e 0,14 per β , e tra 0,03 e 0,08 per α , con v in

cm/sec. Segue da ciò che il coefficiente di attrito cresce rapidamente con la velocità per valori piccolissimi di questa raggiungendo, già per velocità dell'ordine di qualche cm/sec, un valore che, ai fini pratici, può ritenersi rimanere costante all'ulteriore aumento della velocità. Questa circostanza ci ha permesso di apportare al problema una decisa semplificazione, con la adozione, in luogo della legge sperimentale (12), di una dipendenza di tipo lineare tra f e v . Più precisamente, indicando con v' ed f' due costanti dipendenti dalla natura dei materiali a contatto, ammettiamo che, per $v=0$, sia $f=f_0$; per $0 \leq v \leq v'$, $f=f_0 + (f'-f_0)v/v'$; per $v \geq v'$, $f=f'$. Così facendo introduciamo, ovviamente, una causa di errore; ma, assumendo opportuni valori di f_0 , f' , v' , possiamo fare in modo che il legame tra f e v non si scosti molto da quello dedotto sperimentalmente.

Ciò premesso, tenendo presenti le (5), (6), (7), possiamo scrivere la seguente equazione integrale:

$$(13) \quad v = V_0 \left(k - \frac{4}{\pi E} \int_{-a}^a f p_n \frac{du}{y-u} \right).$$

Indichiamo con y' il valore di y in corrispondenza del quale si ha $v=v'$, e quindi $f=f'$. Per valori di $y > y'$ si ha $v < v'$, mentre per $y < y'$, è $v > v'$. Così la (13) può scriversi:

$$(14) \quad v = V_0 \left(k - \lambda_0 \int_{-a}^a p_n \frac{du}{y-u} - \lambda \int_{-a}^{y'} p_n \frac{du}{y-u} - \frac{\lambda}{v'} \int_{y'}^a v p_n \frac{du}{y-u} \right),$$

dove si è posto: $\lambda_0 = 4f_0/\pi E$, $\lambda = 4(f'-f_0)/\pi E$. Risolviamo questa equazione per valori di y compresi tra y' ed a , estremi inclusi. Ricordando la (3) e ponendo $\rho_0 = \lambda_0 2N/\pi a$, $\rho = \lambda 2N/\pi a$, si ha:

$$(15) \quad = V_0 \left(k - \rho_0 \int_{-a}^a \frac{\sqrt{1-(u/a)^2}}{y-u} du - \rho \int_{-a}^{y'} \frac{\sqrt{1-(u'/a)^2}}{y-u} du - \frac{\rho}{v'} \int_{y'}^a v \frac{\sqrt{1-(u'/a)^2}}{y-u} du \right).$$

Ora, come può facilmente vedersi:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{y'} \frac{\sqrt{1-(u/a)^2}}{y-u} du &= \frac{y}{a} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arsen} \frac{y'}{a} \right) - \sqrt{1-(y'/a)^2} - \\ &- \sqrt{1-(y/a)^2} \ln \frac{1-yy'/a^2 - \sqrt{1-(y/a)^2} \sqrt{1-(y'/a)^2}}{y'/a - y/a}. \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'ultimo termine della (15) è opportuno effettuare un cambiamento di variabile. Precisamente trasportiamo l'origine delle coordinate nel punto di ascissa $(y'+a)/2$. Indichiamo con y^* la nuova ascissa. Si ha:

$$y^* = y - \frac{a+y'}{2}, \quad u^* = u - \frac{a+y'}{2}.$$

Poniamo poi: $a^* = (a - y')/2$. Infine poniamo: $u^*/a^* = -\cos \theta$, $y^*/a^* = -\cos \varphi$. Con queste sostituzioni si ha:

$$\int_{y'}^a v \frac{\sqrt{1 - (u/a)^2}}{y - u} du = \frac{2}{1 + A} \int_0^\pi v \frac{\sqrt{A + (A - 1) \cos \theta - \cos^2 \theta}}{\cos \theta - \cos \varphi} \sin \theta d\theta,$$

dove si è posto $A = 3 + 2 y'/a^* = 3 + \frac{4 y'/a}{1 - y'/a}$.

Poniamo adesso:

$$(16) \quad v = \frac{a_0 (1 + \cos \theta) + \sum_1^\infty a_n \sin n\theta}{\sqrt{A + (A - 1) \cos \theta - \cos^2 \theta}} V_0.$$

In questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{y'}^a v \frac{\sqrt{1 - (u/a)^2}}{y - u} du &= \frac{2 V_0}{1 + A} \int_0^\pi \frac{a_0 (1 + \cos \theta) + \sum_1^\infty a_n \sin n\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2 V_0}{1 + A} \left[2 a_0 + a_0 (1 + \cos \varphi) \ln \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - \pi \sum_1^\infty a_n \cos n\varphi \right]. \end{aligned}$$

Così la (15) può scriversi:

$$\begin{aligned} (17) \quad v &= V_0 \left[k - \rho_0 \frac{y\pi}{a} - \rho \left\{ \frac{y}{a} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arsen} \frac{y'}{a} \right) - \sqrt{1 - (y'/a)^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{1 - (y/a)^2} \ln \frac{1 - yy'/a^2 - \sqrt{1 - (y/a)^2} \sqrt{1 - (y'/a)^2}}{y'/a - y/a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2 V_0}{(1 + A) v'} \left(2 a_0 + a_0 (1 + \cos \varphi) \ln \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - \pi \sum_1^\infty a_n \cos n\varphi \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Tenendo conto delle (16), (17) si può scrivere, per un prefissato valore del parametro y' , un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite a_0, \dots, a_{n-2}, k . Queste n equazioni impongono la uguaglianza delle espressioni (16), (17) in $n - 1$ punti dell'intervallo $y' \leq y \leq a$, ed inoltre la condizione che, per $y = y'$, sia $v = v'$. Da quest'ultima condizione risulta, anzi, immediatamente determinabile il valore di a_0 . Si ha, infatti, per la (16):

$$(v)_{\varphi=0} = \frac{2 a_0 V_0}{V_0 (A - 1)} = v',$$

da cui:

$$(18) \quad a_0 = \frac{v'}{V_0} \sqrt{\frac{A - 1}{2}} = \frac{v'}{V_0} \sqrt{\frac{1 + y'/a}{1 - y'/a}}.$$

Con questo la (17) diviene:

$$\begin{aligned} (19) \quad v &= V_0 \left[k - \rho_0 \frac{y\pi}{a} - \rho \left\{ \frac{y}{a} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arsen} \frac{y'}{a} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{1 - (y/a)^2} \ln \frac{1 - yy'/a^2 - \sqrt{1 - (y/a)^2} \sqrt{1 - (y'/a)^2}}{y'/a - y/a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{1 - (y'/a)^2} \frac{1 - y/a}{1 - y'/a} \ln \frac{y/a - y'/a}{1 - y/a} - (1 - y'/a) \frac{\pi V_0}{2 v'} \sum_1^\infty a_n \cos n\varphi \right\} \right], \end{aligned}$$

la quale fornisce valori finiti di v per qualunque valore di y compreso nel suo campo di validità. In particolare, passando al limite per $y \rightarrow y'$ si ha:

$$\lim_{y \rightarrow y'} v = V_0 \left[k - \rho_0 \frac{y' \pi}{a} - \rho \left\{ \frac{y'}{a} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsen \frac{y'}{a} \right) - \sqrt{1 - (y'/a)^2} (2 \ln(1 - y'/a) - \ln 2 + \ln(1 + y'/a) - (1 - y'/a) \frac{\pi V_0}{2 v'} \sum_1^{\infty} a_n \right\} \right].$$

È anche opportuno osservare che il limite al quale tende il secondo membro della (16) per $\varphi \rightarrow \pi$ è il seguente:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi} v = -V_0 \sqrt{\frac{1 - (y'/a)^2}{2}} \sum_1^{\infty} (-1)^n n a_n,$$

espressione della quale si deve far uso qualora, nella impostazione del sistema risolutivo, si intenda imporre la uguaglianza delle (16), (17) nel punto $y = a$.

Calcoliamo adesso la forza T in funzione di k e degli a_i . Si ha:

$$T = \int_{-a}^a p_t du = f_0 \int_{-a}^a p_n du + (f' - f_0) \int_{-a}^{y'} p_n du + \frac{f' - f_0}{v'} \int_{y'}^a v p_n du.$$

Con le notazioni solite si ha:

$$\begin{aligned} (21) \quad T &= f_0 \frac{2N}{\pi a} \int_{-a}^a \sqrt{1 - (u/a)^2} du + (f' - f_0) \frac{2N}{\pi a} \int_{-a}^{y'} \sqrt{1 - (u/a)^2} du + \\ &+ \frac{f' - f_0}{v'} V_0 \frac{N(1 - y'^2/a^2)}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[a_0(1 + \cos \theta) + \sum_1^{\infty} a_n \sin n\theta \right] \sin \theta d\theta \\ &= f_0 N + (f' - f_0) \frac{N}{\pi} \left[\sqrt{1 - (y'/a)^2} + \arcsen \frac{y'}{a} + \frac{\pi}{2} + \frac{a\pi}{4} \frac{V_0}{v'} \left(1 - \frac{y'}{a} \right) \right]. \end{aligned}$$

Come si vede, T dipende soltanto dai termini in a_0, a_1 , l'espressione di a_0 essendo data dalla (18). Ciò significa che, per ottenere un valore di T sufficientemente approssimato, basta valutare con sufficiente approssimazione il coefficiente a_1 . È perciò possibile ottenere risultati soddisfacenti, pur contenendo entro limiti modesti il numero di equazioni del sistema risolutivo.

Può esser opportuno osservare che, qualora nella zona di contatto sia, ovunque, $0 < v < v'$, nella (21) deve porsi $y' = -a$.

Al diminuire di T , diminuisce la velocità di strisciamento, che finisce con l'annullarsi, dapprima in corrispondenza del punto $y = a$, ed infine su di una zona (zona di aderenza) adiacente a questo punto. Con il manifestarsi di una zona di aderenza cessano di esser valide le relazioni trovate. Tuttavia se, in luogo del legame convenzionale $f = f(v)$ da noi scelto, avessimo adottato la (12), saremmo giunti alla conclusione che non esiste una zona di aderenza; semplicemente, a piccoli valori di T , corrispondono piccoli valori di v .

ESEMPIO NUMERICO. — Applichiamo le considerazioni fatte e le relazioni trovate ad un esempio numerico. Prendiamo i seguenti dati, che potrebbero corrispondere al caso di una ruota di locomotore ferroviario rotolante su di una rotaia: $R = 625 \text{ mm}$; $N = 300 \text{ kg/mm}$; $E = 21.000 \text{ kg/mm}^2$; $V_0 = 15 \text{ m/sec}$; $v' = 3 \text{ cm/sec}$; $f_0 = 0,10$; $f' = 0,14$. Si ha, per la (4), $a = 4,8 \text{ mm}$.

In fig. 2 si può vedere, tracciata a punto e linea, la curva $T/N = T/N(k)$. Questa curva è stata ottenuta per punti. Per tracciarla si sono scelti i seguenti valori del parametro y' : a , 0 , $-a$. Per ciascuno di detti valori si è risolto un sistema di cinque equazioni nelle cinque incognite a_0, \dots, a_3, k .

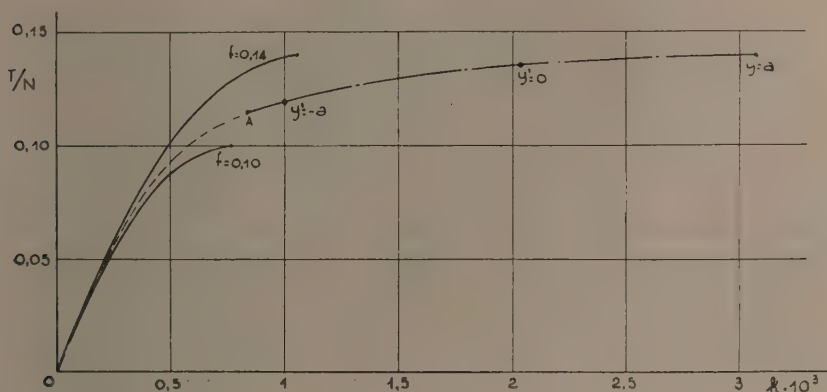


Fig. 2.

Si è inoltre considerato il caso che sia $0 < v < v'$ su tutta la zona di contatto. Questa condizione è verificata per il tratto rettilineo compreso, in figura, tra il punto A (dove si ha $v = 0$, per $y = a$) ed il punto per il quale $y' = -a$. La porzione di curva indicata a tratti sottili è stata tracciata a sentimento ed a scopo puramente indicativo; infatti nel suo campo di validità si avrebbe, con le ipotesi fatte, la presenza di una zona di aderenza. È chiaro che detta curva deve risultare interna alla striscia limitata dalle due curve tracciate a tratto continuo, le quali traducono graficamente la (11), rispettivamente per $f = 0,10$ (la inferiore) e per $f = 0,14$ (la superiore).

Può essere opportuno, a conclusione del presente lavoro, mettere in evidenza la influenza di V_0 sullo slittamento elastico, a parità di T . Questo confronto riesce particolarmente facile se facciamo riferimento al valore massimo di T . In questo caso si ha semplicemente:

$$(22) \quad k = \frac{v'}{V_0} + \frac{8T}{Ea\pi},$$

la quale si presta ad un immediato confronto con la (11) dove si ponga $T = fN$.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. TIMOSHENKO, *Théorie de l'élasticité*, Béranger, Paris 1936.
 [2] C. CATTANEO, *Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici*. « Atti Accad. Lincei », vol. XXIX, p. 403 e sgg. (1939).
 [3] L. FÖPPL, *Neue Ableitung der Hertzschen Härteformeln für die Walze*. « Z.A.M.M. », Juni 1936, p. 165 e sgg.
 [4] E. PISTOLESI, *Lezioni di Meccanica applicata*, Vallerini, Pisa.
 [5] H. PORITSKY, *Stresses and Deflections of Cylindrical Bodies in Contact*, ecc. « J. of App. Mech. », June 1950, p. 191 e sgg.
 [6] N. NERLI, *Nuove esperienze sull'attrito di strisciamento tra superficie asciutte*. « Pubbl. Fac. Ingegneria », Pisa, n. 130 (1929).

Astronomia. -- *Miglioramento delle orbite di cinque piccoli pianeti*. Nota di TERESA FORTINI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Il miglioramento delle orbite dei cinque pianetini riportati nella presente Nota, continua la collaborazione dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario con l'Osservatorio di Cincinnati, il quale dirige, per incarico dell'U.A.I., il servizio riguardante i piccoli pianeti. Il prof. Paul Herget, Direttore dell'Osservatorio di Cincinnati, ci ha cortesemente inviato per tutti e cinque i pianetini, le tavole con le perturbazioni speciali approssimate di Giove, che presso quell'osservatorio vengono calcolate a mezzo di macchine elettriche a schede perforate. Poiché i pianetini in questione presentavano casi critici differenti, per il miglioramento ho usato due diversi metodi e precisamente: quello di Tietjen approssimato e quello rigoroso di Eckert e Brouwer.

Come è noto, il metodo di Tietjen⁽¹⁾ suppone, in un primo tempo, che la giacitura del piano orbitale non sia affetta da errore, e si limita di conseguenza a migliorare soltanto gli elementi M, ω, φ, μ , essendo M l'anomalia media, ω la posizione del perielio, φ l'angolo di eccentricità, μ il moto medio. Secondo questo metodo approssimato, le equazioni che legano le variazioni degli elementi μ, φ, ω, M agli scarti osservati sono del tipo:

$$(1) \quad l d\mu + m d\varphi + n d\omega + p dM = f$$

$$\text{dove } l = p \frac{t-t_0}{3600^\circ} \quad m = \frac{a}{\rho} f_\varphi \quad n = \frac{a}{\rho} f_\omega \quad p = \frac{a}{\rho} f_M$$

Le quantità f_M, f_ω, f_φ si ricavano immediatamente dalle tavole di Stracke⁽²⁾ in cui esse sono tabellate in funzione di M e φ , mentre si può porre con buona approssimazione $f = \Delta x \cos \delta$. Non è necessario, quando gli scarti ottenuti con questo primo miglioramento siano abbastanza soddisfacenti, apportare in un secondo tempo una correzione agli elementi Ω ed i .

(*) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) Per la teoria cfr. STRACKE, *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*.

(2) Cfr. « Astronomische Nachrichten », 1931. Band 242.

La caratteristica del metodo di Eckert e Brouwer ⁽³⁾ consiste nel far uso delle coordinate rettangolari equatoriali eliocentriche e delle loro derivate per cui, se si ha una effemeride del pianetino in cui queste quantità sono tabellate a intervalli regolari di tempo, la loro interpolazione per le date di osservazione permette di ottenere facilmente i coefficienti da introdurre nelle equazioni di condizione che sono del tipo:

$$(2) \quad \begin{cases} -\delta x \frac{\sin \alpha}{\rho} + \delta y \frac{\cos \alpha}{\rho} = \Delta \alpha \cos \delta \\ -\delta x \frac{\cos \alpha \sin \delta}{\rho} + \delta y \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\rho} + \delta z \frac{\cos \delta}{\rho} = \Delta \delta. \end{cases}$$

Mediante il metodo di E. e B. si possono migliorare simultaneamente i sei elementi orbitali, ma il miglioramento degli elementi Ω , ω , i che definiscono la giacitura e l'orientamento dell'orbita, viene fatto individuando le componenti della rotazione $\vec{\psi}$ che l'orbita preliminare compie attorno a una determinata direzione per portarsi a coincidere con l'orbita migliorata. Il calcolo dei coseni direttori dei tre vettori unitari eliocentrici \bar{P} , \bar{Q} , \bar{R} ⁽⁴⁾ (da cui gli elementi Ω , ω , i) a mezzo delle componenti secondo gli assi coordinati, del vettore rotazione $\vec{\psi}$ si può fare facilmente mediante l'accorgimento suggerito da P. Herget ⁽⁵⁾. È possibile, con il metodo di E. e B. separare, quando le orbite siano circolari e poco inclinate sull'equatore ⁽⁶⁾, il miglioramento da apportare all'anomalia media, dalla rotazione ψ_z intorno all'asse z , la quale in questo caso coincide quasi interamente con la variazione della longitudine del perielio.

Il procedimento del calcolo, che è stato accomodato dagli autori stessi in una forma comoda e sintetica per mezzo delle matrici cracoviane è alquanto più laborioso di quello del metodo di Tietjen.

In generale, le osservazioni riguardanti i cinque pianetini sono date con l'esattezza del primo d'arco, onde il metodo approssimato, fatta eccezione per il pianetino Aslog, mi ha permesso di ottenere delle orbite migliorate su cui le osservazioni sono rappresentate con la precisione raggiungibile in simili casi, tenuto anche conto che le perturbazioni sono speciali e approssimate e riguardano il solo pianeta Giove. Ho adoperato il metodo di Eckert e Brouwer per il miglioramento orbitale del pianetino Aletta, poiché questo era stato osservato in numerose opposizioni e inoltre le osservazioni risultavano abbastanza bene distribuite sull'orbita. Tuttavia la precisione con cui le osservazioni sono rappresentate sull'orbita migliorata è dello stesso ordine di quella ottenuta negli altri casi con il metodo di Tietjen.

(3) Cfr. «Astronomical Journal», vol. 46, p. 125.

(4) Ricordiamo che il vettore P è diretto dal Sole al perielio, il vettore Q a 90° dal perielio sul piano dell'orbita, mentre il vettore R è normale al piano dell'orbita.

(5) Ved. «Astronomical Journal», vol. 53, p. 15. Ricordiamo che il vettore P è diretto dal Sole al perielio, il vettore Q a 90° dal perielio sul piano dell'orbita, mentre il vettore R è normale al piano dell'orbita.

(6) Ved. «Astronomical Journal», vol. 46, p. 127 e sg.

L'aiuto delle tabelle calcolate dallo Stracke per l'uso di questo ultimo metodo e la grande rapidità e facilità con cui è possibile adoperarlo, mi inducono a decidere in favore di questo per l'uso che dovremo farne anche in seguito, riservandoci di adoperare quello più rigoroso quando le osservazioni, *tutte accurate* e ben distribuite sull'orbita, ci permettano di ottenere un miglioramento tale da giustificare il notevole maggiore dispendio di lavoro e di tempo.

Ringrazio vivamente il prof. Cimino, il quale mi ha costantemente assistito e accortamente consigliata durante il mio lavoro, come pure il calcolatore dell'Osservatorio sig. R. Flamini, che ha validamente collaborato all'esecuzione dei calcoli.

2. Qui appresso sono riportati i diversi pianetini, nello stesso ordine con cui ho effettuato il loro miglioramento. Tutte le osservazioni che li riguardano e che ho raccolto dietro le informazioni bibliografiche gentilmente fornitemi dal prof. Kopff di Heidelberg, sono riportate nel seguente quadro. Ho tenuto conto dell'aberrazione planetaria sottraendo alle date di osservazione i tempi di luce, mentre ho eliminato l'effetto di parallasse trasformando le coordinate solari da geocentriche a topocentriche. Nessuna correzione è stata apportata per l'aberrazione delle fisse.

Pianetino 962 Aslog.

1	1916 ott.	23 «A.N.»	205, 198
2		24 »	»
3	nov.	3 »	»
4	1921 ott.	25 «A.N.»	223, 174
5		26 »	»
6		31 »	218, 55
7	nov.	24 »	216, 171
8	dic.	4 »	218, 55
9		26 «B.Z.»	3, 62
10	1928 feb.	22 «B.Z.»	10, 19
11	1931 dic.	3 «A.N.»	249, 96
12		5 »	»
13	1941 nov.	14 «R.I.»	2312
14		17 »	»
15	1946 nov.	14 «M.P.C.»	11
16		19 »	»
17		20 »	»

Pianetino 1558.

1	1929 nov.	29 «A.N.»	271, 44
2	dic.	5 »	»
3	1937 mar.	10 «B.Z.»	1921
4		12 «R.I.»	1556
5		30 »	»
6	1942 gen.	14 «R.I.»	2334
7		20 »	2332
8	feb.	4 »	2334
9	1944 gen.	25 »	2549

Pianetino 1193 Africa.

1	1931 apr.	14 «R.I.»	450, «U.C.»	86
			«B.Z.»	1931
2	mag.	6 «U.C.»		86
3		13 »		»
4		18 »		»
5		22 »		»
6	giu.	5 »		»
7	1935 mar.	5 «B.Z.»		1935
	apr.	1 «U.C.»	95, «R.I.»	1173
9	1939 feb.	13 «B.A.B.»		312
		«R.I.»		1925
10		17 «B.Z.»		1939 m 9
		«R.I.»		1925
11	1941 nov.	22 «B.A.B.»		3, 146
11	1941 nov.	22 «R.I.»		2313
12	1943 feb.	8 «R.I.»		2446
13	1944 mag.	17 «B.A.N.»		10, 438
		«M.P.C.»		152

Pianetino 1194 Aletta.

1	1931 mag.	13 «U.C.»		86
2		17 «A.N.»		254, 309
3		19 »		»
4		20 «U.C.»		86
5		22 »		»
6	giu.	4 »		»
7		12 »		»
8	lug.	3 »		»

9 1931 lug.	14 «U.C.»,	86	24 1946 lug.	26 «U.C.»,	106
10 1932 lug.	31 «R.I.», 659,	«U.C.», 89	25 1948 ott.	4 «Krim. Miss.»,	4, 208
11 1935 gen.	4		26 1951 mag.	8 «M.P.C.»,	598
12	26 «Bol. Ast. Madrid»		<i>Pianetino 1196 Orangia.</i>		
13	29 «R.I.»,	1098			
14 feb.	3 «B.A.B.»,	2, 43	1 1931 mag.	22 «R.I.»,	460, «U.C.», 86
	«R.I.»,	1102		«A.N.»,	244
15	6 «B.A.B.»,	2, 43	2	17 «A.N.»,	254
16	8 «R.I.»,	11	3	19 »	»
17	9 «R.I.»,	1110	4 giu.	3 «U.C.»,	86, «A.N.», 247
18 1936 apr.	27 «U.C.», 97,	«R.I.», 1407	5	11 «U.C.»,	»
19 1938 ott.	22 «A.N.», 269,	«R.I.», 1869	6	18 »	» «A.N.», 247
20 nov.	16 «A.N.», 269,	«R.I.», 1887	7 lug.	3 »	»
21	17 «A.N.», 169,	«R.I.», 1877	8	6 »	»
22 1941 mag.	16 «B.A.N.»,	10, 435	9 1935 sett.	23 «A.J.»,	45, 97, «R.I.»,
	«R.I.»,	2383			1250
23 1943 nov.	3 «R.I.»,	2526			

Ciò posto, possiamo ad esaminare i cinque pianetini.

3. *Pianetino 962 Aslog.* — Il pianetino 962 Aslog, appartenente alla famiglia «Coronis» è stato scoperto il 25 ottobre del 1921 a Königstuhl da Reinmuth e identificato quindi con il pianetino denominato provvisoriamente con la sigla $\Sigma 60$, precedentemente osservato a Simeis nel 1916. Con le osservazioni eseguite a Heidelberg tra il 26 ottobre e il 26 dicembre del 1921, il prof. Stracke ha calcolato la prima orbita ⁽⁷⁾, che è stata più tardi migliorata da Kahrstedt con le opposizioni del 1916-21-28-31 ⁽⁸⁾. Poiché però le perturbazioni erano state calcolate dall'Osservatorio di Cincinnati, con gli elementi dell'orbita preliminare, ho scelto questa come orbita di partenza. Gli scarti ottenuti, rappresentando sull'orbita iniziale perturbata tutte le osservazioni distribuite in sei opposizioni diverse, sono riportate qui appresso:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta x \cos \delta$	—0°.22	—0°.22	—0°.21	—0°.01	—0°.01	—0°.01	—0°.01	+0°.07
$\Delta \delta \dots$	—0°.09	—0°.08	—0°.09	0°.00	0°.00	0°.00	0°.00	+0°.01

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\Delta x \cos \delta$	+0°.10	+0°.58	+0°.42	+0°.40	+0°.37	+0°.36	+0°.37	+0°.36	+0°.36
$\Delta \delta \dots$	+0°.04	+0°.01	+0°.11	+0°.11	+0°.08	+0°.11	+0°.08	+0°.08	+0°.08

(7) Cfr. «A. N.», 217, 377.

(8) Cfr. *Elemente und Grundlagen der Kleinen Planeten*, N. 1.

È singolare il fatto, come è risultato da questa prima rappresentazione (vedi fig. 1), che tutte le osservazioni, eccettuata quella del 1928, cadano presso a poco su uno stesso punto dell'orbita. Poiché le perturbazioni precedenti il 1921 mi sono giunte da Cincinnati in un secondo tempo, ho dovuto effettuare il miglioramento servendomi soltanto delle opposizioni

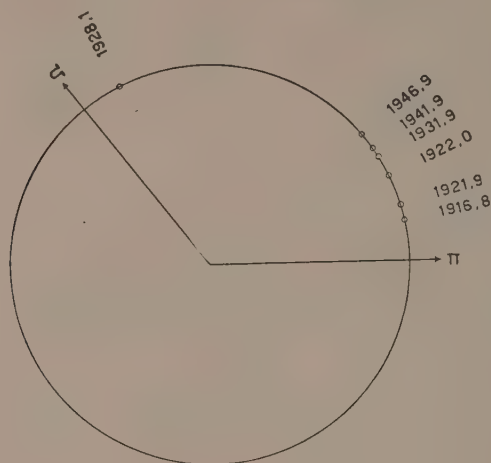


Fig. 1.

del 1921-28-31-41-46. Le 8 osservazioni scelte per il miglioramento mi hanno fornito il seguente sistema:

$$\begin{array}{rcccccc}
 -0.006 \, d\mu & +1.165 \, d\varphi & +1.589 \, d\omega & +1.942 \, M & = & -0.007 \\
 0.015 & 1.455 & 1.488 & 1.818 & = & -0.006 \\
 0.843 & 2.309 & 1.461 & 1.321 & = & 0.575 \\
 1.828 & 1.887 & 1.493 & 1.789 & = & 0.417 \\
 1.812 & 1.888 & 1.481 & 1.773 & = & 0.398 \\
 3.812 & 2.101 & 1.567 & 1.877 & = & 0.368 \\
 3.814 & 2.118 & 1.567 & 1.877 & = & 0.361 \\
 4.621 & 2.247 & 1.566 & 1.821 & = & 0.365 \\
 4.643 & 2.322 & 1.571 & 1.828 & = & 0.362
 \end{array}$$

Le seguenti soluzioni, ottenute dal sistema normale

$$dM = +0^{\circ}.333 \quad d\omega = -0^{\circ}.955 \quad d\varphi = +0^{\circ}.674 \quad d\mu = -0''.0534$$

applicate agli elementi iniziali, forniscono i nuovi elementi:

1950.0							
Epoca ed osculaz.	M_0	μ	φ	a	Ω	ω	
1921-XI-6,5 . . .	19 ^o .382	716'''.412	6 ^o .292	2.9056	145 ^o .884	228 ^o 833	2 ^o .574

con le costanti vettoriali (coseni di direzione dei tre vettori P, Q, R), necessarie a calcolare le effemeridi del pianetino per le future opposizioni:

\bar{P}	\bar{Q}	\bar{R}	
0.966767	— 0.254414	0.025192	
0.245944	0.898598	— 0.363363	1950.0
0.069807	0.357483	0.931306	

La rappresentazione delle osservazioni sulla nuova orbita mi ha fornito gli scarti:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta x \cos \delta$	— 0°.05	— 0°.04	— 0°.04	+ 0°.01	+ 0°.01	+ 0°.01	0°.00	+ 0°.05
$\Delta \delta \dots$	+ 0°.01	+ 0°.04	+ 0°.01	— 0°.01	+ 0°.03	+ 0°.03	+ 0°.03	+ 0°.02

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\Delta x \cos \delta$	+ 0°.03	0°.00	+ 0°.23	+ 0°.21	0°.00	0°.00	— 0°.10	— 0°.10	— 0°.10
$\Delta \delta \dots$	+ 0°.02	+ 0°.16	+ 0°.08	+ 0°.07	+ 0°.02	+ 0°.04	+ 0°.01	+ 0°.01	+ 0°.01

che sono fino a cinque-sei volte maggiori di quelli desiderati. Le osservazioni del 1916 che erano state escluse dal miglioramento, sono risultate abbastanza bene rappresentate. Un tentativo di correggere in un secondo tempo, data la piccola inclinazione del piano orbitale anche gli elementi Ω e i , come pure di ottenere un miglioramento per altra via, mi hanno condotto a risultati dello stesso ordine di quelli sopra riportati. Credo pertanto di poter concludere che la scarsa precisione raggiunta sia dovuta alla particolare disposizione delle osservazioni sull'orbita, per cui le equazioni di condizione risultano quasi tutte eguali tra loro e il sistema praticamente indeterminato.

4. *Pianetino 1558*. — Il pianetino 1558, osservato per la prima volta a Heidelberg nel 1929, è stato osservato successivamente nelle opposizioni del 1937-42-44.

L'orbita preliminare⁽⁹⁾ è stata determinata da Oterma con le osservazioni del 26 dicembre 1941, del 4 febbraio e 14 marzo 1942. Riporto qui il quadro degli scarti delle posizioni osservate da quelle calcolate mediante gli elementi iniziali perturbati:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta x \cos \delta$	— 0°.12	— 0°.09	— 0°.16	— 0°.16	— 0°.15	— 0°.02	0°.00	— 0°.02	— 0°.09
$\Delta \delta \dots$	0°.00	0°.03	0°.08	0°.09	0°.06	0°.01	0°.03	— 0°.01	— 0°.02

Scegliendo una osservazione per ogni opposizione, ho determinato a mezzo del metodo di Tietjen le quantità differenziali:

$$dM = 0''.503 \quad d\omega = - 0''.539 \quad d\varphi = 0''.00074 \quad d\mu = 0''.088$$

9 Cfr. *Elemente und Grundlagen der Kleinen Planeten*, Heidelberg 1949.

che applicate agli antichi, forniscono i nuovi elementi:

					1950.0		
Epoca: JD. 2430200,5 . .	M_0	μ	a	φ	Ω	ω	i
Osculazione: JD. 2430400,5 . .	$32^{\circ}.739$	$0^{\circ}.171253$	3.2115	$4^{\circ}.205$	$111^{\circ}.600$	$299^{\circ}.682$	$10^{\circ}.552$

con le costanti vettoriali:

\bar{P}	\bar{Q}	\bar{R}
0.611827	— 0.772449	0.170268
0.774157	0.540594	— 0.329304
0.162325	0.333291	0.928746

Il confronto con le osservazioni dà i seguenti residui:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta x \cos \delta$	$0^{\circ}.00$	$-0^{\circ}.01$	$-0^{\circ}.01$	$-0^{\circ}.01$	$-0^{\circ}.01$	$-0^{\circ}.02$	$0^{\circ}.01$	$-0^{\circ}.01$	$0^{\circ}.01$
$\Delta \delta$. . .	0 .02	0 .02	0 .03	0 .03	0 .01	0 .01	0 .03	— 0 .01	0 .00

che sono abbastanza soddisfacenti.

5. *Pianetino 1193 Africa*. — Il pianetino Africa fa parte di un gruppo di quattro pianetini, scoperti nel 1931 a Johannesburg da C. Jackson. Con le osservazioni eseguite tra l'aprile e il giugno del 1931 lo stesso Jackson ha calcolato le loro orbite ⁽¹⁰⁾ che, dal 1931, non sono mai state migliorate. In questa Nota riporto il miglioramento delle orbite del pianetino Africa, eseguito con il metodo di Tietjen, del pianetino 1194 Aletta, ottenuto come è stato già detto con il metodo di Eckert e Brouwer e del pianetino 1196 Orangia, per il quale sono stati corretti soltanto la longitudine del perielio dal nodo e il moto medio, poiché esso è stato osservato soltanto in due opposizioni.

Gli scarti ottenuti rappresentando le osservazioni del pianetino Africa sull'orbita iniziale perturbata:

	1	2	3	4	5	6
$\Delta x \cos \delta$. . .	$-0^{\circ}.01$	$0^{\circ}.00$	$-0^{\circ}.01$	$0^{\circ}.00$	$-0^{\circ}.01$	$0^{\circ}.00$
$\Delta \delta$	0 .00	0 .00	0 .00	0 .00	0 .00	0 .00

	7	8	9	10	11	12	13
$\Delta x \cos \delta$. . .	$-0^{\circ}.05$	$-0^{\circ}.06$	$-0^{\circ}.02$	$-0^{\circ}.03$	$+0^{\circ}.33$	$+0^{\circ}.06$	$-0^{\circ}.22$
$\Delta \delta$	+0 .01	— 0 .01	— 0 .01	— 0 .01	+0 .30	0 .00	+0 .10

(10) Cfr. *Elemente und Grundlagen der Kleinen Planeten*, Heidelberg 1949.

si riducono ai seguenti:

	1	2	3	4	5	6
$\Delta x \cos \delta \dots$	+0°.02	+0°.02	+0°.01	+0°.02	+0°.02	+0°.02
$\Delta \delta \dots\dots$	-0°.01	-0°.01	-0°.01	-0°.01	-0°.01	-0°.02

	7	8	9	10	11	12	13
$\Delta x \cos \delta \dots$	+0°.01	0°.00	-0°.03	-0°.03	+0°.08	-0°.03	-0°.02
$\Delta \delta \dots\dots$	-0°.02	-0°.02	+0°.01	+0°.02	+0°.13	+0°.01	+0°.01

apportando agli antichi elementi le correzioni:

$$dM = -0°.552 \quad d\omega = 0°.708 \quad d\varphi = 0°.0368 \quad d\mu = -0''.0768.$$

La nuova orbita è determinata dagli elementi:

					1950.0		
Epoca ed osculaz.	M_0	μ	a	φ	Ω	ω	i
1931-V-16,0...	354°.881	0°.22899	2.64603	7°.069	49°.971	183°.581	14°.168

da cui i coseni direttori:

\bar{P}	\bar{Q}	\bar{R}	
-0.595561	+0.781140	+0.187425	
-0.730771	-0.429940	-0.530212	1950.0
-0.333588	-0.452739	+0.826889	

6. Pianetino Aletta. - O-C sull'orbita iniziale perturbata:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta x \cos \delta$	0°.00	-0°.03	-0°.08	-0°.01	-0°.01	0°.00	0°.00	0°.00	0°.00
$\Delta \delta \dots$	0°.00	-0°.01	0°.00	0°.00	0°.00	0°.00	0°.00	0°.00	0°.00

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\Delta x \cos \delta$	+0°.04	+0°.11	+0°.12	+0°.12	+0°.16	+0°.12	+0°.12	+0°.12	+0°.12
$\Delta \delta \dots$	+0°.02	-0°.04	-0°.05	-0°.05	-0°.05	-0°.05	-0°.02	-0°.04	-0°.01

	19	20	21	22	23	24(*)	25	26
$\Delta x \cos \delta$	+0°.19	+0°.16	+0°.16	+0°.05	+0°.27	+55°.712	+0°.33	+0°.40
$\Delta \delta \dots$	+0°.03	+0°.05	+0°.06	+0°.01	+0°.09	-42°.503	+0°.14	+0°.01

(*) L'osservazione n. 24 evidentemente non appartiene al pianetino Aletta.

correzioni differenziali ottenute da otto opposizioni:

$$\frac{da}{a_{\text{rad}}} = -0.00011587 \quad de = -0.00258 \quad dM_0 = -0.03717$$

$$\psi_{\text{rad}}^x = 2080 \cdot 10^{-8} \quad \psi_{\text{rad}}^y = -22781 \cdot 10^{-8} \quad \psi_{\text{rad}}^z = 78850 \cdot 10^{-8}.$$

Nuovi elementi:

1950.0							
Epoca ed osculaz.	M ₀	μ	a	φ	Ω	ω	i
1931-VI-14,0 . .	56°.53559	0°.198084	2.914542	5°.08219	292°.18319	242°.82120	10°.87790
	P	Q	R				
	— 0.9814001	— 0.0794807	— 0.1747482				
	+ 0.1522240	— 0.8768115	— 0.4561024	1950.0			
	— 0.1169699	— 0.4742197	+ 0.8726017				

rappresentazione delle osservazioni sull'orbita migliorata:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta\alpha \cos \delta$	$-0^{\circ}.03$	$-0^{\circ}.01$	$0^{\circ}.00$	$-0^{\circ}.01$	$-0^{\circ}.01$	$-0^{\circ}.01$	$0^{\circ}.00$	$0^{\circ}.00$	$-0^{\circ}.03$
$\Delta\delta \dots$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Elementi:

Epoca ed osculaz.	M_0	μ	a	φ	1950.0		
					Ω	ω	i
1931-VI-15 . . .	$1^{\circ}.309$	$0^{\circ}.290673$	2.25701	$11^{\circ}.558$	$281^{\circ}.589$	$326^{\circ}.599$	$7^{\circ}.172$

\bar{P}	\bar{Q}	\bar{R}
-0.367354	$+0.922004$	-0.122303
-0.823611	-0.383571	-0.417778
-0.432107	-0.052738	$+0.900280$

Astronomia. — *Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole.* Nota V ed ultima^(*) di MASSIMO CIMINO, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Termino con la presente Nota questo primo studio sulla variazione del profilo delle righe del tripletto infrarosso del calcio ionizzato⁽¹⁾.

9. INTENSITÀ CENTRALI E LORO VARIAZIONE DAL CENTRO AL LEMBO. — Il tripletto infrarosso del Ca^+ deriva dalle transizioni $3^2\text{D}-4^2\text{P}$; alle 3 righe: (I) = λ 8498, (II) = λ 8542, (III) = λ 8662 la teoria assegna le intensità relative $I:9:5$ ⁽²⁾.

Cominciamo col discutere le intensità *centrali* delle righe — dette anche *intensità residue* — per gli spettri del *centro* del Sole. La teoria delle intensità residue non è semplice⁽³⁾; brevemente si può dire che l'intensità centrale della riga spettrale è fortemente influenzata dal modo con il quale l'energia assorbita dagli atomi dell'atmosfera solare viene a sua volta riemessa; si abbia cioè semplice assorbimento selettivo e riemissione termica secondo la legge di Kirchhoff-Planck, ovvero si abbia anche assorbimento continuo e diffusione, o soltanto quest'ultima. L'intensità centrale non dipende invece, sensibilmente, dalla stratificazione dell'atmosfera solare. Nel caso della sola

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1953.

(1) Per le Note precedenti cfr. questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. IX, pp. 177-181; vol. XIII, pp. 120-126; vol. XIV, pp. 243-250 e pp. 500-505.

(2) Cfr. A. UNSÖLD, *Physik der Sternatmosphären*. Springer, Berlin 1938, p. 192.

(3) Cfr. A. UNSÖLD, loc. cit., pp. 301 e sg.

diffusione, la teoria dimostra che l'intensità centrale della riga dovrebbe essere *nulla*; nel caso opposto del solo assorbimento selettivo e riemissione termica l'intensità centrale è invece una funzione di λ e precisamente: le intensità residue in funzione di λ rappresentano le intensità dello spettro *continuo* fotosferico al lembo.

Naturalmente nella spiegazione delle intensità residue delle righe è necessario tener presente anche l'effetto *Doppler* derivante dalla turbolenza dell'atmosfera solare, che potrebbe portare ad un notevole aumento nelle intensità centrali. Di questo effetto hanno trattato molti autori ⁽⁴⁾, ma sembra potersi trascurare in una prima discussione ⁽⁵⁾. Ponendoci allora nell'ipotesi del puro assorbimento selettivo, una riga di λ 8500 dovrebbe presentare, al centro del Sole, una intensità residua dell'ordine del 40 % ⁽⁶⁾; le intensità osservate per il Ca^+ nell'infrarosso sono invece assai minori, pur non essendo nulle. Bisogna dunque ammettere che i due meccanismi di riemissione agiscano contemporaneamente, e che il rapporto: $\chi_\lambda/\sigma_\lambda$ dei coefficienti di assorbimento selettivo χ_λ e diffusione σ_λ conservi un valore finito e diverso fa zero ⁽⁷⁾. Nel seguente specchio sono riportate le intensità residue osservate al centro del Sole, e per confronto quelle tratte dal *Photometric Atlas*... del Minnaert e quelle ottenute dall'Houtgast ⁽⁸⁾; infine sono dati anche i limiti teorici entro cui dette intensità dovrebbero cadere ⁽⁹⁾. Tutte le intensità sono espresse in *percento* dell'intensità dello spettro continuo.

Intensità centrali per lo spettro del centro del Sole.

RIGA:	(I)	(II)	(III)
CIMINO:	27.3	15.5	18.1
MINNAERT:	28.0	19.4	22.0
HOUTGAST:	33.9	24.8	26.2
TEORIA:	0.17 — 24.8	0.06 — 10.6	0.07 — 11.4

Veniamo ora alle variazioni centro-lembo delle intensità residue. Nella ipotesi che il rapporto $\chi_\lambda/\sigma_\lambda$ sia piuttosto piccolo, le intensità residue $I_c(\delta)$ riferite all'intensità $I_o(\delta)$ del fondo continuo possono essere rappresentate dalla formula approssimata:

$$(1) \quad \frac{I_c(\delta)}{I_o(\delta)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \delta\right)}{1 + \beta_o \cos \delta} \cdot \sqrt{\frac{\chi_\lambda}{\sigma_\lambda}} + \dots; \quad \frac{\chi_\lambda}{\sigma_\lambda} \ll 1$$

(4) Cfr. per esempio R. O. REDMAN in *Monthly Notices R. A. S.*, vol. 97, p. 552 (1937).

(5) J. HOUTGAST, *The variations in the profiles, etc.*, Utrecht, p. 129 (1942).

(6) Cfr. A. UNSÖLD, loc. cit., p. 304.

(7) Non sarà inutile ricordare che le intensità residue osservate sono sempre affette da una certa incertezza a causa principalmente del limitato potere risolutivo degli spettrografi, e poi anche per la luce diffusa e il profilo strumentale. Per le righe più intense però quest'ultima causa è presumibilmente meno importante. Queste sorgenti di errori tendono ad aumentare l'intensità osservata.

(8) J. HOUTGAST, loc. cit., pp. 74-78.

(9) A. UNSÖLD, loc. cit., p. 303 e sg.

β_0 , essendo il coefficiente di oscuramento al bordo solare. Le I_c/I_0 osservate in funzione di $\cos \delta$ sono rappresentate nella fig. 6.

Poiché una discussione sui valori da adottare per la costante β_0 porterebbe troppo lontano, basterà in questa sede assumere $\beta_0 = 3/2$ — che è un valore medio generalmente adottato — oppure $\beta_0 = 0.75$, più appropriato per l'infrarosso intorno a $\lambda 8500$ (10). Dalla (1), per $\cos \delta = 1$ (centro) e pren-

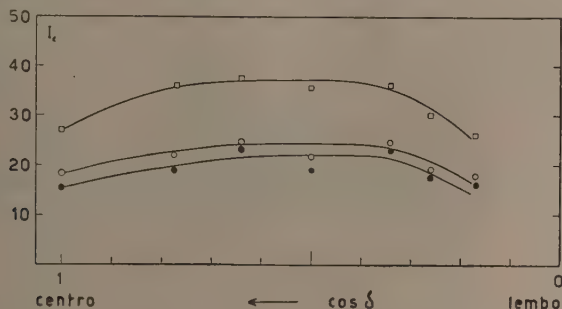


Fig. 6. — Variazione centro-lembo delle intensità centrali osservate.

□ $\text{Ca}^+ \lambda 8498$; ● $\text{Ca}^+ \lambda 8542$; ○ $\text{Ca}^+ \lambda 8662$

dendo le intensità dallo specchio precedente, abbiamo allora:

RIGA:	(I)	(II)	(III)
$\sigma_\lambda/\chi_\lambda$ ($\beta_0 = 1.5$):	17.8	55.4	40.6
$\sigma_\lambda/\chi_\lambda$ ($\beta_0 = 0.75$):	36.3	113.3	82.8
TEORIA:	24.6 — $0.9 \cdot 10^6$	187 — $7.0 \cdot 10^6$	158 — $5.9 \cdot 10^6$

i limiti teorici essendo calcolati secondo la teoria dell'Unsöld. Si vede che i valori del rapporto $\sigma_\lambda/\chi_\lambda$ ricavati dalle osservazioni sono quasi sempre più piccoli di quanto la teoria prevede come limiti inferiori, e ciò potrebbe essere attribuito a uno speciale comportamento dei più alti livelli dell'atmosfera solare (11).

10. LE ALI DELLE RIGHE E LA LORO VARIAZIONE CENTRO-LEMBO. — Mentre le intensità centrali delle righe di Fraunhofer sono poco influenzate dal tipo di stratificazione adottato per l'atmosfera solare, lo è invece in modo sensibile il comportamento centro-lembo delle ali. Per semplicità ci riferiremo ai due classici modelli di Schuster-Schwarzschild e di Milne-Eddington; nel primo i rapporti χ_λ/χ e σ_λ/χ tra i coefficienti χ_λ e σ_λ di assorbimento selettivo e di diffusione ed il coefficiente χ di assorbimento continuo vanno assai rapidamente crescendo nelle zone più esterne dello strato inver-

(10) Secondo HOUTGAST, loc. cit., p. 101.

(11) Questo comportamento del tripletto infrarosso del Ca^+ è stato osservato anche dall'HOUTGAST. Il confronto coi valori di questo autore è però piuttosto complesso, avendo egli adottato valori differenti per β_0 nelle 3 righe ed una formula un po' diversa dalla 1.

tente $[\chi_\lambda, \sigma_\lambda \gg \chi]$; nel secondo invece è $\chi \neq 0$, e sono costanti nello strato invertente i due suddetti rapporti ⁽¹²⁾.

Dalla Tabella III (Nota III), è facile seguire, per ogni zona delle ali, le variazioni di intensità dal centro al lembo. Riferiamoci allora alle zone più lontane dal centro della riga, e poniamo:

$$r_\lambda(\delta) = 1 - \frac{I_\lambda(\delta)}{I_0(\delta)},$$

che è detta: *profondità dell'ala*. Per valori di $r_\lambda \leq 10\%$ circa, la (2) si può notoriamente scrivere:

$$r_\lambda(\delta) = \frac{C_\delta}{\Delta\lambda^2}.$$

La costante C_δ fornisce una misura della depressione dell'ala. Nel nostro caso si sono ottenuti ⁽¹³⁾ i valori della seguente:

TABELLA IV.

Valori delle C_δ .

sen $\delta = r/R$ Riga	0.000	0.643	0.766	0.866	0.940	0.966	0.985	Houtgast 0.000
λ 8498	0.33	0.27	0.31	0.28	0.18	0.16	0.19	0.27
λ 8542	2.13	1.77	2.07	1.97	1.13	1.07	—	1.86
λ 8662	0.96	0.81	0.90	0.70	0.54	0.46	0.43	1.05

Osserviamo che i valori osservati delle C_δ relative alla riga (II) e la riga (I), alla (III) e la (I), alla (III) e la (II) — *per stesso valore di δ* — stanno tra loro rispettivamente come 6.7 : 1, 2.8 : 1, 2.3 : 1 [rapporto delle intensità delle righe 9 : 1, 5 : 1, 1.8 : 1; Houtgast 6.9 : 1, 3.9 : 1, 1.8 : 1]. Occorre però tener presente che la determinazione delle C_δ è sempre affetta da un errore che può essere anche notevole. Eseguito poi, per ciascuna riga separatamente, i rapporti C_δ/C_0 , ($C_0 = C_\delta$ per $\delta = 0$, e cioè per lo spettro del centro) e facendo la media dei 3 valori per ogni δ , otteniamo la rappresentazione della figura 7. In questa sono state disegnate 3 curve teoriche calcolate per $\beta_0 = 0.75$ e relative al modello di Milne-Eddington, con pura diffusione (curva a tratto pieno), con puro assorbimento (tratteggiata, al mo-

(12) Un modello più complesso — che comprende i due classici come casi limite e nel quale si tiene conto anche della diffusione *non coerente* — è dato dall'HOUTGAST nel loc. cit. La discussione con questo modello è però utile quando si disponga di un materiale di osservazione molto ricco, ed esula dai limiti del presente lavoro.

(13) Con un procedimento grafico, sfruttando i valori di r compresi tra il 3 e il 10% circa. Questi valori non possono mai vantare molta precisione!

dello di Schuster-Schwarschild con pura diffusione (punteggiata) e con puro assorbimento (tratto-punto). Come si vede, il modello M. E. sembra soddisfare alle osservazioni, conformemente a quanto trovato anche dallo Houtgast per questo tripletto ⁽¹⁴⁾.

II. INTENSITÀ E LARGHEZZA EQUIVALENTI: CONFRONTO CON LA TEORIA. — Come è noto la larghezza equivalente di una riga spettrale è largamente indipendente dal potere risolutivo dello spettrografo; essa costituisce quindi un dato più preciso che non quelli deducibili dalla forma dei profili.

Disegnati i profili delle righe a larga scala ⁽¹⁵⁾, è stato facile valutare l'area racchiusa tra il profilo ed il fondo continuo; per quanto riguarda i pochi e modesti *blends*, essi sono stati eliminati graficamente. Occorre però

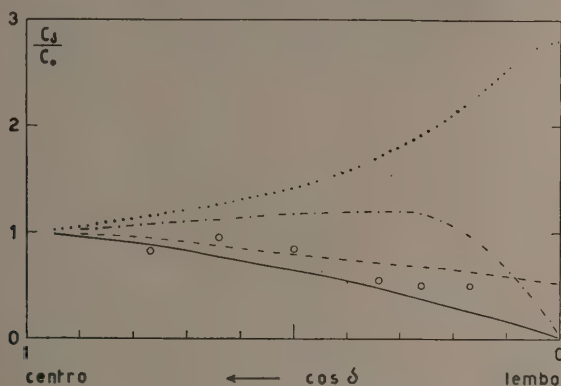


Fig. 7. - Variazione centro-lembo della costante C.

— Modello M. E. per assorbimento; - - - - - Modello M. E. per diffusione coerente;
 Modello S. S. per assorbimento; - Modello S. S. per diffusione coerente;
 O Valori osservati (medie delle tre righe).

notare che con tale procedimento il contributo all'area dell'estrema ala è sempre incerto. Convienne allora applicare il metodo fino a tanto che le intensità non superano il 95 % circa, e valutare poi il contributo dell'estrema ala con la ben nota formula extrapolatrice del Minnaert:

$$w_a = \sqrt{C_\delta} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{C_\delta}} \right)$$

[C_δ = costanti calcolate al n. 10; $\Delta\lambda$ = distanza del centro del punto dell'ala in cui l'intensità è il 95 % circa; w_a = contributo all'area di una sola ala]. Si intende che l'area è misurata in unità arbitrarie; dividendole allora per l'area che corrisponde all'energia di 1 Å di spettro continuo (misurato nelle stesse unità), otteniamo la vera intensità della riga, cioè l'ammontare dell'energia scomparsa per l'assorbimento; essa è detta anche larghezza

(14) Cfr. J. HOUTGAST, loc. cit., p. 109.

(15) Per la riproduzione di questi disegni vedi la Nota IV.

equivalente, poiché rappresenta la larghezza di una riga fittizia a profilo rettangolare e altezza uguale a quella del fondo continuo (assorbimento totale), che produce lo stesso assorbimento della riga osservata. Indicando con W_δ la larghezza equivalente, abbiamo ottenuto la seguente:

TABELLA V.

Larghezze equivalenti W_δ .

sen $\delta = r/R$ Riga	0.000	0.643	0.766	0.866	0.940	0.966	0.985	Houtga-t 0.000
λ 8498	1.409	1.141	1.219	1.073	0.860	0.897	0.933	1.250
λ 8542	3.722	3.103	3.221	3.008	2.100	2.272	0.267	3.295
λ 8662	2.286	2.075	2.105	1.864	1.596	1.634	1.613	2.500

Chiamiamo con N il numero *medio* di atomi assorbenti o diffondenti per cm^3 di atmosfera solare, con H l'altezza (equivalente) dell'atmosfera stessa e con f un coefficiente che dipende dai numeri quantici che originano la riga. Il prodotto NH rappresenta allora il numero di atomi che insistono sopra 1 cm^2 di fotosfera, mentre NHf sarà il *numero di oscillatori fittizi* che effettivamente contribuiscono a formare la riga. Assumendo come costanti in tutto lo strato i coefficienti di assorbimento e di diffusione, è facile esprimere ⁽¹⁶⁾ la larghezza equivalente della riga in funzione del numero degli oscillatori fittizi. Qui ci limitiamo ad osservare che, per le righe spettrali che stiamo studiando, è trascurabile in una prima approssimazione l'allargamento $\Delta_o \lambda$ dovuto all'effetto Doppler rispetto alla semi-ampiezza $\Delta \lambda_N$ della riga. Infatti quest'ultima risulta, per le tre righe rispettivamente: 0.97 Å; 1.82 Å; 1.05 Å; mentre per l'allargamento Doppler, applicando la formula (per λ 8500) ⁽¹⁷⁾:

$$\Delta_o \lambda = 7.16 \cdot 10^{-7} \lambda \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

[T = temperatura assoluta = 5700° ; μ = peso atomico dal calcio = 40.07], si ottiene: $\Delta_o \lambda = 0.067 \text{ Å}$. Il legame tra la larghezza equivalente ed il numero degli oscillatori fittizi può essere allora rappresentato dalla:

$$W = K \sqrt{NHf} \quad , \quad K = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{\pi e^2}{mc^2}} \lambda \cdot 10^3$$

con: $K = 12.3 \times 10^{-9}$.

(16) Cfr. per esempio A. UNSÖLD, loc. cit., p. 265 e sg.

(17) Cfr. per esempio, A. UNSÖLD, loc. cit., p. 158.

Assumendo per W le larghezze equivalenti trovate per il centro del disco solare, otteniamo per le tre righe i valori di NHf :

RIGA:	(I)	(II)	(III)
NHf :	1.3×10^{16}	9.2×10^{16}	3.4×10^{16}

Sarà poi facile, come applicazione, calcolare a partire da questi dati fondamentali le altre grandezze, quali i coefficienti di assorbimento, le profondità ottiche, ecc., alle diverse distanze dal centro del disco solare ⁽¹⁸⁾.

In conclusione, ho il piacere di ringraziare l'Istituzione degli Osservatori di Monte Wilson e Monte Palomar per l'ospitalità concessami, ed il dott. B. S. Nicholson per l'appoggio durante la raccolta del materiale spettroscopico alla Torre Solare di Monte Wilson; il prof. Trabacchi, dell'Istituto Superiore di Sanità in Roma, per avermi permesso di usufruire del microfotometro registratore di Zeiss di dotazione del Laboratorio da lui diretto.

Astronomia. — *Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952.* Nota I ^(*) di MASSIMO CIMINO, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

I. Della spedizione scientifica inviata a Khartoum dall'Osservatorio Astronomico di Roma e dei risultati preliminari ottenuti ho già parlato in altre mie Note ⁽¹⁾. Mi limiterò perciò a ricordare che il programma astronomico comprendeva lo studio fotometrico e polarimetrico della corona solare, e specialmente della corona *esterna* e dei *pennacchi*. Lo scopo della presente Nota (e di un'altra conclusiva che seguirà tra breve), è ora quello di rendere conto dei metodi impiegati nelle misure e, infine, dei risultati ottenuti.

Come è noto, la luce che proviene dalla corona solare appare parzialmente polarizzata, con direzione di polarizzazione (direzione del vettore magnetico) approssimativamente radiale. Non si possiede però, fino ad oggi, un materiale di osservazione sufficiente per poter concludere con sicurezza in qual misura la percentuale della luce coronale polarizzata vari con la lunghezza d'onda, mentre rimane assai incerta la sua dipendenza dalla distanza dal bordo solare. In realtà sono molti i fattori, — e alcuni di essi variabili nel

(18) ERRATA-CORRIGE. — Nota I, *passim*: invece di *reticolo n. 66 di Rowland*, leggi *reticolo n. 66 di Michelson*. Nota III, p. 247, riga 11 (dall'alto): invece di *4.608*, leggi *5.608*.

(*) Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1953.

(1) Cfr. M. CIMINO, *La spedizione scientifica dell'Osservatorio Astronomico di Roma a Khartoum (Sudan) per l'eclisse totale di sole del 25 febbraio 1952. Risultati preliminari*. Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XIII, pp. 26-33; M. CIMINO, *Osservazioni della forma della corona e dei raggi coronali dell'eclisse totale, ecc.*, « Atti dell'XI Convegno Volta », Acc. Naz. dei Lincei, 1953. Per altre notizie sulla spedizione dell'Osservatorio Astronomico di Roma, cfr. anche: M. CIMINO, *Fotografie ed impressioni sull'eclisse totale di sole, ecc.*, « Coelum », vol. XX, pp. 118-122.

tempo, —, che concorrono nel fenomeno. Per entrare più a fondo nella questione, occorre però ricordare alcuni fatti fondamentali.

La luce della corona solare è luce diffusa in prevalenza da elettroni liberi; negli strati più esterni e nei pennacchi non manca però una percentuale di luce diffusa da atomi o molecole, tanto maggiore quanto più ci si allontana dal bordo. Per quello che riguarda gli elettroni liberi ⁽²⁾, questi danno luogo ad una diffusione *non selettiva*, talché la luce coronale ha tutte le caratteristiche sostanziali della luce fotosferica, ma con la differenza che nella corona più interna scompaiono le righe di Fraunhofer, a causa dell'elevata agitazione termica degli elettroni [effetto Doppler per una temperatura cinetica dell'ordine di 10^6]. Sia la diffusione, che la conseguente polarizzazione della luce da parte dell'elettrone libero è una conseguenza della natura elettromagnetica dell'onda luminosa. Indicando con φ l'angolo che il raggio incidente sull'elettrone forma col raggio diffuso nella direzione dell'osservatore, tutto va come se quest'ultimo ricevesse *due* onde sovrapposte, rispettivamente di intensità:

$$(1) \quad I_r = S \quad ; \quad I_t = S \cos^2 \varphi$$

la prima indipendente da φ e linearmente polarizzata nel piano dei due raggi (che contiene perciò il vettore magnetico), la seconda pure linearmente polarizzata, ma nel piano ortogonale. Per $\varphi = 0^\circ$ (osservatore situato nella direzione del raggio incidente) le due componenti hanno la stessa intensità e saranno completamente incoerenti tra di loro, trattandosi di luce naturale; invece per $\varphi = 90^\circ$ (osservatore sulla normale al raggio incidente), si ha soltanto la prima componente completamente polarizzata. Si comprende che nelle posizioni intermedie si avrà una componentè naturale ed una polarizzata linearmente (sempre nel piano dei due raggi). Definiamo *grado di polarizzazione* il rapporto:

$$(2) \quad p = \frac{I_r - I_t}{I_r + I_t}.$$

Nel caso semplice che ora stiamo trattando si ha per le (1):

$$(3) \quad p = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}.$$

Questa semplicissima formula potrebbe presentare una applicazione allo studio dei raggi coronali, qualora questi fossero molto sottili, diretti radialmente e si potesse supporli illuminati soltanto da una zona fotosferica o cromosferica ristretta (rispetto alla loro lunghezza) intorno alla loro base; condizioni, queste, che sono verificate in realtà soltanto per i tratti più esterni, e sempre approssimativamente. La misura delle due componenti I_r ,

(2) Lo stesso può dirsi, in generale, anche di atomi e molecole con più elettroni, quando le reciproche distanze di questi sono abbastanza piccole rispetto alla lunghezza dell'onda incidente, cosicché essi possano oscillare sincronicamente senza però presentare fenomeni di risonanza; nel quale ultimo caso si cade nel fenomeno della diffusione di risonanza, che produce un effetto analogo allo assorbimento selettivo (righe spettrali).

(polarizzazione radiale) e I_t (polarizzazione trasversa) darebbe subito p e quindi (attraverso φ) una indicazione sulla direzione *nello spazio* del raggio coronale [di cui noi osserviamo direttamente la proiezione sul piano tangente alla sfera celeste]. In realtà la forma e l'illuminazione del raggio coronale sono molto più complesse, poiché esso si svolge su linee curve (generalmente rivolte verso l'equatore solare), spesso presenta una base assai estesa (il pennacchio a N-E, da me fotografato nell'ultima eclisse fino ad una distanza dal bordo di oltre 3 diametri solari, presenta una base apparente di circa 70°) ed è illuminato da estese zone della superficie solare. Il calcolo dell'indice di polarizzazione p va fatto allora — come è facile intuire — sommando per ogni zona della corona apparente i contributi alle I_r e I_t di tutti gli elementi spaziali che si trovano allineati con la visuale prescelta, e che sono a loro volta illuminati da (quasi) tutta una semisfera solare. In questo caso va anche tenuto conto dell'oscuramento al bordo. Le (1) vanno precisate; in esse si porrà (sempre sulla base della teoria elettromagnetica dell'elettrone libero investito da un'onda luminosa):

$$(4) \quad S = 2 \pi \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \cdot \alpha^2 \cdot S_0,$$

essendo S_0 l'intensità *totale* dell'onda incidente sull'elettrone, $\omega/2\pi$ la sua frequenza, c la velocità della luce ed α un coefficiente detto: *potere di polarizzazione* della particella diffondente. Nel caso degli elettroni liberi si ha la nota formula del Thomson:

$$(5) \quad \alpha = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) \cdot \mathfrak{N} = 0.66 \times 10^{-24} \cdot \mathfrak{N},$$

\mathfrak{N} essendo il numero delle particelle diffondenti per cm^3 . Sia \mathfrak{N} che S_0 vanno intese (nelle integrazioni che portano alle I_r e I_t) come funzioni del posto.

In generale, sia per \mathfrak{N} che per S_0 si assumono delle ipotesi; in prima approssimazione si può supporre \mathfrak{N} funzione soltanto della distanza r dal centro del sole (o dell'altezza h sulla fotosfera). Si conoscono diverse di tali espressioni ⁽³⁾, ricavate per via sperimentale dalle osservazioni della brillantezza della corona. Ma poiché la presente ricerca vuole mantenere un carattere sperimentale, noi non entreremo in particolari, contentandoci del cenno teorico fatto, da servire come orientamento generale nel problema.

2. Il mio compito era quello di determinare, durante l'eclisse, la brillantezza apparente nelle varie zone della corona (con speciale riguardo a quella esterna e ai pennacchi), nonché l'indice di polarizzazione. Per il primo scopo

(3) Cfr. per esempio A. UNSÖLD, *Physik der Sternatmosphären*, Springer, Berlin, 1938, p. 340 e sg. Una prima (grossolana) approssimazione si ha ponendo $\mathfrak{N}(r) \approx 1/r^n$; risulta allora:

$$p = \frac{n+1}{n+3} \cdot 100\%,$$

cioè costante. Per $n=0$ si ha: $p=33\%$; per $n=2$, $p=60\%$; per $n=3$, $p=75\%$, che danno un'idea del grado di polarizzazione.

ho fatto 3 pose contemporanee di 10^s con le tre camere descritte nella mia citata Nota, provviste di diaframmi (luminosità: $1/4.5$; $1/7.6$; $1/16.5$); la prima risultò troppo posata, le altre due buone. Per la polarizzazione ho eseguito 9 terne di esposizioni contemporanee con le camere tutte alla massima apertura ($1/4.5$); 4 terne coi soli polaroidi avanti all'obiettivo [*Polar-screens Kodak*] e 5 con polaroidi e filtri gialli [*Kodak Wratten K 2*], con tempi variabili tra $1/3$ di secondo e 1 minuto [cfr. Tabella I]. Sono risultate bene utilizzabili 6 terne, le altre 3 essendo troppo posate o un poco mosse.

Gli assi di polarizzazione dei polaroidi erano inclinati tra di loro di 120° e precisamente:

CAMERA N. 1: *asse di polariz. 100° verso E dal cerchio orario;*

CAMERA N. 2: *asse di polariz. 220° verso E dal cerchio orario;*

CAMERA N. 3: *asse di polariz. 340° verso E dal cerchio orario.*

La direzione dell'asse di polarizzazione della camera n. 3 era stata scelta in modo da coincidere con quella dell'asse polare solare al momento dell'eclisse. È facile provare che dalle 3 pose contemporanee, non solo si può ri cavare l'indice di polarizzazione, ma è anche possibile verificare la direzione di polarizzazione. Se I_1 , I_2 , I_3 sono le intensità osservate in punti corrispondenti delle tre pose, si hanno le formule:

$$(6) \quad \tan 2\lambda = \sqrt{3} \frac{I_3 - I_2}{2I_1 - I_2 - I_3}$$

ove λ dà la direzione dell'asse di polarizzazione contato (in senso antiorario) dalla direzione di polarizzazione della camera n. 1; mentre si ha per il grado di polarizzazione:

$$(7) \quad p = 2 \frac{\sqrt{I_1(I_1 - I_3) + I_2(I_2 - I_1) + I_3(I_3 - I_2)}}{I_1 + I_2 + I_3}$$

Nella Tabella I sono date le principali caratteristiche delle pellicole da me ottenute; ricorderò (cfr. la mia citata Nota) che si tratta di pellicole Ferrania, Superpancro P. 3, 17/10, a grana molto fine appositamente fabbricate dalla Ditta per la nostra spedizione. Data la forte escursione luminosa nella corona - [come ordine di grandezza, si può assumere sull'asse polare in direzione N un salto di 4.5 grandezze stellari tra una distanza dal bordo di 0.1 ed una di 1.2 raggi solari] - e per ottenere le più deboli sfumature e gli estremi particolari dei pennacchi, ho trovato conveniente adoperare uno sviluppo molto morbido, il D-25 *Kodak*, per 12^m a 17° in media. Si intende che ogni gruppo di 3 pose contemporanee è stato sviluppato contemporaneamente nella stessa *tank* assieme alla pellicola di calibrazione ⁽⁴⁾. Questa ultima fu fatta esponendo una pellicola dello stesso tipo ai raggi solari attraverso un cuneo fotometrico ed opportuni filtri fotografici per ridurre l'inten-

(4) Uno speciale dispositivo era stato ideato, atto a tagliare al giusto punto le lunghissime pellicole prima dello sviluppo. I pezzi di pellicola ottenuti (del formato 9×12) venivano poi fissati in opportuni telai di celluloidi, per essere infine immersi nella *tank*.

sità della luce. I tempi di posa per la calibrazione furono sempre gli stessi di quelli delle pose della corona.

TABELLA I.
Caratteristiche delle pellicole.

Num. della pellicola	Tempo dal II contatto	Tempo di posa	Rapporto focale Polaroidi - Filtri	Osservazioni
1, 2, 3	— 2 ^s	0 ^s .3	1/4.5 ; 1/7.6 ; 1/16.5	Gocce di Baily; corona ben visibile a W
4, 5, 6	+ 5	10.0	1/4.5 ; 1/7.6 ; 1/16.5	n. 4 troppo densa
7, 8, 9	+ 23	0.3	1/4.5 + Polaroidi	
10, 11, 12	+ 30	2.0	» »	
13, 14, 15	+ 37	7.0	» »	
16, 17, 18	+ 48	20.0	» »	Dense
19, 20, 21	+ 75	60.0	1/4.5 + Polar. + WK 2	Dense, un po' mosse
22, 23, 24	+ 140	15.0	» » »	
25, 26, 27	+ 160	4.0	» » »	
28, 29, 30	+ 169	0.3	» » »	n. 30 mediocre
31, 32, 33	+ 188	0.3	» » »	

N. B. - Le tre pose di ciascuna serie si riferiscono rispettivamente alle camere nn. 1, 2, 3. Il tempo della 2^a colonna si riferisce all'inizio della posa.

3. Per la misura delle densità fotografiche ho seguito due sistemi. Alcune lastre sono state misurate con un microfotometro registratore, tracciando due serie di profili fotometrici equidistanti in due direzioni ortogonali. Poiché questo metodo si dimostrava assai laborioso, esso è stato mantenuto come metodo di controllo e per lo studio di zone particolari dei pennacchi. Per la misura delle altre lastre - ed anche in vista di altre applicazioni -, si pensò di costruire un tracciatore automatico di isofote.

L'idea di una tale strumento non è nuova, ed esistono diversi tentativi del genere, che peraltro non mi risulta che abbiano avuto larga applicazione astronomica. Citerò soltanto l'idea di H. W. Babcock, che adopera due oscillografi in parallelo, uno dei quali esplora l'immagine, e l'altro, - il raggio elettronico essendo comandato, per la sua accensione, da un opportuno circuito -, traccia l'isofota. Ma all'atto pratico questo sistema, - da me proposto per un esame ai proff. R. Cialdea e P. Dominici dell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma -, si dimostrò non privo di inconvenienti

(specialmente per la stabilità nell'intensità del raggio esplorante) e non adatto, - almeno nella forma proposta dall'ideatore - a misure di precisione; tanto che gli sperimentatori pensarono di battere una via del tutto nuova. Col consenso dei due suddetti autori darò qui un brevissimo cenno dei principi sui quali è basato lo strumento, che viene descritto in altra sede⁽⁵⁾; comincerò con la parte elettrica, che è la più interessante.

Una cella fotoelettrica (fotomoltiplicatore 931 A) esplora il fotogramma punto per punto. Il segnale da essa generato viene confrontato, per mezzo di un sistema a ponte, con una tensione costante e prefissata in relazione ad una certa densità ottica. L'uscita del ponte, amplificata di nuovo, comanda un tubo al neon, che risulta acceso *soltanto* quando il ponte è in equilibrio, cioè quando la densità della zona esplorata del fotogramma produce un segnale di tensione uguale a quella prefissata. La lampada rimane invece spenta quando il segnale sia comunque diverso. Il dispositivo - che risulta estremamente sensibile e molto stabile -, permette di tracciare isofote con un intervallo (per densità normali di ≈ 0.6) dell'ordine di un centesimo di densità.

Nella prossima Nota II dirò della parte ottico-meccanica dello strumento, assieme ai risultati ottenuti nella misura delle lastre dell'eclisse.

Astronomia. — *Determinazioni di ascensione retta dei pianetini Vesta e Cerere e del pianeta Urano.* Nota^(*) di MARIO CASTELLANO e RICCARDO BARBATELLI, presentata dal Socio L. CARNERA.

Nel periodo che va dall'aprile 1952 al marzo 1953 furono osservati Vesta, Cerere ed Urano, con lo strumento dei passaggi invertibile di Bamberg, del tipo abituale, munito di un obbiettivo di mm. 90 di apertura e cm. 91 di distanza focale e di livella per l'asse orizzontale avente la sensibilità di 0.0757 per ogni parte. È munito inoltre di micrometro impersonale del tipo abituale.

Prima e dopo l'osservazione di ogni singolo astro, si è proceduto alla lettura della livella; insieme con i pianeti si sono osservate un certo numero di stelle fondamentali del FK₅ e tra di esse una circumpolare, per poter ricavare con la correzione dell'orologio anche l'azimut strumentale.

Dopo aver ricavato così sera per sera le A. R. dei pianeti, si è dedotto dalle effemeridi «The American Ephemeris and Nautical Almanac» 1952 e 1953 il corrispondente valore calcolato, tenendo conto delle differenze prime e seconde.

Le coordinate delle stelle di confronto sono state ricavate dal: «Apparent Places of Fundamental Stars» del 1952 e 1953.

(5) Cfr. «Annali di Geofisica», 1953 (in corso di stampa).

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1953.

Per Vesta furono:

Ne	1 H. Draconis	1272	46 Leonis
374	19 Leonis Min.	403	35 H. Ursae Maj.
1259	P. 9 ^h 229 U. Maj.	1286	11 G. Crateris
384	ζ Leonis		

Per Cerere:

162	δ Tauri	N γ	B. D. + 85°74 Ceph.
164	ε Tauri	211	ζ Tauri
1135	97 Tauri		

Per Urano:

1168	k Aurigae	294	k Geminorum
1170	7 Monocerotis	296	π Geminorum
250	51 Aurigae	1205	ζ Canis Minoris
254	ε Geminorum	1208	1 Cancrì
261	θ Geminorum	307	27 Lyncis
1181	101 G. Mono	312	β Cancrì
N d	51 H. Cephei	314	31 Lyncis
292	24 Lyncis	1222	29 Cancrì

Indicando con O—C la differenza tra il valore osservato e quello calcolato, si possono scrivere le seguenti tabelle:

TABELLA I (Vesta).

Data ed ora di T. U.				A. R.	O—C	N. stelle confronto	Oss.
1952 apr.	8	20 ^h 17 ^m 51 ^s	. . .	10 ^h 22 ^m 58 ^s .80	+ 0 ^s .24	4	B
	9	13	42 . . .	22 46 .74	+ .35	5	B
	10	09	36 . . .	22 36 .33	+ .27	5	B
	20	19	30 14 . . .	22 32 .54	+ .15	5	B
	22	22	43 . . .	22 53 .33	+ .26	7	B
	29	18	57 17 . . .	24 59 .17	+ .12	7	B
	30	53	45 . . .	25 23 .79	+ .18	7	B
mag.	2	46	48 . . .	26 17 .57	+ .14	6	B

TABELLA II (Cerere).

Data ed ora di T. U.	A. R.	O—C	N. stelle confronto	Oss.
1952 nov. 7 1 02 16 . . .	5 00 03 .76	— 0 .09	5	B
12 0 39 08 . . .	4 56 34 .82	+ .03	5	B
13 34 26 . . .	55 48 .81	.00	4	B
29 23 12 01 . . .	40 11 .81	— .08	5	B
dic. 1 22 58 12 . . .	38 10 .14	— .16	1	B
10 13 44 . . .	29 03 .43	+ .01	5	B
20 21 25 07 . . .	19 44 .35	— .10	5	B
1953 gen. 15 19 28 58 . . .	05 47 .04	.00	5	B
16 24 53 . . .	05 37 .30	— .12	5	B

TABELLA III (Urano).

1953 feb. 22 19 57 40 . . .	7 04 23 .00	— 0 .07	10	B
23 53 38 . . .	04 17 .01	+ .01	8	B
mar. 11 18 49 35 . . .	03 07 .79	— .09	9	B
12 45 36 . . .	03 05 .36	— .05	9	B
13 41 38 . . .	03 03 .12	— .05	9	B
20 13 58 . . .	02 53 .89	— .04	11	B. C.
23 02 10 . . .	02 53 .39	— .05	9	C.
24 17 58 14 . . .	02 53 .68	— .06	9	C.
25 54 19 . . .	02 54 .23	— .05	4	C.
27 46 28 . . .	02 55 .97	— .07	9	C.
28 42 34 . . .	02 57 .26	— .02	10	C.
29 38 09 . . .	02 58 .49	— .08	10	B.
30 34 45 . . .	03 00 .37	— .06	10	C.

Considerando le medie tra le A. R. osservate e quelle calcolate si ottengono i valori O—C medi e gli errori medi di una singola determinazione di A. R.

Pianeta	N. Osserv.	O—C	E. M.
Vesta	8	— 0 ^s .21	0 ^s .006
Cerere	9	— 0 ^s .06	± 0 ^s .068
Urano	13	— 0 ^s .05	0 ^s .026

Di fronte alla diversa entità dell'errore si presentano due giustificazioni. Anzitutto le determinazioni dell'A. R. di Urano sono state fatte con 9 stelle di confronto in media, mentre per Vesta e Cerere sono 6 e 4. Inoltre la maggiore luminosità apparente di Urano ha permesso di seguirlo, al micrometro impersonale, con più accuratezza.

L'immagine di Urano è stata osservata in genere quasi puntiforme, e con la bisezione del filo mobile, si ritiene che le osservazioni non contengano deviazioni sistematiche sensibili.

Nelle tabelle le singole B. e C. sono riferite agli osservatori Barbatelli e Castellano; tutti e due si sono occupati delle riduzioni.

Astronomia (Astrofisica). — *Sulla classificazione spettrale bidimensionale. Risultati preliminari*^(*). Nota ^(**) di MARGHERITA HACK, presentata dal Socio G. ABETTI.

INTRODUZIONE. — Uno dei problemi più importanti ed attuali della astrofisica consiste nel trovare dei criteri quantitativi che permettano una classificazione spettrale caratterizzante le due grandezze preponderanti di cui lo spettro è funzione: temperatura e pressione dell'atmosfera stellare.

Come è noto, la prima di queste due grandezze è quella che maggiormente influisce sullo spettro di una stella; le prime classificazioni spettrali, a partire da quella di Padre Secchi, fino a quella più recente e più completa di Harvard, sono sequenze lineari: lo spettro è considerato essenzialmente in funzione di una sola variabile; la temperatura. Solo più tardi si cominciò a notare le differenze esistenti negli spettri d'assorbimento di stelle presentanti una stessa distribuzione energetica del continuo. Queste differenze, che diventano ben apprezzabili a partire dai tipi A 5, A 7, portarono ad una prima diramazione nella sequenza spettrale, e furono attribuite alla differenza di pressione esistente fra le atmosfere delle stelle « giganti » o di alta luminosità, e le atmosfere delle stelle « nane » o di bassa luminosità.

Una terza diramazione verso i tipi spettrali ancora più avanzati fu ritrovata in seguito e attribuita a differenze di composizione chimica. Poiché questo terzo fatto è di gran lunga meno importante degli altri due, si può, per la grande maggioranza delle stelle, supporre che esse abbiano tutte all'incirca la stessa composizione chimica. Si presenta quindi il problema di perfezionare la imperfetta classificazione bidimensionale di Harvard, ottenuta unendo il prefisso *c, g, d*, alla lettera rappresentante il tipo spettrale, rispettivamente per le supergiganti, giganti e nane, e di estenderla anche alle stelle dei primi tipi spettrali. Per queste il problema si presenta più difficile che per le stelle dei tipi più avanzati; esse infatti sono grosso modo, tutte stelle giganti (eccezion fatta per il ristretto e particolarissimo gruppo delle

(*) Lavoro eseguito all'Institut d'Astrophysique, Paris.

(**) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1953.

nane bianche) e le differenze di luminosità diventano sempre più piccole e difficilmente rivelabili via via che si procede verso i tipi Bo, O9, O6.

Tale problema fu affrontato soltanto una decina di anni fa da Morgan ⁽¹⁾, il quale basandosi su una serie di criteri qualitativi, giunse ad una classificazione bidimensionale assai precisa, dividendo le stelle nelle sei classi di luminosità I_a, I_b, II, III, IV, V.

Una classificazione bidimensionale basata su criteri quantitativi (misura della discontinuità di Balmer D e di una lunghezza d'onda λ_r strettamente dipendente dalla lunghezza d'onda a cui essa si verifica), è stata realizzata da Chalonge e collaboratori ⁽²⁾ per stelle appartenenti ai tipi O6-F8.

Un terzo criterio basato sulla misura della intensità totale della H β e della discontinuità di Balmer, a mezzo di fotometro moltiplicatore e filtri interferenziali, è stato recentemente proposto da Strömgren ⁽³⁾.

Quindi, mentre la classificazione di Morgan si basa sull'aspetto generale dello spettro, queste due ultime classificazioni si basano invece sull'analisi soltanto sull'idrogeno, il principale costituente dell'atmosfera stellare.

L'accordo fra la classificazione di Morgan e quella (λ , D) è ottimo, provando che lo studio del solo idrogeno, cioè del più abbondante componente di un'atmosfera stellare equivale pienamente, ai fini della classificazione spettrale bidimensionale, all'esame delle numerose caratteristiche spettrali fornite dalle righe più deboli; resta così confermata giusta l'ipotesi che la gran maggioranza delle stelle possieda all'incirca la stessa composizione chimica.

SCOPO DEL PRESENTE LAVORO: a) studiare la relazione esistente fra la discontinuità di Balmer D e l'intensità centrale di una conveniente riga della serie di Balmer, per stelle comprese fra O6 e F8, per provare se una classificazione spettrale bidimensionale è possibile utilizzando questi due parametri. Si tratterebbe quindi di un metodo di classificazione strettamente analogo a quello di Strömgren. L'esistenza di una stretta relazione fra D e H γ , che è stata dimostrata da Barbier, Chalonge e Morguleff ⁽⁴⁾, fa pensare alla possibilità di ottenere una classificazione analoga a quella (λ , D) impiegando come parametri D e l'intensità di una riga della serie di Balmer.

b) Poiché l'intensità di una riga di assorbimento è funzione della temperatura e della pressione dell'atmosfera stellare (ammettendo in prima approssimazione, che le stelle abbiano tutte la stessa composizione chimica, e del potenziale di eccitazione della riga considerata, è teoricamente possibile realizzare una classificazione spettrale bidimensionale, utilizzando come

(1) W. W. MORGAN, P. C. KEENAN, E. KELLMANN, *An Atlas of stellar spectra*, Chicago.

(2) D. CHALONGE, L. DIVAN, « *Annales d'Astrophysique* », 15 (1952).

(3) B. STRÖMGREN, « *A. J.* », 56 142, (1951).

(4) D. BARBIER, D. CHALONGE, N. MORGULEFF, « *Annales d'Astrophysique* », 4, 137, (1941).

parametri, capaci di caratterizzare la temperatura e la pressione, due righe d'assorbimento il cui potenziale d'eccitazione differisca notevolmente. Allo scopo di verificare questa possibilità si è perciò proceduto allo studio delle intensità centrali delle principali righe d'assorbimento presenti negli spettrogrammi studiati.

MATERIALE D'OSSERVAZIONE. — Il materiale d'osservazione, gentilmente messo a mia disposizione dal prof. D. Chalonge, consisteva in microfotogrammi di spettrogrammi per 140 stelle di tipo compreso fra O6 e F8. La regione spettrale abbracciata va da circa 4500 Å a circa 3100 Å, la dispersione è di 225 Å/mm ad H_γ ⁽²⁾. Le registrazioni erano state eseguite con rapporto d'ingrandimento 12; la fenditura dello spettrografo e del microfotometro erano state mantenute costanti durante tutto il lavoro.

Tali spettrofotogrammi erano già stati utilizzati da Chalonge e Divan ⁽²⁾ per lo studio dello spettro continuo, determinazione dei gradienti, misura della discontinuità D e della lunghezza d'onda λ_x e i risultati impiegati per stabilire la classificazione bidimensionale (λ_x , D).

MISURE E LORO RISULTATI. — Si sono misurate le intensità centrali apparenti (notevolmente inferiori alle vere intensità centrali, causa la debole dispersione dello spettrografo) di H_γ , H_δ , H_ϵ ; si sono confrontate le 4 famiglie di curve che danno il $\log I_c/I_r$ (I_r/I_c intensità centrale) in funzione del tipo spettrale, tenendo come parametro la classe di luminosità, per H_γ , H_δ , H_ϵ , D.

Si è così ritrovato il ben noto risultato che l'intensità delle righe della serie di Balmer e D sono funzione della luminosità. Il comportamento delle righe H_γ , H_δ e H_ϵ è analogo a quello di D; la differenza più notevole consiste nel fatto che le curve di parametro I_a e I_b hanno un'ampiezza molto più piccola per H_γ , H_δ , H_ϵ che per D; per la classe I_a si può dire che la intensità di H_γ e H_δ resta quasi costante mentre D varia in modo notevolissimo. È questa differenza di comportamento che rende possibile l'utilizzazione di D e di una riga di Balmer quali parametri di una classificazione bidimensionale. Si nota una variazione regolare dell'ampiezza passando da H_γ a D, cioè da numero quantico $n = 5$ a $n = \infty$; l'aumento di ampiezza da H_γ a D è molto minore per le classi IV-V che per le classi I_a e I_b . La variazione regolare di ampiezza da H_γ a D, estrapolando e interpolando i risultati trovati per $n = 5$, $n = 6$, $n = 8$, $n = \infty$ ad $n = 3$, $n = 4$, $n \geq 9$, permette di avanzare l'ipotesi che sia possibile stabilire una classificazione anche impiegando come parametri H_a o H_β e una riga di alto numero quantico, per esempio $n \geq 9$. Una conferma o meno di tale ipotesi potrà aversi impiegando spettrogrammi di dispersione un po' maggiore di quella utilizzata qui (intorno ai 100, 150 Å/mm. a H_γ).

La differenza di comportamento fra le tre righe qui studiate, H_γ , H_δ , H_ϵ è invece troppo piccola perché una coppia di esse possa fornire un criterio di classificazione bidimensionale. La relazione (H_γ , H_δ) e (H_δ , H_ϵ)

mostra invece come il legame esistente fra le tre righe sia sufficientemente stretto perché ci si possa limitare a studiarne una soltanto. Si è scelta la H_{δ}

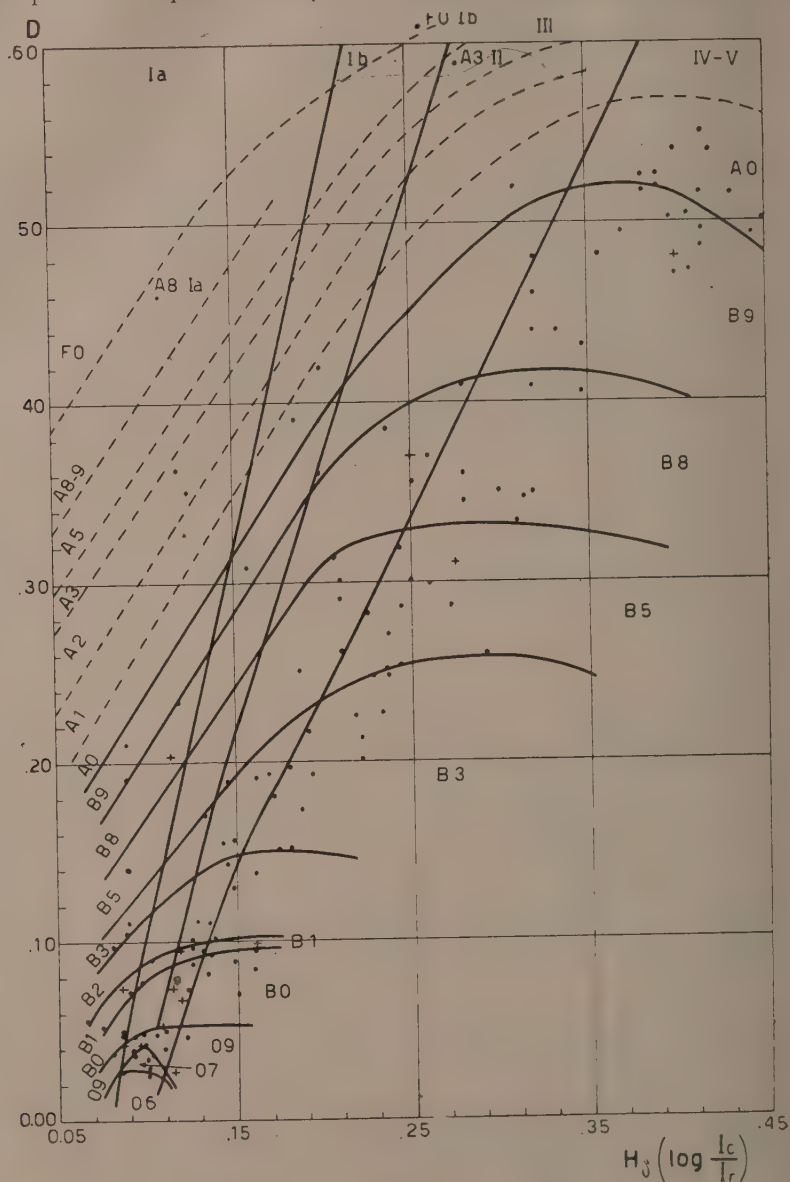


Fig. 1.

che è delle tre la meno perturbata sia da componenti in emissione, per le stelle dei primi tipi, sia da *blend* con righe vicine per le stelle di tipo più avanzato.

Relazione H_δ, D . — La relazione fra H_δ e D riportata in fig. 1 per le stelle per le quali H_δ e D non hanno ancora raggiunto il massimo (che cade

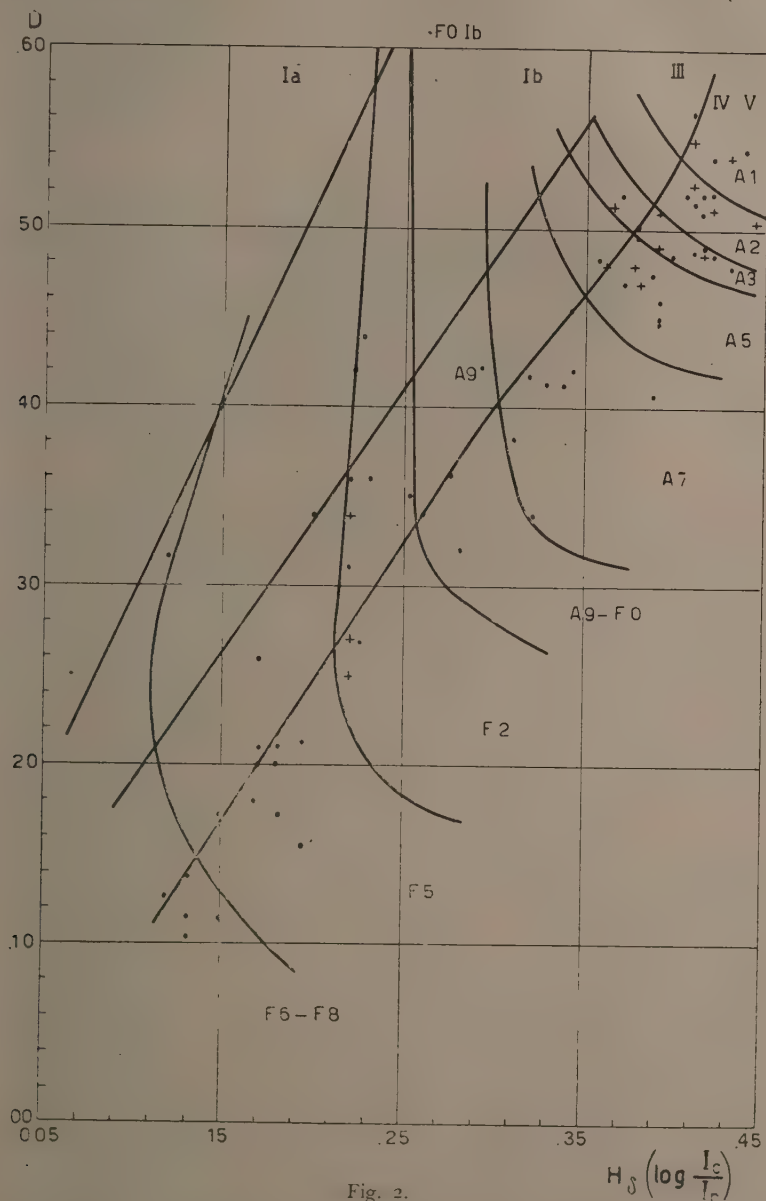


Fig. 2.

circa ad A0 per le stelle di classe IV-V, ad A5 per le stelle di classe III, e verso F0 per quelle di classe I) e in fig. 2 per le stelle per cui H_δ e D hanno già superato il massimo, mostra come i punti si raggruppino

secondo il tipo spettrale e la classe di luminosità (i valori qui assunti per il tipo spettrale e la luminosità sono quelli forniti dalla classificazione (λ, D)). L'accordo fra le due classificazioni è assai buono. Le crocette di fig. 1 e 2 indicano le stelle che si dispongono in aree corrispondenti a un tipo un po' diverso da quello (λ, D) . L'eliminazione della misura di λ , grazie al metodo qui impiegato, permette una maggiore precisione nella classificazione delle stelle di tipo anteriore a B1 e posteriore a F0 per le quali tale misura è estremamente incerta.

Analizzando le due figure si nota che le bande corrispondenti alle diverse classi di luminosità convergono verso una stessa superficie in corrispondenza delle stelle O6-O7, interpretando il fatto che per tali stelle non è fisicamente possibile una separazione definita in classi di luminosità. Nel secondo diagramma la separazione fra le classi III e IV-V diventa meno sensibile verso i tipi F0-F5, in corrispondenza al fatto messo in evidenza dal diagramma di Russel che le stelle di tale tipo, di luminosità intermedia fra giganti e nane sono in numero notevolmente minore che per i precedenti tipi spettrali.

Il presente studio è stato esteso anche ad una seconda serie di circa 150 stelle, i cui spettri sono stati presi con prisma obbiettivo (4) e su cui era già stata misurata l'intensità centrale di H_γ , H_δ , K. Per mezzo di un gruppo di 80 stelle comprese, sia nella prima serie spettrale che nella seconda, si è potuto rendere paragonabili i valori delle intensità centrali, che come è noto dipendono grandemente dalle condizioni strumentali. Anche questo secondo gruppo di stelle s'inquadra nel diagramma H_δ, D dando risultati in ottimo accordo con quelli ricavati dal diagramma λ, D .

Studio delle intensità centrali delle righe appartenenti ad altri elementi che l'idrogeno. - Ad eccezione della K del CaII e della banda G per i tipi più avanzati, e della 4026 Å e 3819 Å dell'He I per i primi tipi, tutte le altre righe studiate si sono rivelate troppo deboli per poter fornire qualche risultato utilizzabile, essendo troppo scarso il numero di stelle in cui essa è presente.

Dall'analisi della curva che dà l'intensità centrale della K in funzione del tipo spettrale, parametro la classe di luminosità, si vede che essa dipende notevolmente dalla luminosità. A partire dal tipo A5 verso i tipi più avanzati, l'intensità della K diviene maggiore per le classi Ia e Ib che per le classi III-IV-V. Questo comportamento fa pensare alla possibilità di una classificazione bidimensionale impiegando come parametri le intensità centrali della H_δ e della K. Il diagramma che mostra la relazione H_δ, K è dato in fig. 3. Si vede come i punti rappresentativi si ripartiscono secondo il tipo spettrale e la classe di luminosità dando la possibilità di una classificazione in soddisfacente accordo con quella di Morgan e con quella (λ, D) . L'inconveniente di questa classificazione è però, che a partire dal tipo A8 non è più possibile una separazione fra le classi III e IV-V.

Sarebbe interessante lo studio di stelle di tipo più avanzato di F8 per estendere la classificazione H₈, K che si presenta di particolare interesse per questi ultimi tipi, per cui non è praticamente possibile una misura della discontinuità D.

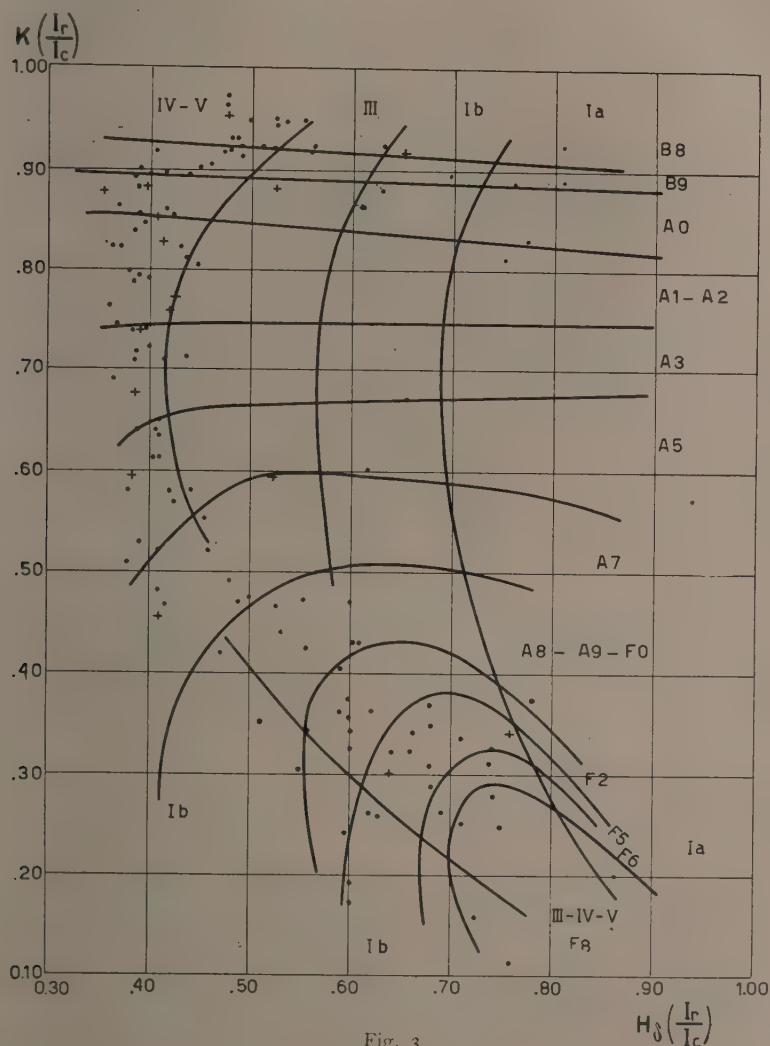


Fig. 3.

Lo studio della 4026 Å e della 3819 Å dell'He I mostra che l'intensità centrale di queste due righe di assorbimento è essenzialmente funzione della temperatura; solo per le classi I_a e I_b l'intensità di tali righe è sicuramente inferiore a quella dei corrispondenti tipi spettrali delle classi III-IV-V, fra le quali ultime non si nota differenza di comportamento. Si presenta quindi la possibilità di una classificazione bidimensionale che impieghi come para-

metri la 4026 A dell'He I (più adatta della 3819 A che è disturbata dalla vicinanza di H γ) e la H δ . La prima potrebbe essenzialmente caratterizzare la temperatura e quindi il tipo spettrale, la seconda più sensibile anche alla pressione, caratterizzerebbe il tipo spettrale e la classe di luminosità.

I risultati ottenuti sono insoddisfacenti per i tipi O9-B2. Per i tipi B2,5-B9 i punti rappresentativi si dispongono in superfici distinte a seconda del tipo spettrale e della classe di luminosità, ma rispetto ai due precedenti diagrammi (H δ , D) e (H δ , K) il diagramma (H δ 4026) presenta il grave inconveniente che non è possibile tracciare delle curve continue di eguale tipo spettrale e di eguale luminosità, ma solo di ottenere delle superfici separanti i diversi tipi, ma non disposte secondo una legge semplice.

Si pensa che si potrebbero ottenere dei risultati migliori impiegando righe dell'elio e la H δ , utilizzando spettrogrammi di dispersione un po' maggiore (circa 150 Å/mm) ed eseguendo la registrazione con un rapporto di ingrandimento maggiore di quello qui impiegato (si noti che i microfotogrammi qui studiati erano stati originariamente eseguiti per lo studio del continuo e non delle righe); l'intensità delle righe dell'elio risulterebbe molto meno influenzata dalle condizioni strumentali.

CONFRONTO FRA LE DIVERSE CLASSIFICAZIONI (H δ , D), (H δ , K), (H δ , 4026 Å). - L'accordo è generalmente buono; il confronto fra le diverse classificazioni mette in evidenza le particolarità di costituzione chimica di qualche stella, una scarsità o un'abbondanza di He e di Ca anormale per il tipo che è ottenuto dal comportamento dell'H. Per le stelle di tipo compreso fra B9 e A3, abbastanza numerose sono quelle in cui l'intensità della riga K del CaII porta ad una classificazione in leggero disaccordo con quella (H δ , D) e (λ_1 , D) mettendo chiaramente in evidenza l'influenza dell'abbondanza relativa del calcio.

CONCLUSIONE. - I principali risultati di questo lavoro si possono così riassumere:

a) è provata la possibilità di una classificazione spettrale bidimensionale in accordo con quella di Morgan impiegando come parametri l'intensità centrale della H δ e il valore della discontinuità di Balmer;

b) si affaccia l'ipotesi della possibilità di una classificazione bidimensionale impiegando come parametri due righe della serie di Balmer, una di basso e una di alto numero quantico;

c) si ottiene una classificazione bidimensionale abbastanza soddisfacente per le stelle B8-F8, impiegando come parametri le intensità centrali di H δ e K. Si auspica l'estensione dello studio di tale relazione a stelle di tipo più avanzato di F8;

d) si prospetta la possibilità di perfezionare i risultati da una classificazione (H δ , 4026 Å) impiegando spettrogrammi con dispersione maggiore di quella qui usata.

Sono lieta di ringraziare il prof. D. Chalonge dell'Institut d'Astrophysique, presso il quale ho avuto l'opportunità di compiere questo lavoro, per il materiale di osservazione che egli gentilmente ha messo a mia disposizione come pure l'UNESCO per la concessione di una borsa di studio che mi ha reso possibile il soggiorno presso il detto Istituto.

I risultati definitivi di questa ricerca verranno pubblicati negli «Annales d'Astrophysique».

Astronomia. — *La variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) e la verifica della legge Hattori.* Nota ^(*) di ALFONSO FRESA, presentata dal Corrisp. G. CECCHINI.

1. ERRORE DI CHIUSURA IN RELAZIONE CON LA PRESSIONE BAROMETRICA. — Facendo seguito alla Nota ⁽¹⁾, sono state riprese in esame le numerose coppie di latitudine osservate a Pino Torinese nella I Sala meridiana e discusse in relazione alla legge Hattori. Questo astronomo giapponese asserisce ⁽²⁾ che la maggior parte dell'errore di chiusura è in relazione con fenomeni atmosferici e più probabilmente con la pressione barometrica.

A Pino Torinese si è proceduto alla verifica di questa relazione sfruttando i dati barografici registrati a qualche decina di metri dallo strumento. Poiché alla I Sala vi fu interruzione per due mesi nelle osservazioni dei gruppi estremi, si sono dovute utilizzare, dell'intero periodo di osservazione, le sole latitudini dei due gruppi centrali (corrispondenti agli istanti medi 23^h e 1^h), sfruttando soltanto i valori $\Delta\varphi_m$, ossia le variazioni non polari della latitudine.

In base a questi valori di $\Delta\varphi_m$ sono stati determinati, a rotazione, gli errori di chiusura mensili, allo scopo di eliminare gli errori residui nelle declinazioni di gruppo. In altri termini, l'errore di chiusura (E_c), derivato dalle differenze *sera-mattino*, cominciati col gruppo XII (1943), corrisponderà alla somma delle differenze *sera-mattino* della pressione barometrica (Δp) dal settembre 1943 all'agosto 1944, e così di seguito.

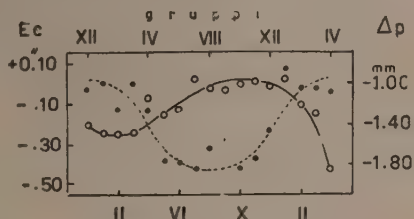


Fig. 1. — Errore di chiusura (circoli pieni) e pressione barometrica (circoli vuoti).

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1953.

(1) A. FRESA, *Sulla variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) nel periodo 1943.8-1945.9* «Rend. Acc. Lincei» (Classe di Scienze fisiche...) ser. VIII, vol. IV, fasc. 6 (1948).

(2) HATTORI, *On the Closing Error in the Latitude Observations*. «Publ. Astron. Soc. Japan.», vol. nr. 1-2 (1949).

Dal grafico (fig. 1) appare molto probabile una correlazione tra l'errore di chiusura e la pressione barometrica, per cui ammettendo - come ha fatto Hattori - una relazione lineare tra E_c e Δp :

$$E_c = x + y \Delta p,$$

servendoci del metodo dei minimi quadrati, risulta:

$$E_c = -0.67 - 0.38 \Delta p \\ \pm .15 \pm .14$$

e l'errore di chiusura medio sarà dato dalla relazione precedente, quando a Δp sostituiremo il suo valore medio Δp_m , essendo Δp sempre diverso da zero (Tabella I).

TABELLA I.

Errori di chiusura e pressione barometrica.

Intervallo	Gruppo	Errore di chiusura	Δp
Settembre 1943-Agosto 1944	XII	— 0".02	— 1 ^{mm} .40
Ottobre » -Settembre »	I	0	— 1 .50
Novembre » -Ottobre »	II	— .11	— 1 .50
Dicembre » -Novembre »	III	0	— 1 .52
Gennaio 1944-Dicembre »	IV	— .14	— 1 .13
Febbraio » -Gennaio 1945	V	— .39	— 1 .31
Marzo » -Febbraio »	VI	— .37	— 1 .28
Aprile » -Marzo »	VII	— .44	— 0 .94
Maggio » -Aprile »	VIII	— .32	— 1 .06
Giugno » -Maggio »	IX	— .28	— 1 .09
Luglio » -Giugno »	X	— .41	— 1 .00
Agosto » -Luglio »	XI	— .38	— 1 .00
Settembre » -Agosto »	XII	— .23	— 1 .03
Ottobre » -Settembre »	I	+ .07	— 0 .93
Novembre » -Ottobre »	II	— .01	— 1 .21
Dicembre » -Novembre »	III	— .02	— 1 .31
Gennaio 1945-Dicembre »	IV	— .04	— 1 .86

2. VARIAZIONE NOTTURNA DELLA LATITUDINE E RELAZIONE CON LA PRESSIONE BAROMETRICA. - L'estensione del programma di osservazioni continuative (8 ore) ha permesso di esaminare meglio la variazione notturna

della latitudine. Le latitudini sono state raggruppate in 4 intervalli, corrispondenti agli istanti di tempo medio:

$$21^h \quad 23^h \quad 1^h \quad 3^h.$$

Sono state adoperate le latitudini contenenti la sola correzione alla declinazione del gruppo nell'ipotesi della nullità dell'errore di chiusura. È ovvio che le latitudini medie generali ottenute per ciascuno dei quattro intervalli notturni, dovrebbero tutte essere eguali tra loro, avuto riguardo soltanto al moto polare, sia per il fatto che ogni intervallo notturno contiene più di una volta tutti i gruppi (per cui si può ammettere una buona compensazione nelle declinazioni delle stelle), sia per il valore dell'error medio di osservazione delle latitudini concluse per ogni intervallo notturno che è, in media, di circa $\pm 0''.009$.

Le latitudini ottenute per gli istanti di tempo medio degli intervalli sono riportate nella Tabella II.

Queste latitudini presentano una variazione regolare nel corso della notte.

Ora, seguendo lo Hattori, vediamo se sussiste corrispondenza tra le variazioni della latitudine nel corso della notte e quelle di pressione alle stesse ore.

Mettendo in media le sole notti di osservazione, ora per ora, dal settembre 1943 al gennaio 1946, ho ottenuto la media annua della variazione notturna della pressione barometrica per Pino Torinese (fig. 2 a). In essa si nota un crescente aumento dal tramonto fin verso l'una dopo la mezzanotte, cui segue una leggera diminuzione. Sovrapponendo alla curva barografica quella di variazione notturna della latitudine, si nota una certa corrispondenza nel loro andamento.

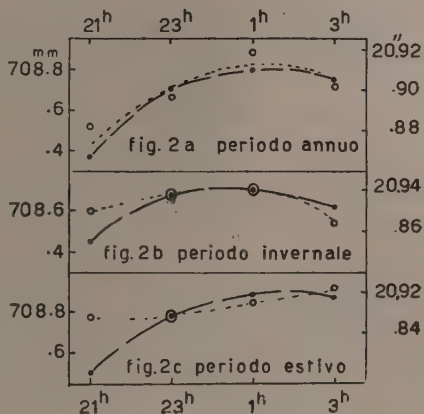


Fig. 2. — Variazione notturna della latitudine (circoli vuoti) e variazione della pressione barometrica (circoli pieni).

TABELLA II.

Intervalli	20 ^h -22 ^h	22 ^h -24 ^h	0 ^h -2 ^h	2 ^h -4 ^h
Latitudini	20''.883	20''.896	20''.919	20''.903
Errore medio	$\pm .009$	$\pm .008$	$\pm .009$	$\pm .011$
Nr. delle latitudini . .	1117	1483	1164	689

Per avere una conferma in questa correlazione ho suddiviso l'andamento della pressione barometrica in due periodi: invernale (comprendente l'autunno e l'inverno) ed estivo (comprendente la primavera e l'estate). Operando analogamente per la variazione di latitudine, nel periodo invernale risulta un accordo ancora più stretto tra i due fenomeni (fig. 2 b) rispetto a quello annuo ⁽³⁾. Ciò sembra dovuto alla maggiore stabilità delle condizioni atmosferiche nel periodo invernale, caratteristica della Valle Padana; stabilità che consente un migliore raffronto tra i due fenomeni, anche se il numero dei dati utilizzati è stato evidentemente ridotto a circa la metà. Nel periodo estivo si ha, invece, oltre ad una instabilità nelle condizioni meteorologiche, un numero ridotto di osservazioni in prossimità dei crepuscoli.

Fisica. — *Sopra una variante cinematica dell'esperimento di Sagnac.* Nota II ^(*) di MARIO GALLI, presentata dal Socio G. ABETTI.

Nella Nota precedente ⁽¹⁾ abbiamo discusso la possibilità di discriminare tra meccanica classica e relativistica mediante una variante cinematica dell'esperimento di Sagnac. La risposta è stata negativa. In questa Nota esponiamo alcune considerazioni di ordine generale, dalle quali si può dedurre, almeno con grande probabilità, che nessun altro esperimento analogo, effettuabile su sistemi rotanti, può permetterci tale discriminazione.

1. In ordine a questo scopo (cioè discriminazione tra cinematica classica e relativistica mediante esperienze eseguite su sistemi rotanti) sono essenziali le seguenti premesse:

A) La cinematica relativistica dei sistemi rotanti non deve essere confusa con l'ordinaria cinematica relativistica dei sistemi inerziali. Questa ultima è indiscussa e indiscutibile. Ma non altrettanto può dirsi della prima. Basta considerare il fatto che non abbiamo una sola teoria ma più teorie, spesso intrinsecamente deboli e comunque discordi tra loro. Certe estrapolazioni sembrano molto ovvie, ma, esaminate profondamente, non sono esenti da critica.

Ne consegue che, anche se qualche esperimento praticamente realizzabile su sistemi rotanti, contraddicesse a qualcuna delle teorie che ad essi si riferiscono, non per questo si dovrebbe proclamare alla leggera che è stata contraddetta la teoria della relatività propriamente detta. Bisognerà invece discutere se si tratta di estrapolazioni obbligatorie ovvero arbitrarie.

B) Il risultato di un esperimento qualsiasi del tipo di quello di Sagnac, comunque complicato (o eventualmente di un esperimento di altro

(3) Ossia l'andamento della variazione è più regolare.

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 giugno 1953.

(1) « Rend. Linc. », vol. XIV, fasc. 5, pp. 635-641 (1953).

genere) può essere previsto relativamente tanto dal punto di vista di un osservatore inerziale quanto dal punto di vista di un osservatore solidale col sistema rotante. Se le previsioni fossero diverse è inutile eseguire esperienze. La teoria della relatività (o, più propriamente, un tentativo di estrapolazione ai sistemi rotanti) sarebbe intrinsecamente incoerente.

Volendo perciò confrontare le previsioni della teoria classica e della teoria della relatività è conveniente riferirsi al sistema iniziale, per il quale di solito le formole fondamentali si possono stabilire con maggior sicurezza.

2. Basandoci sulle premesse ora poste si può subito accertare che l'esperimento originario di Sagnac e di Harress, anche modificato con l'introduzione di opportune varianti, come hanno fatto, ad esempio, Dufour e Prunier⁽²⁾, non può servire al conseguimento dello scopo predetto. Ed infatti, in ogni caso, le previsioni circa il risultato di un esperimento cosiffatto dipendono, in ultima analisi, dal calcolo di integrali del tipo $\int ds/v$. Se si tiene

presente la circostanza che in esperimenti del genere è praticamente possibile rivelare solo effetti di prim'ordine, è ovvio che, nel calcolo di integrali del tipo suddetto, le due teorie concordano al prim'ordine, tanto per ciò che si concerne il cammino d'integrazione quanto per ciò che concerne il valore di v . È quindi del tutto superfluo rinnovare i calcoli ad ogni nuovo esperimento che uno possa progettare od eseguire per dimostrare che il risultato, prima previsto classicamente, va anche d'accordo, al prim'ordine, con le formole relativistiche.

3. Per illustrare la premessa A) giova discutere una obiezione opposta da Prunier⁽³⁾ ad un risultato trovato da Langevin nell'esame del valore dimostrativo del dispositivo studiato nella Nota precedente (1).

La formola incriminata è la seguente:

$$(1) \quad \frac{v_1}{v_2} = - \frac{1 - (u/c^2) v'}{1 - (u/c^2) v}$$

dove v , v' e v_1 , v_2 sono le velocità periferiche degli orli dei due dischi D_1 e D_2 , determinate rispettivamente dall'osservatore inerziale K e dall'osservatore solidale col disco centrale K' .

Contro questa formola Prunier ha obbiettato che essa conduce ad un risultato paradossale, in quanto, dovendo essa valere qualunque sia il raggio del cerchio preso in considerazione, dovrebbe anche valere al limite, quando $R \rightarrow \infty$. Ma in questo caso il moto di rotazione tende a confondersi con un moto di semplice traslazione. Per conseguenza la formola (1) obbliga a pensare che un osservatore mobile con velocità costante, potrebbe determinare,

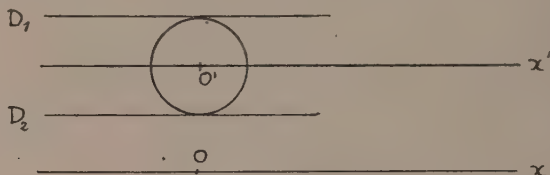
(2) A. DUFOUR e F. PRUNIER, «C. R.», 204, p. 1025 (1937); «C. R.», 208, p. 988 (1939); «Journal de Phys.», 3, p. 153 (1942).

(3) F. PRUNIER, «Revue Scientifique», 86, p. 729 (1948).

con una esperienza analoga a quella di Dufour, il suo moto di traslazione, contro il principio di relatività.

Il miglior modo di rispondere a questa difficoltà consiste, a nostro avviso, nel supporre realizzato un dispositivo simile a quello di Dufour, convenientemente adattato per un moto di traslazione, e nel ripetere il ragionamento di Langevin. Se la formola (1) è vera, dovremo trovare che una almeno delle affermazioni in esso contenute, valida nell'applicazione originaria, anche quando $R \rightarrow \infty$, non si può trasferire in alcun modo al moto di semplice traslazione.

La più naturale trasformazione del dispositivo idonea allo scopo è ovviamente la seguente:



Siano dati due sistemi inerziali (che per semplicità supporremo lineari) Ox ed $O'x'$. Il sistema $O'x'$, mobile rispetto ad Ox con velocità u , corrisponde al disco centrale D . Associamo al sistema mobile $O'x'$ un disco E con centro nell'origine O' e raggio R , rotante, rispetto all'osservatore K' , con velocità angolare ω costante. Siano date inoltre due aste rigide D_1 e D_2 , corrispondenti ai dischi D_1 e D_2 dell'esperimento prima descritto, parallele ad $O'x'$ e tangenti al disco E . Questo spostato per semplice rotolamento le aste D_1 e D_2 . Se V è la velocità periferica del disco E ($V = \omega R$) è evidente che, per K' , la velocità di traslazione di D_1 e D_2 sarà parimenti V e $-V$. Avremo cioè: $v_1 = V$ e $v_2 = -V$.

Quindi

$$(1') \quad \frac{v_1}{v_2} = -1.$$

Invece la formola (1), se fosse applicabile al caso attuale, come farebbe supporre un ovvio passaggio al limite, farebbe dipendere tale rapporto da u , cioè dalla velocità di traslazione rispetto al sistema fisso Ox , conclusione certo contraria al principio di relatività. Da qui si deduce che il ragionamento di Langevin che conduce alla (1) è errato, oppure che qualche affermazione in esso contenuta non si può trasferire al caso attuale, neppure in virtù di qualche lecito passaggio al limite.

Ebbene, se si analizza con questa finalità il ragionamento di Langevin, si può constatare agevolmente che tutte le affermazioni in esso contenute si possono trasferire al caso attuale (anzi qui sono valide a maggior ragione) salvo la formola non numerata che segue quella contrassegnata nella Nota di Langevin con il numero (5):

$$(2) \quad \varepsilon = -\frac{2\pi r}{u}.$$

Con essa si stabilisce che lo spessore di ciascuno degli n denti dei due dischi D_1 e D_2 , misurato dall'osservatore K , è identico, sebbene le periferie di D_1 e D_2 si muovano con diversa velocità. Tale affermazione trasferita al caso presente, sarebbe evidentemente errata. Se il contatto di E con le due aste rettilinee D_1 e D_2 fosse realizzato mediante una congrua dentatura, lo spessore dei denti determinato da K sarebbe diverso, essendo diversa la velocità con cui si muovono.

Invece la formola (2) è vera nell'applicazione che ne fa il Langevin, poiché la contrazione di Lorentz attribuita al disco rotante è diversa da quella che si attribuisce ad un corpo mobile di moto puramente traslatorio.

Quando, in un moto traslatorio, diciamo che la sbarra rigida rettilinea $A'B'$ mobile con velocità v , si contrae rispetto all'osservatore fisso K , secondo il rapporto $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ possiamo intendere ciò in due modi:

1° La lunghezza di $A'B'$, determinata da K , è uguale a $l\sqrt{1 - (v/c)^2}$ dove l è la lunghezza che determinerebbe lo stesso osservatore qualora la sbarra fosse quiescente.

2° La lunghezza di $A'B'$, determinata da K , è uguale a $l\sqrt{1 - (v/c)^2}$ dove ora l è la lunghezza determinata da K' , l'osservatore mobile insieme alla sbarra.

Nella relatività ristretta l'espressione «contrazione di Lorentz» ha entrambi i significati, e non potrebbe essere diversamente per il principio di relatività.

Ma nell'estensione che si fa di tale concetto al disco rotante, non si può dire altrettanto. Per lo meno le opinioni sono assai disperate. Comunque, se vogliamo che valga la contrazione di $A'B'$ nel primo senso (essendo ora $A'B'$ un arco di cerchio concentrico) dobbiamo ammettere che l'intera circonferenza C' , cui $A'B'$ appartiene, non si sovrapponga, durante il moto, alla circonferenza C cui essa era sovrapposta in stato di quiete. Bisognerebbe ammettere per conseguenza una contrazione radiale ⁽⁴⁾. Se questo si esclude, come si fa abitualmente, la contrazione di Lorentz si può ammettere solo conformemente al secondo dei due significati ora esposti.

Ed infatti ⁽⁵⁾, se indichiamo con $(L_{C'})_K$ la lunghezza di C' , determinata da K , $(L_{C'})_K$ è, per definizione, la lunghezza, nel senso ordinario della parola, della circonferenza C cui C' è costantemente sovrapposta. Questo indipendentemente dalla velocità con cui C' scorre su C . Se quindi due circonferenze C'_1 e C'_2 scorrono sulla circonferenza C con diverse velocità, le grandezze $(L_{C'_1})_K$ e $(L_{C'_2})_K$ sono identiche. E se ciascuna di esse è divisa in n parti (divisione che nel caso in questione è realizzata mediante una dentatura) la lunghezza di ogni divisione appare uguale a K .

(4) Questa conseguenza si può evitare se si ammette, come hanno fatto H. Ives, Steed e Donaldson, che il disco, originariamente piano in stato di quiete, si incurvi convenientemente durante il moto. Cfr. H. IVES, « Journal of Optical Society of America », 29, p. 472, (1939). G. STEED e H. DONALDSON, « Phil. Mag. », 20, p. 92 (1910).

Circa la plausibilità di questa ipotesi cfr. M. GALLI, « Ren. Linc. », XII p. 569 (1952).

(5) Ad illustrazione di questa distinzione cfr. la Nota ora citata di M. Galli.

È precisamente questo diverso significato della contrazione di Lorentz che giustifica la formola (1). Questo divario non tende affatto ad annullarsi quando il raggio R del cerchio tende all'infinito. Non è per conseguenza lecito il passaggio al limite (moto puramente traslatorio) ⁽⁶⁾.

4. La maggior parte delle teorie relativistiche dei sistemi rotanti ammettono che la luce si propaghi lungo un cerchio parallelo con velocità costante c , indipendentemente dalla velocità angolare del sistema. Definendo poi il sincronismo mediante trasmissione di segnali luminosi, ciò conduce ad un tempo multiforme che è causa di molti equivoci. Questi possono essere evitati, ma poiché l'adozione di un tempo multiforme è poco naturale e dipende in ultima analisi da una convenzione arbitraria, si può discutere se tale accettazione sia legittima.

Ora è certo che la legittimità di una convenzione, premesso che non offenda la logica, può essere giudicata solo in rapporto al fine che si vuole conseguire. Poiché la definizione di sincronismo è fondamentale per il razionale ordinamento di tutte le nostre esperienze, ci si potrebbe chiedere se una convenzione che conduce ad un tempo multiforme giovi davvero allo scopo. Non sarebbe ingiustificato dubitarne. A conferma di ciò si può osservare che, per lo meno, una tale convenzione non può considerarsi una ovvia e naturale estensione della relatività ristretta. Ed infatti, in questa teoria, a proposito della velocità della luce, sono contenute tre affermazioni ⁽⁷⁾:

1^a La velocità della luce in un percorso chiuso è uguale ad una costante universale c . Questa affermazione è una legge empiricamente controllabile.

2^a La velocità della luce che si propaga da un punto A ad un punto distinto B è uguale, per convenzione, alla stessa costante c .

3^a La prima di queste affermazioni è il presupposto della seconda.

Ciò posto non può non apparire strano che molti trasferiscano ai sistemi rotanti l'affermazione 2^a, che è lo stabilimento di una pura convenzione, pur non ignorando che l'affermazione 1^a è qui certo falsa, come prova l'esperienza di Sagnac.

Con questo non vogliamo contraddire alle teorie comunemente accettate, vogliamo semplicemente sottolineare il fatto che la proposizione ora presa in esame è semplicemente convenzionale e che la convenzione non è obbligatoria, né può riguardarsi come una naturale estensione di quella che si fa nella relatività ristretta. Questo riconoscimento aiuta ad evitare dannosi equivoci.

5. Poiché l'esperimento di Sagnac (ed analoghi) è il più importante tra quelli che si possono eseguire sui sistemi rotanti, si comprende benis-

(6) La risoluzione qui data del paradosso segnalato da Prunier concorda sostanzialmente con quella data da A. METZ, «C. R.», 232 p. 224 (1951). La forma attuale ci sembra peraltro più esplicita e soprattutto più idonea ad illustrare la premessa A).

(7) Cfr. A. EINSTEIN, «Ann. d. Phys.», 17, p. 891 (1905). Si faccia attenzione soprattutto a quanto si può leggere a p. 894.

simo che tutte le teorie relativistiche che trattano di tali sistemi ne tengano conto. Ma è impossibile, per quanto è stato detto nel n. 1, ricavarne qualche informazione utile per la costruzione delle formole fondamentali.

Nella costruzione di tali teorie il compito fondamentale consiste generalmente nell'assegnare le formole che vincolano le variabili r, θ, z, t alle variabili r', θ', z', t' , coordinate di uno stesso punto evento, determinate rispettivamente da un osservatore inerziale e da un osservatore solidale col sistema rotante.

In alcune recenti risoluzioni del problema si parte dal presupposto che tali relazioni abbiano proprietà gruppali ⁽⁸⁾. La plausibilità fisica di tale postulato non è peraltro discussa. Comunque tale criterio non basta a fissare in modo univoco le relazioni cercate. Bisogna fissare o direttamente o con l'ausilio di qualche altro postulato la trasformazione infinitesima. Se si pone che al limite, cioè per $\omega \rightarrow 0$, valgano le relazioni:

$$\begin{aligned} r' &= r & \theta' &= \theta - \omega t \\ z' &= z & t' &= t - \frac{\omega r^2}{c^2} \theta \end{aligned}$$

si giunge univocamente alle trasformazioni:

$$\begin{aligned} r' &= r & \theta' &= \theta \cosh \frac{\omega r}{c} - \frac{ct}{r} \sinh \frac{\omega r}{c} \\ z' &= z & t' &= t \cosh \frac{\omega r}{c} - \frac{r\theta}{c} \sinh \frac{\omega r}{c} \end{aligned}$$

La trasformazione infinitesima può essere determinata indirettamente postulando che valga la consueta trasformazione relativistica delle velocità anche per i sistemi rotanti. H. TAKENO sostiene che questa legge va d'accordo con l'esperimento di Sagnac ⁽⁹⁾. Basta però riflettere al fatto che tale esperimento si concilia perfettamente con la teoria classica per convincersi che il procedimento non guadagna nulla in evidenza sperimentale.

Qualunque sia il valore di queste teorie, qui ci limitiamo ad osservare che sussiste la possibilità di discriminare tra esse e la teoria classica mediante una esperienza del tutto simile a quella descritta e discussa nella Nota precedente. È facile capire come dovrebbe essere costituito un simile esperimento quando si faccia attenzione ad una particolare conseguenza di dette teorie.

Da queste si deduce che, dati due dischi sovrapposti D e D', uno fisso l'altro rotante, se due punti generici P' e Q', appartenenti al disco rotante,

⁽⁸⁾ E. U. HILL, «Phys. Rev.», 69, p. 488 (1946); 71, p. 318 (1947); M. G. TROCHERIS, «Phil. Mag.», 40, p. 1143 (1949); H. TAKENO, «Progress of Theor. Phys.», 7, p. 367 (1952).

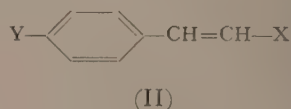
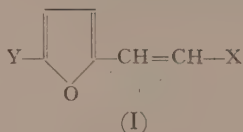
⁽⁹⁾ I metodi di Trocheris e di Takeno, salvo questo particolare ora segnalato, sono del tutto identici, come pure identiche sono le formole fondamentali. Segnaliamo questo poiché nella Nota di Takeno, che pure è molto accurato nel mettere a confronto la sua con le teorie affini prima elaborate, l'articolo di Trocheris non è citato. Ciò dipende forse dal fatto che oggetto della ricerca di Trocheris è l'elettrodinamica dei sistemi rotanti.

coincidono ad un dato istante con due punti Q e Q' del disco fisso, essendo questi allineati con centro, tale coincidenza non perdura nei tempi successivi. Questa non coincidenza sarebbe un fatto concettualmente controllabile. Ma l'effetto in questione è troppo piccolo perché si possa pensare ad un esperimento pratico. Comunque, dato e non concesso che esso possa realizzarsi, si arriverebbe solo a discriminare non già tra teoria della relatività propriamente detta e teoria classica, ma tra questa ed una dubbia estensione della teoria della relatività ai sistemi rotanti. Il controllo non avrebbe molto valore.

Chimica. — *Spettri U. V. di alcuni derivati nitro-furil-etilenici*^(*).

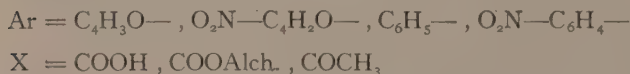
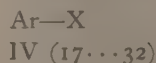
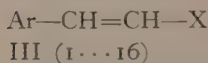
Nota di RENATO ANDRISANO e GIOVANNI PAPPALARDO, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

In una precedente Nota di uno di noi (Andrisano)⁽¹⁾ sono state studiate le proprietà spettroscopiche U. V. di alcuni derivati furil-etilenici-I, di confronto con gli analoghi fenilici-II.



I risultati allora ottenuti confermarono la « maggiore » coniugabilità del nucleo furanico rispetto a quello benzenico, come era stato sottolineato nei precedenti lavori⁽²⁾.

A continuazione di questa indagine, e nel quadro delle ricerche spettroscopiche nella serie furanica⁽²⁾, abbiamo ora registrato le curve di assorbimento U. V. dei nitro-furil- e nitro fenil-etileni (form. III) e quelle dei corrispondenti termini non contenenti il residuo vinilico (form. IV).



(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica dell'Università di Catania, col contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) R. ANDRISANO e A. TUNDO, questi « Rendiconti », VIII, 13, 158 (1952).

(2) R. ANDRISANO e R. PASSERINI, « Gaz. chim. ital. », 80, 730 (1950); R. ANDRISANO e G. MODENA, ib. ib., 81, 393, 405 (1951); R. ANDRISANO, « Ann. chimica », 41, 545 (1951); R. ANDRISANO e A. TUNDO, « Gaz. chim. ital. », 81, 414 (1951); R. ANDRISANO e G. PAPPALARDO, ib. ib., 83..., (1953).

TABELLA I.

Caratteristiche spettroscopiche U.V. dei composti Ar—CH=CH—X (form. III)

Ar =	C ₄ H ₃ O— ^(a)			O ₂ N—C ₄ H ₂ O—			C ₆ H ₅ — ^(a)			O ₂ N—C ₆ H ₄ —		
X	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ
COOH . . .	1	—	—	5	2335	4.14	9 ^d	2160	4.18	13	—	—
		2300	3.25		2650	3.84		2220	4.11		2260	4.02
		3000	4.36		3535	4.20		2735	4.32		3110	4.23
COOCH ₃ . .	2	—	—	6	2360	4.11	10	2165	4.15	14	—	—
		—	—		2740	3.83		2215	4.09		—	—
		3020	4.37		3415	4.25		2765	4.31		2995	4.32
COOC ₂ H ₅ . .	3 ^b	—	—	7	2360	4.09	11	2165	4.14	15	—	—
		2250	3.33		2735	3.80		2220	4.09		—	—
		3025	4.37		3420	4.23		2770	4.30		3000	4.34
COCH ₃ . . .	4 ^c	2360	3.28	8	2405	4.07	12 ^e	2210	4.00	16	2160	4.05
		3160	4.36		3460	4.27		2865	4.32		3035	4.37

a) Gli spettri in soluzione acquosa sono riportati nella Nota precedente (1). b) E. HUGHES e J. JOHNSON [J. Am. Chem. Soc., 53, 737 (1931)]: λ 3000 Å, lg ϵ 4.39. c) ib. ib.: λ 3100 Å, lg ϵ 4.34. d) CAMPBELL e coll. [J. Am. Chem. Soc., 69, 880 (1947)]. e) L. WILDS e coll. [J. Am. Chem. Soc., 69, 1985, (1947)]: λ 2205 Å, lg ϵ 4.08; λ 2860 Å, lg ϵ 4.37.

Questi numeri fra parentesi si riferiscono ai prodotti cui al numero d'ordine della tabella (così anche per la tabella II).

(1...4) Cfr. la Nota di ANDRISANO e TUNDO, loc. cit.

(5) KIMEL e coll., U. S. P. 2,490,006: p. f. 230°.

(6) Per C₈H₇O₅N calc. N % 7.74; Trov. 7.58; p. f. 150°.

(7) H. GILMAN e coll., J. Am. Chem. Soc., 52, 2550 (1930); p. f. 125°.

(8) Preparato secondo le modalità consigliate da KIMEL e coll., loc. cit. per C₈H₇O₅N calc. N % 7.11; Trov. 6.94; p. f. 110°.

(9...12) Cfr. la Nota di ANDRISANO e TUNDO, loc. cit.

(13) PANDEJA, Proc. Indian. Acad. Sci., 94, 508 (1939); p. f. 284°.

(14) KOPF, Compt. rend., 53, 636 (1861); p. f. 163°.

(15) MITSCHERLICH, J. prakt. chem., [I], 22, 194 (1844); p. f. 140°.

(16) A. BAYER e coll., Ber., 16, 1968 (1883); p. f. 110°.

Riportiamo nella tabella I (comp. III) e II (comp. IV) i risultati conseguiti. L'esame di questi valori ci permette di fare le seguenti osservazioni:

1° *Influenza del risonatore* —CH=CH—: consegue dal confronto dei valori riportati nella tabella I con quelli della tabella II (Ved. tabella III, e dai grafici 1 e 2 (curve di assorbimento degli eteri metilici degli acidi nitro-

furoico-nitrofurilacrilico/nitrobenzoico-nitrocinnamico, e nitroacetilfurano-nitrofuralacetone/nitroacetofenone-nitrobenzalacetone).

TABELLA II.

Caratteristiche spettroscopiche U. V. dei composti Ar—X (form. IV).

Ar =	C ₄ H ₃ O— ^(a)			O ₂ N—C ₄ H ₂ O—			C ₆ H ₅ — ^(a)			O ₂ N—C ₆ H ₄ —		
X	n.	λ max Å	lg ε	n.	λ max Å	lg ε	n.	λ max Å	lg ε	n.	λ max Å	lg ε
COOH . . .	17	—	—	21	2120	3.98	25 ^d	—	—	29 ^e	—	—
		2425	4.03		3140	4.06		2245	3.97		2690	3.99
		—	—		—	—		2685	2.80		—	—
		—	—		—	—		2780	2.71		—	—
COOCH ₃ . .	18	—	—	22	2130	4.06	26 ^e	—	—	30	—	—
		2505	4.13		2950	4.08		2290	4.05		2585	4.09
		—	—		—	—		2725	2.96		—	—
		—	—		—	—		2800	2.85		—	—
COOC ₂ H ₅ . .	19	—	—	23 ^b	2130	4.07	27	—	—	31	—	—
		2510	4.13		2970	4.09		2290	4.08		2590	4.00
		—	—		—	—		2720	2.90		—	—
		—	—		—	—		2800	2.85		—	—
COCH ₃ . . .	20	2250	3.38	24 ^c	2215	4.12	28 ^f	—	—	32	—	—
		—	—		2545	3.90		—	—		—	—
		2690	4.13		3000	4.15		2420	4.08		2620	4.14
		—	—		—	—		2790	3.03		—	—

a) Gli spettri in soluzione acquosa sono riportati nella Nota precedente (1). b) F. RAFFAUF (J. Am. Chem. Soc., 72, 753 (1950)); in acqua, λ 3050 Å, lg ε 4.04. c) ib. ib.: λ 2450 Å, lg ε 4.01; λ 3100 Å, lg ε 4.06. d) E. FEHSEL (J. Am. Chem. Soc., 72, 1404 (1950)); λ 2270 Å, lg ε 4.02; λ 2720 Å, lg ε 2.92; λ 2790 Å, lg ε 2.84. e) ib. ib.: λ 2280 Å, lg ε 4.07; λ 2720 Å, lg ε 2.94; λ 2800 Å, lg ε 2.85. f) CAMPBELL, loc. cit.: λ 2800 Å, lg ε 3.01; λ 2410 Å, lg ε 4.12. g) DOUB e VAN DENBELT, J. Am. Chem. Soc., 69, 2714 (1947).

(17...20) Cfr. la Nota di R. ANDRISANO e R. PASSERINI, loc. cit.

(21) FREURE e JOHNSON, J. Am. Chem. Soc., 53, 1142 (1931); p. f. 185°.

(22, 23) Ib. ib., p. f. 79°; p. f. 101°.

(24) RINKES, Rec. trav. chim., 57, 349 (1932); p. f. 78°.

(25...29) Sono prodotti del commercio che abbiamo accuratamente purificato.

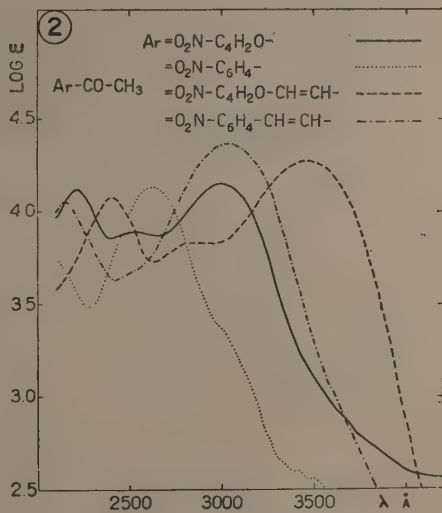
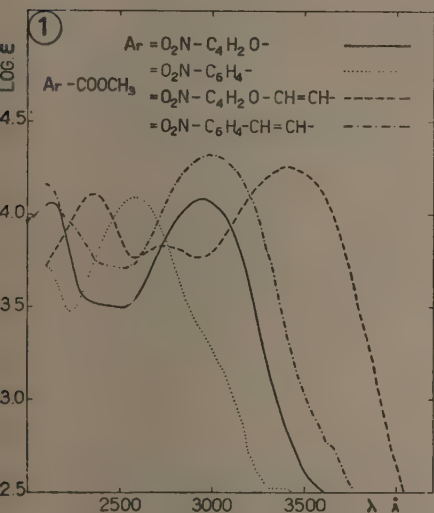
(30, 31) WILBRAND e BEILSTEIN, Ann., 228, 263 (1863); p. f. 96°; p. f. 57°.

(32) WALKER, J. Am. Chem. Soc., 68, 1386 (1946); p. f. 80°.

TABELLA III.

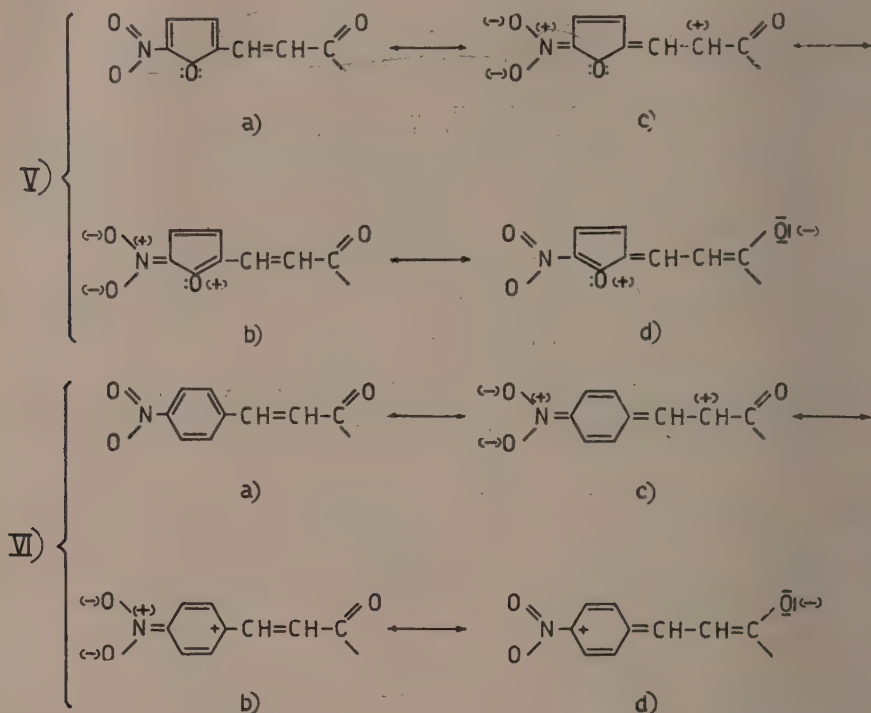
Effetti batocromo ($\Delta\lambda$, Å) ed ipercromo ($\Delta\epsilon$) indotti dalla interposizione di $-\text{CH}=\text{CH}-$ in $\text{Ar}-\text{X}$.

X	$\text{C}_4\text{H}_3\text{O}-$		C_6H_5-		$\text{O}_2\text{N}-\text{C}_4\text{H}_2\text{O}-$		$\text{O}_2\text{N}-\text{C}_6\text{H}_4-$	
	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\epsilon$	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\epsilon$	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\epsilon$	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\epsilon$
COOH	575	12.200	490	11.550	395	4.400	420	7.300
COOCH_3	515	9.950	475	9.200	465	5.800	410	8.500
COOC_2H_5	515	9.950	480	8.000	450	4.600	410	11.900
COCH_3	470	9.400	445	8.900	460	4.500	415	9.600



In ogni caso, dunque, il residuo vinilico — come d'attesa — importa un effetto batocromo ed ipercromo, prendendo esso parte alla coniugazione. Ma è fondamentale — agli effetti delle premesse — che nei termini furilici (ad eccezione dell'acido nitro-furil-acrilico) lo spostamento verso il rosso operato dal $-\text{CH}=\text{CH}-$ è maggiore che non nei termini fenilici: nel caso dei nitroderivati l'effetto batocromo non è accompagnato da un aumento delle intensità, ma ciò è presumibilmente da imputare al fatto che, essendo maggiormente interessato alla coniugazione l' NO_2 (che non il COOH), il dipolo comunque è più lungo nel caso del derivato fenilico rispetto al corrispon-

dente derivato furilico (nelle formule sono schematizzate per i derivati fenilici soltanto le strutture di coniugazione in para): (V-VI) $a > b > c$.

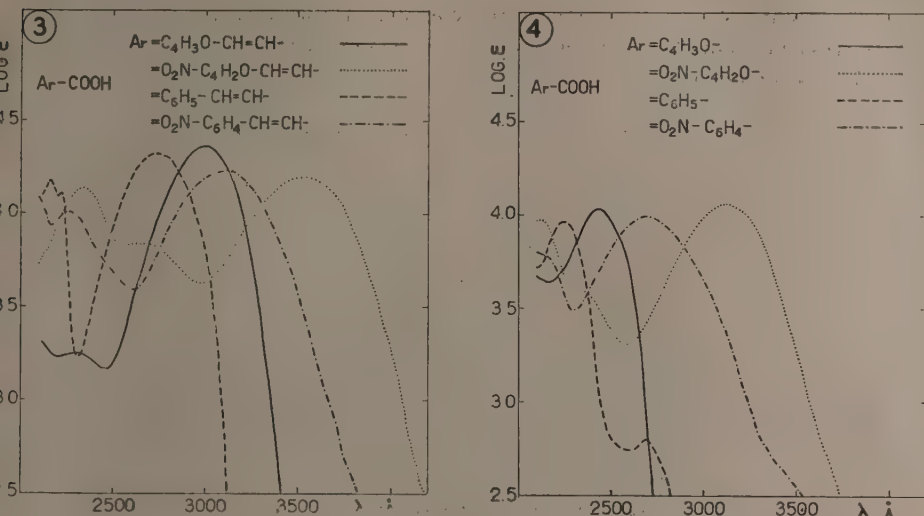


2° Effetto batocromo del nitrogruppo rispettivamente nelle posizioni α - e p - nei nitroderivati-III e -IV: risulta dalla tabella IV, dal grafico 3 (curve di assorbimento acidi furil-acrilico/nitro furil-acrilico e cinnamico/nitro-cinnamico) e dal grafico 4 (curve degli acidi furoico/nitro-furoico e benzoico/nitro-benzoico).

TABELLA IV.

Effetto batocromo ($\Delta\lambda$, Å) indotto dal nitrogruppo in $\text{Ar}-\text{CH}=\text{CH}-\text{X}$ e in $\text{Ar}-\text{X}$.

X	$-\text{C}_4\text{H}_2\text{O}-$ $-\text{CH}=\text{CH}-\text{X}$	$-\text{C}_6\text{H}_4-$ $-\text{CH}=\text{CH}-\text{X}$	$-\text{C}_4\text{H}_2\text{O}-\text{X}$	$-\text{C}_6\text{H}_4-\text{X}$
	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\lambda$, Å
COOH	535	375	715	445
COOCH_3	395	230	445	295
COOC_2H_5	395	230	460	300
COCH_3	300	170	310	200



È evidente allora che l'introduzione del nitro-gruppo comporta sempre un effetto batocromo, ma questo è in ogni caso maggiore per i derivati furanici.

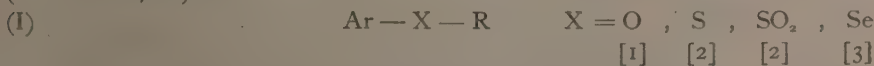
Questi risultati sono in accordo con quelli già ritrovati per le serie -I e -II, e con tutti gli altri precedentemente ottenuti⁽²⁾; pertanto resta ulteriormente confermata la « maggiore » coniugabilità del furile rispetto al fenile.

Le determinazioni spettrofotometriche (campo 2100-4000 Å) sono state eseguite con spettrofotometro di Beckman DU a quarzo, con lampada a idrogeno, operando con soluzioni alcooliche 1/200.000, effettuando le letture ogni 2 m μ e nei punti caratteristici di m μ in m μ .

La legge di Beer, almeno per i massimi presi in esame, è sostanzialmente verificata.

Chimica organica. — *Su alcuni fenil-alchil- e difenil-seleniuri*^(*). Nota di LUIGI CHIERICI e RICCARDO PASSERINI^(**), presentata^(***) dal Socio G. B. BONINO.

Nel piano delle ricerche spettroscopiche U. V. sui composti del tipo-I (R = Alch., Ar)



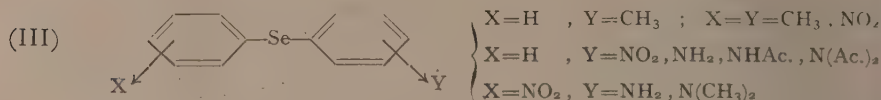
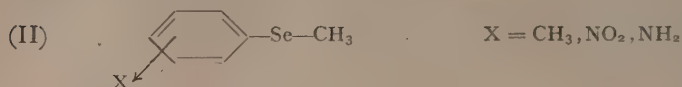
in atto nell'Istituto di Chimica Industriale, e più particolarmente di quelle sui seleniuri (I : X=Se) [3], diamo notizia in questa Nota di alcuni tolil-,

(*) Col contributo del C. N. R. Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale di Bologna e di Chimica Farmaceutica di Parma.

(**) In ordine alfabetico.

(***) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(nitro)-fenil- e (amino)-fenil-alchil-seleniuri-II [nella Nota precedente [3] fu presa in esame la serie dei fenil-alchil-seleniuri $\text{CH}_3 \dots \text{C}_{10}\text{H}_{21}$] e di alcuni difenil-seleniuri-III



Le nostre ricerche, nella fattispecie, tendono a caratterizzare l'effetto giocato sul colore dal selenio nei confronti di quello dell'ossigeno e dello zolfo nei composti del tipo-I, e quindi il loro corrispondente effetto mesomero ed elettromero, anche in relazione della eventuale espansione del guscio di valenza dello zolfo e del selenio.

Il confronto delle proprietà spettroscopiche U. V. dei seleno-composti (questa e precedente Nota [3]) e dei corrispondenti tio-derivati [2] porta a rilevare delle forti analogie, talché si può ritenere che dell'assorbimento dei seleniuri e dei solfuri siano responsabili analoghi sistemi cromoforici. La discussione completa degli spettri sarà fatta in altra sede: però si può fra l'altro sin d'ora sufficientemente affermare, almeno con criterio di prima approssimazione, che anche nei difenil-seleniuri, analogamente ai difenil-solfuri [4], non vi è coniugazione funzionale dei due fenili attraverso l'etero-atomo (selenio), come si può subito vedere paragonando gli spettri degli o- e p-nitro-difenil-selenio (comp. 13-14) con i corrispondenti nitro-p'-amino-difenil-selenio (comp. 19, 24, 24).

PARTE SPERIMENTALE. - Le misure spettrali sono state effettuate operando con Spettrofotometro Beckman D. U a quarzo su soluzioni alcoliche 1 : 100.000 (la legge di Beer è sufficientemente rispettata, ma nel caso del p-nitro-p'-amino-difenil-selenio si nota che la banda nell'U. V. si abbassa notevolmente di intensità col tempo, talché le misure non sono riproducibili che in soluzioni preparate estemporaneamente; la soluzione cloridrica è invece stabile, e pertanto al fenomeno è interessato il gruppo aminico; i risultati numerici sono riportati in tabella: i punti di flesso ovviamente approssimati, sono indicati tra parentesi.

Per la preparazione dei prodotti già descritti si sono di regola seguite le indicazioni della bibliografia (ved. tabella), apportando al caso alcune opportune varianti, come qui appresso indicate. Pure qui di seguito si trovano le preparazioni di alcuni composti della serie-III non ancora noti.

2-Nitro-seleno-anisolo (comp. 3). - È stato da noi preparato per metilazione del 2-nitro-fenil-seleno-cianato secondo la tecnica adottata da J. W. Baker, W. G. Moffit [7] per il 3-nitro-composto: a gr. 6 di nitro-fenil-selenocianato preparato secondo H. Bauer [13] si aggiungono 200 cc. di

acqua-alcool (1 : 5) preriscaldati sui 75-80°; si aggiungono quindi 3 gr. di idrato sodico in 15 cc. di acqua: si ha intensa colorazione violetta e totale dissoluzione del prodotto. Si addizionano ora 4 gr. di solfato dimetilico e si fa bollire a ricadere per 3 1/2 ore; dopo raffreddamento la soluzione viene versata in 5 volte il volume di acqua, e si estrae con etere. Il residuo dell'estratto eterico, seccato su cloruro di calcio, si distilla sotto vuoto raccogliendo la frazione di cuore Kp₁₃ 171-175. L'olio, ben tosto solifidifica per dare un prodotto giallo-oro, aghiforme, che ricristallizzato dall'alcool fonde a 70.5-71°:

trov. %:	N	6.70
per C ₇ H ₇ O ₂ NSe	calc.	6.48

2-Amino-seleno-anisolo (Comp. 6). - Il prodotto, preparato da Duncan G. Foster [14] per riduzione in alcool del nitro-metil-selenonio-diidrossido con nichel Raney, è descritto come olio con p. eb. Kp₄ 128°.

Il metodo da noi usato, è il seguente: 5 gr. di nitro-derivato, sospesi in 10 cc. di alcool, addizionati di 30 cc. di HCl ($d = 1.19$) e di 12 gr. di stagno, vengono scaldati a b. m. sino a totale dissoluzione dello stagno. Per raffreddamento si separa il clorostannato: dopo destannazione con H₂S, si ottiene il cloridrato dell'amina fondente a 209°:

trov. %:	N	6.32
per C ₇ H ₁₀ NSeCl	calc.	6.296

L'amina libera - ottenuta dal cloridrato con Na₂CO₃ - è un olio bollente a Kp₁₃ 156-157.

4-Amino-seleno-anisolo (comp. 7). - È stato preparato come il 3-amino-derivato per riduzione del 4-nitro-seleno-anisolo. Olio jalino, p. eb. Kp₁₅ 155-156:


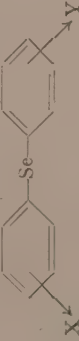
trov. %:	N	7.64
per C ₇ H ₉ NSe	calc.	7.53

2-Metil-difenil-seleniuro (comp. 9). - Il composto è stato da noi preparato seguendo la tecnica adottata da W. R. Gaithwaite e coll. [8] per il derivato p-metilico.

Gr. 100 di 2-metil-difenil-solfone e gr. 34 di selenio vengono intimamente mescolati e scaldati in un palloncino da 500 cc., munito di refrigerante ad aria: il riscaldamento su bagno metallico a 400° si fa durare sino a che cessi lo sviluppo di anidride solforosa. Si protrae il riscaldamento ancora per breve tempo (circa 20-30 min.); si distilla il residuo a temperatura non superiore ai 280° ed il distillato estratto con etere, viene essiccato e rettificato. Olio jalino Kp₁₄ 157-157.5:

trov. %:	N	31.98
per C ₁₃ H ₁₂ Se	calc.	31.96

TABELLA

N. d'ordine	Composto	Sostituenti		Punti caratteristici: soluzione alcoolica						P. eb. P. f. C°
				220-259 mμ		260-300 mμ		oltre 300 mμ		
		X	Y	λ	log·ε	λ	log·ε	λ	log·ε	
1		H		248	3.81	265	3.62	—	—	Kp ₁₀ 69-70
2		CH ₃ -p		248	3.81	270	3.58	—	—	Kp ₁₅ 107
3		NO ₂ -o		253	4.18	(275)	3.75	395	3.55	71
4		NO ₂ -m		252	4.12	—	—	345	2.92	30-1
5		NO ₂ -p		(253)	3.74	—	—	350	4.09	56
6		NH ₂ -m		229	4.26	275	3.41	—	—	Kp ₁₃ 156-7
							274	3.84	—	—
						298	3.41	—	—	
7		NH ₂ -p		240	4.06	(273)	3.78	—	—	Kp ₁₅ 155-6
8		H	H	255	3.97	(275)	3.67	—	—	Kp ₁₀ 159
9		H	CH ₃ -o	254	3.96	—	—	—	—	Kp ₁₄ 157.5
10		H	CH ₃ -m	237	3.82	(275)	3.67	—	—	Kp ₁₅ 183-5
				256	4.00					
11		H	CH ₃ -p	253	4.04	(275)	3.75	—	—	Kp ₂₀ 175-8
12		CH ₃ -p	CH ₃ -p	257	4.00	(275)	3.68	—	—	69
13		H	NO ₂ -o	246	4.18	(275)	3.79	386	3.62	91
14		H	NO ₂ -p	—	—	(265)	3.62	345	4.06	58
15		H	NH ₂ -o	248	4.18	—	—	304	3.59	35
16		H	N(Ac.) ₂ -o	252	3.95	(275)	3.70	—	—	60-60.5
17		H	NH ₂ -p	248	4.06	(274)	3.79	—	—	94
18		H	NHAc.	(248)	4.24	262	4.30	—	—	178
19		NO ₂ -o	N(CH ₃) ₂ -p	(258)	4.32	280	4.40	388 393	3.68	169
20		(*) NO ₂ -m	NH ₂ -p	—	—	260	4.35	360	2.68	127
21		NO ₂ -m	N(CH ₃) ₂ -p	(258)	4.30	279	4.42	(350)	3.07	98-9
22		NO ₂ -p	NO ₂ -p	252	4.09	—	—	344	4.14	170
23	(*) NO ₂ -p	NH ₂ -p	252	4.22	(265)	4.12	352	4.08	126	
24	NO ₂ -p	N(CH ₃) ₂ -p	—	—	(265)	4.19	350	4.07	180	
						280	4.32			

(*) In soluzione HCl N/1 le caratteristiche spettroscopiche sono quelle dei mononitro-derivati non sostituiti.

3-metil-difenil-seleniuro (comp. 10). — Seguendo la tecnica indicata da O. Behaghel [15] per il metil-difenil-seleniuro, si procede dapprima alla preparazione del reattivo di Grignard: 34 gr. di *m*-bromo-toluolo, 5 gr. di magnesio attivato da jodio e 200 cc. di etere si pongono a reagire in un pallone da 500 cc. per formare il reattivo di Grignard. La soluzione eterea si filtra rapidamente onde eliminare il magnesio inalterato, quindi sotto costante e vigorosa agitazione si aggiungono gr. 48 di bromuro di fenil-selenio [8]. Quando la colorazione rosso-bruna tende a scomparire (circa $\frac{3}{4}$ dell'aggiunta del bromuro di fenil-selenio) si scalda per $\frac{1}{2}$ ora a b.m. bollente. Quindi si raffredda con miscela frigorifera e si decompone il miscuglio di reazione con acido cloridrico, sempre mantenendo in bagno di ghiaccio il pallone di reazione. Si separa lo strato etereo da quello acquoso e si esaurisce quest'ultimo con altro etere; gli estratti eteri riuniti vengono lavati con soluzione di carbonato sodico e seccati su solfato sodico. Per eliminazione del solvente si ottiene un olio giallo-chiaro Kp_{15} 183–185:

	trov. %:	Se	32.01
per $C_{13}H_{12}Se$	calc.		31.96

4-Nitro-difenil-seleniuro (comp. 14). — È stato preparato secondo quanto descritto da O. Behaghel [10] per il derivato *o*-nitro: gr. 14 di *p*-nitro-bromo-benzolo, sciolti in 145 cc. di alcool vengono addizionati a b.m. di una soluzione di gr. 3.8 di KOH in 30 cc. di alcool/acqua 4:1; si aggiunge quindi una soluzione eterea di seleno-fenolo a piccole porzioni; si ha reazione vivace e separazione di bromuro potassico. Si lascia bollire a ricadere per due ore, filtrando poi a caldo. Per raffreddamento si separa un prodotto giallo che, ricristallizzato da alcool, si presenta in lunghi aghi prismatici a p. f. 58°:

	trov. %:	N	5.23
per $C_{12}H_9O_2NSe$	calc.		5.03

2-Amino-difenil-seleniuro (comp. 15). — Il prodotto ottenuto da O. Behaghel [10] per riduzione del nitro-derivato con cloruro stannoso, viene descritto come olio non cristallizzabile: la descrizione della preparazione peraltro non è affatto dettagliata. Sta di fatto però che — operando come qui descritto — si giunge, dopo distillazione del greggio di reazione, a un prodotto solido cristallino, fondente a 34.5°, in accordo con i dati di Cullinane, p. f. 35–36, che l'ottiene per riduzione con zinco ed acido solforico [16].

In palloncino a tre colli, munito di refrigerante a ricadere e di agitatore a valvola di mercurio, si pongono gr. 47 di cloruro stannoso e 60 cc. di acido cloridrico conc. Mantenendo una vigorosa agitazione si aggiungono a piccole porzioni gr. 10 di nitro-derivato sciolti in 200 cc. di alcool, e avendo cura di mantenere la temperatura del bagno esterno sui 50°. Dalla soluzione si separa il clorostannato, che viene versato a piccole porzioni in una soluzione di soda al 50 %: si estrae con etere l'olio che si forma. Dopo evapo-

razione del solvente il residuo viene distillato frazionatamente, raccogliendo la frazione Kp_{15} 198-199: per ulteriore rettificazione si ottiene un prodotto oleoso Kp_{11} 196, che in miscela frigorifera cristallizza in prismi: p. f. 34.5°:

trov. %:	N	5.88
per $C_{12}H_{11}NSe$	calc.	5.65

2-Diacetil-amino-difenil-seleniuro (comp. 16). - Gr. 1 del prodotto sopra descritto, vengono trattati con 3 cc. di anidride acetica, facendo bollire a ricadere a bagno d'olio a 160° per 3 ore. Si versa su ghiaccio e si ottiene un precipitato fioccoso incolore, che separato si cristallizza da alcool e si presenta in druse, p. f. 60-60.5°:

trov. %:	N	4.45	Se	24.03
per $C_{16}H_{15}NO_2Se$	calc.	4.22		23.76

3-Nitro-4'-amino-difenil-seleniuro (comp. 20). - Gr. 10 di ac. m-nitro-fenil-seleninico [17] vengono aggiunti di 40 cc. di anilina a bagno d'olio a 110-115° per 6 ore; si distilla in corrente di vapore l'eccesso di anilina ed il residuo oleoso viene estratto con acido cloridrico 1:1. Dal cloridrato, per neutralizzazione, si ottiene l'amina libera colorata in giallo-arancio. Cristallizza da alcool in romboedri fondenti a 127-128°:

trov. %:	N	9.62
per $C_{12}H_{10}N_2O_2Se$	calc.	9.56

3-Nitro-4'-dimetil-amino-difenil-seleniuro (comp. 21). - Gr. 9 di m-m'-dinitro-difenil-seleniuro sospesi in 24 cc. di tetracloruro di carbonio, a bagno di ghiaccio vengono aggiunti di 3 cc. di bromo. Si ha intensa colorazione rossa. Si concentra sotto vuoto, e fuori dal contatto dell'umidità, il liquido di reazione. Si riprende con etere il residuo e si addiziona con 10 cc. di dimetil-anilina, e il tutto viene scaldato a b.m. per circa 30 minuti. Dopo aver svaporato l'etere, il residuo viene ripreso con acido cloridrico 1:5, ottenendosi un prodotto cristallino, che viene cristallizzato dall'alcool; bastoncini, p. f. 98-99°:

trov. %:	N	8.82
per $C_{14}H_{14}N_2O_2Se$	calc.	8.72

4-Nitro-4'-amino-difenil-seleniuro (comp. 23). - Gr. 2,7 di 4-4'-dinitro-difenil-seleniuro vengono sciolti in 275 cc. di alcool, e aggiunti di cc. 5,4 di disolfuro sodico al 20%. Si fa bollire a b.m. a ricadere per 3/4 di ora: si filtra a caldo facendo cadere la soluzione alcoolica in 5 volumi di acqua. Dopo riposo di 12 ore si separa un prodotto giallo-oro. Cristallizza da alcool in scagliette. P. f. 126°:

trov. %:	N	9.70
per $C_{12}H_{10}N_2O_2Se$	calc.	9.56

BIBLIOGRAFIA.

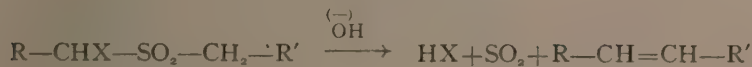
- [1] R. PASSERINI, G. RIGHI, « Boll. sci. fac. Chim. Ind. », 10, 163 (1952).
 [2] A. MANGINI, R. PASSERINI, « J. Chem. Soc. », 1952, 1168; A. MANGINI e coll.: Note II, III, IV e V in corso di stampa sulla « Gazz. Chim. ital. ».
 [3] L. CHIERICI, R. PASSERINI, questi « Rendiconti » [8], 14, 99 (1953).
 [4] A. MANGINI, R. PASSERINI, ib. ib. [8], 11, 370 (1951).
 [5] L. CHIERICI, H. LUMBROSO, R. PASSERINI, ricerche in corso di stampa sul « Bull. Soc. Chim. France ».
 [6] Queste ricerche.
 [7] J. W. BAKER, W. G. MOFFIT, « J. Chem. Soc. », 1939, 1727.
 [8] W. ROBINSON GAITHWAITE e coll., ib. ib., 1928, 2287-2302.
 [9] H. M. LEICESTER, *Organic Syntheses, Collective*, vol. II, p. 238.
 [10] O. BEHAGHEL, K. HOFMAN, « Ber. », 72, 587 (1939).
 [11] Ib. ib. 66, 708 (1933).
 [12] JEAN MATTI, « Bull. Soc. Chim. France », 1940, 617.
 [13] « Ber. », 46, 92 (1913).
 [14] « J. Am. Chem. Soc. », 63, 1361 (1941).
 [15] « Ber. », 72, 702 (1939).
 [16] « J. Chem. Soc. », 1939, 151.
 [17] PYMAN. ib. ib., 1919, 169.

Chimica organica. — *Sulla reazione di Ramberg e Bäcklund*^(*).

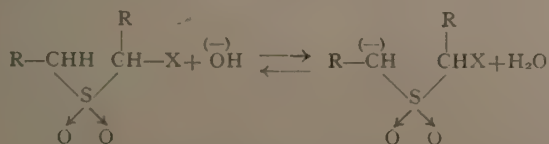
Nota^(**) di TULLIO BACCHETTI e AMEDEO GALLONE ARNABOLDI, presentata dal Socio L. CAMBI.

Ramberg e Bäcklund⁽¹⁾ hanno scoperto nel 1940 una interessante reazione fornita dagli α -alogenosolfoni; questi corpi, trattati con alcali, eliminano una mole di idracido, una di SO_2 e danno luogo alla formazione di olefine secondo l'equazione:

$$x = \text{alogeno}$$



Bordwell e Cooper⁽²⁾, dopo aver studiato la cinetica della reazione, propongono il seguente schema interpretativo:

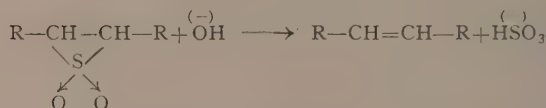
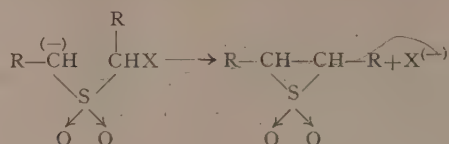


(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1953.

(1) « Am. Chem. Abstracts », 34, 1725 (1940).

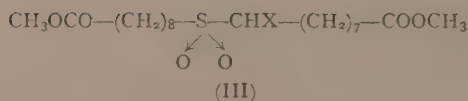
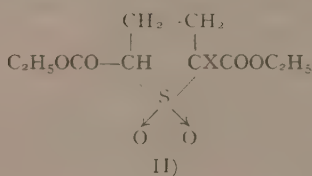
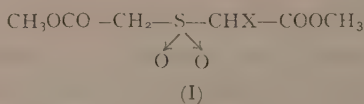
(2) « J. Am. Chem. Soc. », 73, 5187 (1951).



schema successivamente accettato anche da M. W. Cronyn⁽³⁾. Dal punto di vista teorico la reazione è senza dubbio interessante, ma la nostra attenzione è stata richiamata soprattutto dagli elevati rendimenti con cui le corrispondenti olefine possono essere ottenute.

La nostra ricerca aveva tre scopi:

1° effettuare l'idrolisi alcalina dell'estere α -clorosolfondiacetico per rivelare se la presenza di due gruppi carbossilici in posizione α rispetto al gruppo $-\text{SO}_2-$ influisse sull'andamento della reazione in modo da farle seguire un decorso diverso da quello sopra accennato. In caso contrario riconoscere quale, tra gli acidi fumarico e maleico, si forma di preferenza. Le olefine preparate finora con questo metodo appartengono infatti talvolta alla serie *cis* (come nel caso del butene-2⁽¹⁾), talvolta alla serie *trans* (come lo stilbene⁽²⁾).



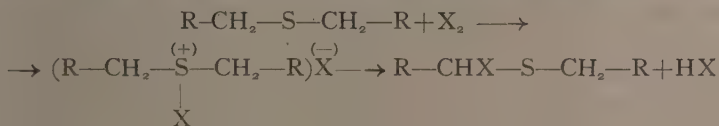
2° riconoscere i prodotti dell'idrolisi effettuata sul composto (II). L'interpretazione di Borwell renderebbe infatti molto improbabile la formazione degli acidi 1-2-ciclobuten-1-2-bicarbossilici per la prevedibile notevole tensione che dovrebbe presentare l'intermedio ad anello diossitiaciclopropanico;

(3) « J. Am. Chem. Soc. », 74, 1225 (1952).

3° terzo scopo era quello di elaborare un nuovo metodo di sintesi di acidi bicarbossilici a lunga catena non saturi, con numero pari di atomi di carbonio, che interessano grandemente la chimica dei composti macrociclici.

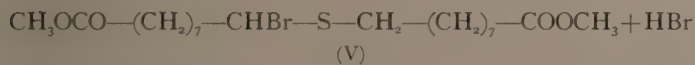
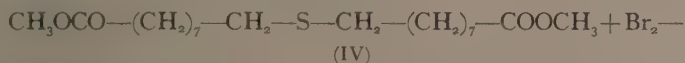
La ricerca è stata ostacolata dalla difficoltà di preparazione degli α -alogenosolfuri e dei corrispondenti solfoni. L'estere dimetilico dell'acido α -clorosolfondiacetico era già noto ⁽⁴⁾, non si conoscevano però le rese di reazione e queste purtroppo si sono rivelate assai scarse. Comunque, sottoposto alla idrolisi alcalina, esso ha fornito l'acido fumarico con un rendimento di circa il 50% del teorico. La ricerca dell'acido maleico ha avuto esito negativo.

Lo stesso metodo di alogenazione ⁽⁴⁾ che aveva generalmente fornito risultati soddisfacenti, è stato impiegato nella preparazione del composto (III). Il meccanismo secondo il quale l'alogeno viene introdotto in posizione α rispetto all'atomo di zolfo viene interpretato da Böhme ed altri con lo schema:



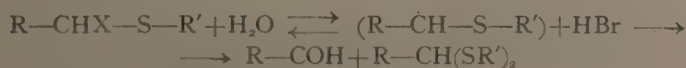
La reazione era stata eseguita finora su composti del tipo dibenzil-solfuro, metil-benzil-solfuro ecc., vale a dire su sostanze che presentavano libera, rispetto all'alogenazione soltanto la posizione in α all'atomo di zolfo.

Nel caso da noi prescelto (formula IV), oltre alle posizioni α all'atomo di zolfo, esistono altre posizioni aggredibili dall'alogeno, in particolare quelle in α ai gruppi carbometossilici. Può forse essere questa la causa o una delle cause per cui il prodotto (V), da noi preparato per bromurazione del solfuro (IV), non ha potuto essere ottenuto ad un sufficiente grado di purezza da consentire una conferma analitica.



La conferma della sua presenza nel prodotto di reazione è stata peraltro raggiunta dal riconoscimento della semialdeide azelaica per idrolisi con acqua. È infatti noto ⁽⁵⁾ che gli α -alogenosolfuri sono idrolizzabili secondo uno schema perfettamente corrispondente a quello degli α -alogenoeteri e danno origine ad aldeidi accanto al mercaptale:

OH



(4) BÖHME, FISCHER, FRANCK, « Ann. », 563, 54 (1949).

(5) BÖHME, SELL, « Ber. », 81, 123 (1948).

Risultata inattuabile ogni purificazione, il prodotto della bromurazione venne ulteriormente elaborato.

Sottoposto ad ossidazione con acido monoperftalico e successivamente ad idrolisi alcalina, ci riuscì alla fine di isolare se pure con rendimento minimo, l'estere dimetilico dell'acido 9-10-octadecen-1-18-dioico riconosciuto, nella sua forma trans⁽⁶⁾, all'analisi centesimale, al punto di ebollizione, al punto di fusione ed alla colorazione con tetranitrometano.

La ricerca eseguita a partire dall'acido 2-5-tiofanbicarbossilico non ha avuto esito positivo. Nonostante i tentativi effettuati in condizioni diverse, non si poté pervenire ad isolare alcun composto che potesse illuminarci sul decorso delle reazioni. Né miglior risultato ci forniva la prova di bromurazione del corrispondente solfone.

Nel corso della ricerca abbiamo inoltre preparato una serie di derivati dell'acido 2-5-tiofanbicarbossilico, tra questi l'estere metilico il quale, a differenza del prodotto ottenuto da Turner e Hill⁽⁷⁾ che fonde, secondo questi Autori a 40°, mostra invece un punto di fusione di 87° dopo accurate purificazioni.

Tra i prodotti di ossidazione abbiamo infine ottenuto l'acido cis-1-ossitiofan-2-5-bicarbossilico, caratterizzato attraverso la sua ammidine ed il diossi derivato.

PARTE SPERIMENTALE.

A) *Diastere metilico dell'acido α -clorosolfondiacetico*. - Il composto è stato ottenuto seguendo esattamente il procedimento di Böhme⁽⁴⁾. Gli autori tacciono peraltro i rendimenti di reazione e, nell'accertarne i valori, abbiamo notato che la formazione del prodotto solido a P.F. 113° è molto bassa, mentre si formano grandi quantità di prodotto oleoso il quale però distilla, con evidenti segni di decomposizione, alla stessa temperatura del solido e fornisce un'analisi centesimale in buon accordo col calcolato:

	trov. %:	C 30,6	H 3,95	Cl 14,0	S 13,8
per C ₆ H ₉ O ₆ ClS	calc. %:	C 30,14	H 3,71	Cl 14,5	S 13,1

B) *Idrolisi alcalina*. - L'idrolisi è stata eseguita sul prodotto a p. f. 113° secondo la tecnica generale descritta da Bordwell⁽²⁾ per altri casi, mantenendo il miscuglio di reazione a 50° per due ore.

Terminato il riscaldamento la soluzione è stata concentrata nel vuoto ed infine acidificata con H₂SO₄. Si è notato un forte svolgimento di SO₂ e, dopo un certo tempo, è cristallizzato l'acido fumarico, riconosciuto dalle sue caratteristiche fisiche e dal suo etere p-nitro-benzilico. Rendimento di circa il 50 % del teorico.

La stessa operazione ripetuta sulla porzione liquida, di cui al paragrafo precedente, ha dato praticamente gli stessi risultati.

(6) RUZICKA, PLATTNER, WIDMER, « Helvetica, Chim. Acta », 25, 1086 (1942).

(7) « J. Org. Chem. », 14, 476 (1949).

Dopo aver filtrato l'acido fumarico, il liquido madre è stato alcalinizzato e portato a secco nel vuoto. Il residuo salino acidificato ed estratto con alcool non ha rivelato presenza di acido maleico.

C) *Estere dimetilico dell'acido 10-tiaenneadecan-1-19-dioico*. - La soluzione di Na_2S viene preparata sciogliendo 12,5 g di sodio in 300 cm^3 di alcool metilico, saturando metà della soluzione con H_2S ed aggiungendola successivamente alla seconda metà.

In un pallone a quattro colli da un litro munito di agitatore meccanico imbuto a rubinetto e refrigerante a ricadere, si introducono 135 g di ω -bromopelargonato di metile⁽⁸⁾, 1 g di KJ e 200 cm^3 di alcool metilico assoluto. Dall'imbuto a rubinetto si fa gocciolare lentamente la soluzione di Na_2S mentre il pallone viene riscaldato cautamente per accelerare la reazione. Dopo 24 ore essa è terminata, e raffreddando la soluzione con ghiaccio precipita una notevole massa di solfuro accanto a poco NaBr.

Ricristallizzando da alcool metilico assoluto si ottengono 56 g di prodotto. Per evaporazione della soluzione metil alcolica primitiva e delle acque di cristallizzazione, si separa una ulteriore quantità di solfuro che dopo purificazione pesa g 15. Residua un olio rosso contenente poco solfuro peraltro non recuperabile. Si sono ottenuti in totale 71 g con una resa del 71 %. Il prodotto ricristallizzato da alcool metilico fonde a $45^\circ\text{--}46^\circ$ e distilla a 210° a 0,04 mm con evidente tendenza alla decomposizione.

All'analisi:

	trov. %:	C 64,18	H 10,1
per $\text{C}_{20}\text{H}_{38}\text{O}_4\text{S}$	calc. %:	C 64,2	H 10,15

D) *Acido 10-tiaenneadecan-1-19-dioico*. - 4 g. dell'estere metilico (C) trattati con 50 cm^3 di NaOH metil alcolica 0,5/N vengono riscaldati a ricadere per un'ora. Dopo raffreddamento si filtra il sale sodico e lo si lava con etere, si acidifica con HCl e si separa per filtrazione alla pompa l'acido libero. Si lava con acqua si essicca e cristallizza da alcool metilico. p. f. = $96^\circ\text{--}97^\circ$.

All'analisi:

	trov. %:	C 65,15	H 5,18
per $\text{C}_{18}\text{H}_{32}\text{O}_4\text{S}$	calc. %:	C 65,1	H 5,2

E) *Estere dimetilico dell'acido (10'-10'-diossi)-10-tiaenneadecan-1-19-dioico*. - A 5 g di estere metilico (C) sciolti in 50 cm^3 di acido acetico, viene aggiunta lentamente una soluzione di 3,6 g di H_2O_2 al 36 %, in acido acetico. Dopo 24 ore il miscuglio viene evaporato nel vuoto. Il residuo solido cristallizzato da alcool metilico pesa g 3,5. Resa 65 %. P.F. = $88^\circ\text{--}89^\circ$.

All'analisi:

	trov. %:	C 59,1	H 9,45
per $\text{C}_{20}\text{H}_{38}\text{O}_6\text{S}$	calc. %:	C 59,2	H 9,35

(8) HUNSDIECKER, « Ber. », 75, 291 (1942).

F) *Acido (10'-10'-diossi)-10-tiaenneadecan-1-19-dioico*. - A 2 g di acido (D) sciolti a caldo in 25 cm³ di acido acetico, vengono aggiunti 2 g di H₂O₂ al 30 % sciolti in 10 cm³ dello stesso solvente.

Si scalda la soluzione a b.m. per un'ora, si evapora l'acido acetico ed il residuo solido che si ottiene viene cristallizzato da alcol metilico. Ottenuti g 1,85 con una resa dell'85 % p. f. = 147°-148°.

All'analisi:

	trov. %:	C 57,1	H 9,01
per C ₁₈ H ₃₂ O ₆ S	calc. %:	C 57	H 8,89

G) *Bromurazione del solfuro (C)*. - 32 g del solfuro (C) vengono sciolti in 150 cm³ di CHCl₃ anidro e raffreddati a -20°. Alla soluzione si aggiungono 14 g di Br₂ secco in 50 cm³ di CHCl₃ anch'essi raffreddati a -20°. Si separa subito un composto solido cristallino giallo-arancione, stabile soltanto a bassa temperatura. Si filtra il solido a circa -15° per evitare che il prodotto fonda. La massa filtrata congloba molto CHCl₃. Infatti elevandosi di poco la temperatura, la massa fonde e costituisce uno strato oleoso che galleggia sullo strato di CHCl₃. Quando la temperatura raggiunge i 0° comincia a svolgersi HBr. Dopo 12 ore lo strato oleoso rosso si è quasi completamente disciolto nel CHCl₃ mentre cominciano a formarsi prodotti peciosi i quali, prolungando il tempo di riposo, aumentano rapidamente. Evaporato il CHCl₃ nel vuoto, residua un olio giallo-arancione. Il prodotto è instabile e tende ad annerire; non può essere distillato perché si decompone a temperature superiori ai 100°.

All'analisi il contenuto in Br si è rivelato circa il 20 % del teorico. La bromurazione è quindi solo parziale. Infatti, dalla soluzione dalla quale era stato filtrato l'addotto, è stato recuperato circa il 50 % del solfuro non reagito, mentre un'ulteriore quantità la si ritrova più avanti sotto forma di solfone.

La prova che l'alogeno occupa effettivamente la posizione in α all'atomo di solfo è stata eseguita come segue. L' α -bromosolfuro posto a ricadere con H₂O per 4 ore svolge lentamente HBr. Alla fine si raffredda il liquido sul quale galleggia un leggero strato oleoso.

Questo strato che mostra carattere nettamente riducente viene ossidato con H₂O₂.

Al termine del potere ossidante, lo strato oleoso viene distillato nel vuoto e raccolta la frazione che passa tra 155° e 160° a circa 2 mm.

Questa frazione, che mostra carattere acido, e fonde intorno ai 20°, viene saponificata con KOH alcolica. Per acidificazione del residuo, dopo aver allontanato l'alcol è stato riconosciuto l'acido azelaico dal punto di fusione in miscela con un campione autentico.

H) *Ossidazione del prodotto (G)*. - Il liquido oleoso contenente il bromosolfuro, viene sciolto in etere e trattato con acido monoperftalico in soluzione eterea. La reazione è esotermica. Dopo tre giorni il potere ossidante della soluzione è molto diminuito e si può ritenere la reazione ultimata.

Dopo aver filtrato l'acido ftalico che si separa, si evapora l'etere. Residua un olio giallo chiaro da cui si separa un solido cristallino che l'analisi rivela essere il solfone (E).

Il prodotto liquido, purificato per successivi trattamenti con carbone animale in solventi diversi ed evaporando gli stessi ogni volta nel vuoto, ha fornito all'analisi valori molto discordanti e variabili.

Un'analisi media è la seguente:

	trov. %:	S 5,6	Br 20,1
per $C_{20}H_{37}O_6BrS$	calc. %:	S 6,6	Br 16,5

I) *Idrolisi alcalina*. — Il liquido oleoso proveniente dall'ossidazione, viene sciolto in diossano. A questa soluzione si aggiungono 3,9 g di NaOH sciolti in 20 cm³ di H₂O. La soluzione risultante viene riscaldata, con agitazione, per due ore. Acidificando lo strato acquoso si separa un olio rosso. Si ha contemporaneamente sviluppo di SO₂ la cui presenza è confermata anche nella soluzione. Dall'olio rosso si separa poi un solido che l'analisi conferma essere l'acido 10'-10'-diossi-10-tiaenneadecan-1-19-dioico (F) con f. p. 148°-150°.

Per separare l'acido non saturo, la miscela degli acidi costituenti l'olio rosso viene metilata con diazometano e quindi distillata a pressione ridotta. La distillazione è difficile perché il prodotto tende a decomporsi per riscaldamento oltre i 150°. Si è riusciti però a separare, oltre ad una testa bas-sobollente (130° a 1,5 mm), che sembra essere costituita essenzialmente da estere azelaico, una seconda frazione (195° a 1 mm) solida a temperatura ambiente, con P.F. = 32°.

L'analisi centesimale come pure la colorazione gialla con tetranitro-metano, ha confermato trattarsi dell'estere dell'acido 9-10-octadecen-1-18-dioico ⁽⁶⁾.

All'analisi:

	trov. %:	C 70,2	H 10,61
per $C_{20}H_{36}O_4$	calc. %:	C 70,3	H 10,55

L) *Acido 1-ossi-tiofan-2-5-bicarbossilico cis*. — Ad una soluzione di 20 g di acido 2-5-tiofanbicarbossilico cis in 100 cm³ di acido acetico raffreddata a 0° si aggiungono lentamente 18 g di H₂O₂ al 40% (1 mole per mole di prodotto). Si lascia a riposo per 2 giorni, si concentra sotto vuoto ed il residuo solido viene filtrato, digerito in benzolo, filtrato e seccato. Rendimento pari al 65% del teorico. p. f. 189°.

All'analisi:

	trov. %:	C 37,7	H 4,1	S 16,70
per $C_6H_8O_5S$	calc. %:	C 37,5	H 4,16	S 16,69

M) *La diammidè* è stata preparata nel modo seguente: 0,83 g di prodotto vengono trattati con 3 g di cloruro di tionile fino a completa dissoluzione. Eliminato l'eccesso di SOCl₂ nel vuoto, si aggiungono al residuo 20 cm³ di benzolo anidro, quindi si fa gorgogliare nella soluzione una lenta

corrente di ammoniaca gassosa raffreddando energicamente con miscela frigorifera. L'ammide che precipita viene cristallizzata da poco alcol metilico. p. f. = 200°.

All'analisi:

	trov. ‰: N 14,6	S 16,91
per $C_6H_{10}O_3N_2S$	calc. ‰: N 14,73	S 16,87

N) *Acido 1-1-diossi-tiofan-2-5-bicarbossilico cis.* - 8,5 g. dell'acido (1) vengono posti a reagire con 6 g di H_2O_2 al 40 ‰ in soluzione acetica. Dopo 7 giorni il solvente viene eliminato mentre si separa un prodotto cristallino che si filtra e si lava con poca acqua.

Cristallizzando da acqua si ottengono 7,5 g di un solido con p. f. = 325°.

Alla temperatura di fusione esso si decompone con svolgimento di CO_2 .

All'analisi:

	trov. ‰: S 15,55
per $C_6H_8O_6S$	calc. ‰: S 15,41

O) *1-1-diossi-tiofan-2-5-dicarbossilato d'etile cis.* - 5,8 g di 2-5-tiofandicarbossilato d'etile cis⁽⁷⁾ vengono sciolti in 25 cm³ di acido acetico glaciale. Ad essi si aggiungono lentamente e raffreddando 15 cm³ di H_2O_2 al 30 ‰. Dopo un riposo di 8 giorni si evapora il solvente nel vuoto. Il residuo viene distillato a 155° a 1 mm Hg ed il liquido ottenuto solidifica per raffreddamento e mostra un p. f. = 55°-60°. Dopo cristallizzazione da alcol p. f. = 87°.

All'analisi:

	trov. ‰: S 12,2	12,02
per $C_{10}H_{16}O_6S$	calc. ‰: S 12,1	

Il medesimo composto è stato ottenuto esterificando l'acido (N).

Chimica inorganica. - *Complessi isonitrilici del cobalto trivalente ioduri, bromuri e perclorato alogenuri⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di ADRIANO SACCO, presentata dal Socio L. CAMBI.

In lavori precedenti vennero descritti i complessi isonitrilici del cobalto bivalente⁽³⁾ e del cobalto monovalente⁽⁴⁾, rispettivamente del tipo $Co(CNR)_4X_2$ e $Co(CNR)_5X$. Nelle Note relative ai complessi del cobalto bivalente venne posto in evidenza come lo ioduro cobaltoso tetraisonitrilico possa ottenersi in due forme, diverse per colore e solubilità, l'una dia-

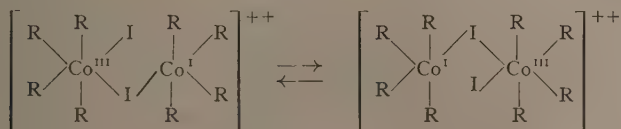
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1953.

(1) L. MALATESTA e L. GIUFFRÈ, « Rend. Accad. Lincei » [8], 11, 206 (1951); L. MALATESTA e A. SACCO, « Gazz. Chim. It. ». Nota in corso di stampa.

(2) L. MALATESTA e A. SACCO, « Zeit. anorg. allg. Ch. ». Nota in corso di stampa.

magnetica detta α e l'altra paramagnetica detta β . Per spiegare il diamagnetismo delle forme α vennero ammesse le strutture mesomere:



nelle quali gli atomi di cobalto in risonanza sono l'uno trivalente ed esa-coordinato, l'altro monovalente e pentacoordinato.

La facile riducibilità dei complessi isonitrilici del cobalto bivalente e la notevole stabilità di quelli del cobalto monovalente venne già descritta ⁽²⁾; era quindi interessante cercare di isolare anche i complessi isonitrilici del cobalto trivalente e studiarne la relativa stabilità rispetto a quelli di Co^{II} e di Co^{I} . In questo senso vennero intraprese le ricerche di cui espongo i risultati.

I dialogenuri di tetraisonitrilcobalto si possono ossidare molto facilmente con ossidanti blandi in fase omogenea, ad esempio con iodio e con bromo in soluzione e a freddo. Con ossidanti più energici, ad esempio con acqua ossigenata e con nitriti alchilici in ambiente acido, è preferibile operare in fase eterogenea per evitare che l'ossidazione porti a una parziale demolizione del complesso. A questo proposito è interessante rilevare la notevole stabilità del legame cobalto-isonitrilico rispetto all'ossidazione con nitrito alchilico: infatti, mentre nei complessi arilisonitrilici di altri metalli, ad esempio del rame, la molecola dell'isonitrile viene idrolizzata ad arilammina e diazotata dall'acido nitroso con formazione in definitiva degli alogeno-cuprati (II) di diazonio $(\text{RNN})_2[\text{CuX}_4]$, nei complessi arilisonitrilici del cobalto si ha solo variazione nello stato di ossidazione del metallo.

Vennero preparate tre serie di composti, corrispondenti a $\text{Co}(\text{CNR})_4 \cdot \text{J}_2(\text{ClO}_4)$, $\text{Co}(\text{CNR})_5\text{J}(\text{ClO}_4)_2$, $\text{Co}(\text{CNR})_4\text{X}_3(\text{X} = \text{J, Br})$. Non fu possibile invece di isolare composti del tipo $\text{Co}(\text{CNR})_6(\text{ClO}_4)_3$; si deve supporre che questi ultimi, i quali implicherebbero una notevole concentrazione di carica effettiva sul metallo, non siano stabili per il principio di elettronegatività di Pauling.

Trattando i trialogenuri di tetraisonitrilcobalto con perclorato d'argento nel rapporto molare di 1 a 2 e di 1 a 3 si ottennero solo composti del tipo $[\text{Co}(\text{CNR})_5\text{J}](\text{ClO}_4)_2$; il diperclorato di penta-benzilisonitril-iodo-cobalto è un composto particolarmente stabile: trattato, in soluzione di cloruro di metilene, con soluzioni anche concentrate di perclorato d'argento in benzolo o toluolo si mantiene inalterato e può essere recuperato quantitativamente; i diperclorati di penta-*o*-tolilisonitril-iodo-cobalto e di penta-*p*-tolilisonitril-iodo-cobalto sono invece meno stabili e, per tratta-

mento con perclorato d'argento in condizioni analoghe, vengono completamente demoliti ⁽³⁾.

I diperclorati di penta-isonitril-iodo-cobalto (III), addizionati mole a mole con gli ioduri di penta-isonitril-cobalto (I) danno luogo alla formazione dei complessi isonitrilici diamagnetici del cobalto bivalente, identici ai perclorati-ioduri cobaltoso-isonitrilici già descritti ⁽²⁾. Il modo di formazione di questi complessi e la loro colorazione molto più intensa, sia allo stato cristallino che in soluzione, di quelli di Co (I) e di Co (III) - da cui si ottengono - sembrano giustificare pienamente le strutture mesomere di risonanza loro assegnate, cui ho accennato.

PARTE SPERIMENTALE. - I complessi isonitrilici del cobalto (II) e del cobalto (I) vennero preparati dai sali cobaltosi e gli isonitrili secondo le modalità descritte nelle Note precedenti ^{(1) (2)}.

Le analisi vennero eseguite: il cobalto per via elettrolitica, l'azoto secondo Dumas e secondo Kjeldahl, gli alogenuri parte con la bomba di Parr e parte secondo Carius.

La suscettività magnetica venne determinata con la bilancia di Gouy: tutti i composti descritti risultarono nettamente diamagnetici.

1. - $[\text{Co}(\text{p-CH}_3 \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{NC})_4\text{I}_2](\text{ClO}_4)$.

a) Una sospensione di g 6 di diioduro di tetra-p-tolilisonitrilcobalto in cm^3 40 di alcool etilico venne trattata con cm^3 3 di nitrito d'amile e, a goccia a goccia, con una soluzione alcoolica di g 2 di acido perclorico 60%. Dopo aver lasciato a sé la miscela per circa 30', agitando di tanto in tanto, si filtrò alla pompa e il precipitato venne ricristallizzato più volte da cloruro di metilene per aggiunta di alcool. Resa 60%.

Cristalli prismatici di colore marrone scuro, solubili in cloruro di metilene e cloroformio con colorazione rosso-viola, insolubili in alcool.

Analisi

trov. % N. 6,41; Cl 4,08; J 28,76; Co 6,75
per $\text{C}_{32}\text{H}_{28}\text{O}_4\text{N}_4\text{ClI}_2\text{Co}$. calc. % N. 6,36; Cl 4,03; J 28,85; Co 6,70

b) Una sospensione di g 6 di diioduro di tetra-p-tolilisonitrilcobalto in cm^3 40 di alcool etilico venne addizionata di g 2 di acido perclorico 60% e di g 5,5 di acqua ossigenata 36%. Dopo aver lasciato a sé la miscela per circa 30', si filtrò alla pompa e il precipitato venne ricristallizzato più volte

(3) Questa diversità di comportamento dei complessi del cobalto con gli isonitrili alifatici e con gli isonitrili aromatici non è limitata alla maggior stabilità dei diperclorati di pentaalchilisonitril-iodo-cobalto (III) rispetto agli analoghi composti arilisonitrilici, ma si estende agli alogenuri e ai perclorati cobalto II alchilisonitrilici, assai più difficilmente riducibili dei corrispondenti complessi cobalto (II)-arilisonitrilici. Le ricerche, tuttora in corso, su questi complessi del cobalto II con gli isonitrili della serie alifatica saranno oggetto di una prossima pubblicazione.

da cloruro di metilene per aggiunta di alcool. Il prodotto si presenta identico a quello ottenuto operando secondo *a*). Resa 63 %.

Analisi

	trov. %	N	6,29;	Cl	3,99;	J	29,00;	Co	6,72
per $C_{32}H_{28}O_4N_4ClJ_2Co$	calc. %	N	6,36;	Cl	4,03;	J	28,85;	Co	6,70

c) g 5 di perclorato di penta-*p*-tolilisonitrilo-cobalto sciolti in cm^3 60 di cloruro di metilene vennero trattati, a goccia a goccia e sotto agitazione, con g 2,030 di iodio sciolti nella minima quantità di cloruro di metilene. Il prodotto venne poi precipitato per cauta aggiunta di alcool e ricristallizzato per la stessa via. Resa 93 %. Il prodotto si presenta identico a quelli ottenuti operando secondo *a*) e *b*).

Analisi

	trov. %	N	6,31;	Cl	4,01;	J	28,74;	Co	6,68
per $C_{32}H_{28}O_4N_4ClJ_2Co$	calc. %	N	6,36;	Cl	4,03;	J	28,85;	Co	6,70

2. - $[Co(2-Cl, 6-CH_3 \cdot C_6H_3 \cdot NC)_4J_2](ClO_4)$.

g 6 di diioduro di tetra (2-cloro, 6-metil, fenilisonitril)-cobalto vennero trattati con cm^3 1 di nitrito d'amile e con una soluzione alcoolica di g 1,5 di acido perclorico 60 %. La miscela semisolido, dopo essere stata lasciata a sé per qualche minuto, venne portata in soluzione con la minima quantità di cloruro di metilene; il prodotto venne precipitato da questa soluzione per cauta aggiunta di alcool etilico e ricristallizzato per la stessa via. Resa 61 %.

Cristalli prismatici color marrone, solubili in cloruro di metilene e cloroformio con colorazione rosso-viola, insolubili in alcool.

Analisi

	trov. %	N	5,58;	Cl	17,60;	J	24,61;	Co	5,74
per $C_{32}H_{24}O_4N_4Cl_5J_2Co$	calc. %	N	5,50;	Cl	17,42;	J	24,93;	Co	5,79

3. - $[Co(C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot NC)_5J](ClO_4)_2$.

a) A una sospensione di g 4 di diioduro di tetrabenzilisonitrilcobalto in cm^3 50 di alcool etilico vennero aggiunti cm^3 2 di nitrito d'amile e cm^3 0,7 di acido perclorico 60 %. La miscela venne debolmente scaldata a b. m. fino a che tutti i cristalli verdi dello diioduro furono trasformati in un precipitato color rosso ciclamino che venne filtrato alla pompa, ridisciolti in cloruro di metilene e riprecipitato con alcool etilico. Resa g 3.

Cristalli tabulari color rosso ciclamino, solubili in cloruro di metilene e in cloroformio con colorazione rosso ciliegia, insolubili in alcool.

Analisi

	trov. %	N	7,24;	Cl	7,20;	J	13,25;	Co	6,08
per $C_{40}H_{35}O_8N_5Cl_5JCo$	calc. %	N	7,22;	Cl	7,32;	J	13,10;	Co	6,08

b) La preparazione venne ripetuta con la sola variante d'aver usato per l'ossidazione cm^3 2 di acqua ossigenata 36% anziché cm^3 2 di nitrito d'amile. Si ottennero g 3,2 di prodotto identico a quello preparato operando secondo a).

Analisi

	trov. %	N 7,20;	Cl 7,35;	J 13,00;	Co 6,09
per $\text{C}_{40}\text{H}_{35}\text{O}_8\text{N}_5\text{Cl}_2\text{JCo}$	calc. %	N 7,22;	Cl 7,32;	J 13,10;	Co 6,08

c) A g 6,5 di bensilisonitrile in cm^3 60 di alcool etilico vennero aggiunti g 4,25 di perclorato cobaltoso eptaidrato sciolti in cm^3 40 di alcool. La soluzione verde risultante, contenente il complesso $\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\cdot\text{CH}_2\cdot\text{NC})_5\cdot(\text{ClO}_4)_2$, venne trattata a goccia a goccia e sotto agitazione con g. 1,375 di iodio sciolto nella minima quantità di cloruro di metilene. Il composto venne infine precipitato per cauta aggiunta di etere isopropilico e ricristallizzato da cloruro di metilene per aggiunta di etere. Resa g 7,5 di prodotto identico a quelli ottenuti operando secondo a) e b).

Analisi

	trov. %	N 7,19;	Cl 7,28;	J 13,04;	Co 6,07
per $\text{C}_{40}\text{H}_{35}\text{O}_8\text{N}_5\text{Cl}_2\text{JCo}$	calc. %	N 7,22;	Cl 7,32;	J 13,10;	Co 6,08

d) g 3 di $[\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\cdot\text{CH}_2\cdot\text{NC})_5\text{J}](\text{ClO}_4)_2$ sciolti in cloruro di metilene vennero trattati, sotto agitazione, con perclorato d'argento in forte eccesso rispetto alla quantità calcolata, sciolto in benzolo. Non si notò alcuna reazione, e dalla miscela, per aggiunta di etere isopropilico, venne recuperato il prodotto iniziale con resa pressoché teorica.

Analisi

	trov. %	N 7,20;	Co 6,09
per $\text{C}_{40}\text{H}_{35}\text{O}_8\text{N}_5\text{Cl}_2\text{JCo}$	calc. %	N 7,22;	Co 6,08

4. - $[\text{Co}(\text{o-CH}_3\cdot\text{C}_6\text{H}_4\cdot\text{NC})_5\text{J}](\text{ClO}_4)_2$.

g 5 di diperclorato di penta-*o*-tolilisonitrilo-cobalto sciolti in cm^3 50 di cloruro di metilene vennero trattati a goccia a goccia e sotto agitazione con la quantità calcolata di iodio sciolto in cloruro di metilene. Il composto venne poi precipitato per cauta aggiunta di etere isopropilico e ricristallizzato per la stessa via.

Cristalli prismatici color marrone scuro; schiacciati in polvere fine presentarono una colorazione viola; solubili in cloruro di metilene e cloroformio con colorazione rosso-viola, insolubili in alcool.

Analisi

	trov. %	N 7,15;	Cl 7,40;	J 13,10;	Co 6,05
per $\text{C}_{40}\text{H}_{35}\text{O}_8\text{N}_5\text{Cl}_2\text{JCo}$	calc. %	N 7,22;	Cl 7,32;	J 13,10;	Co 6,08

5. - $[\text{Co}(\text{p-CH}_3\cdot\text{C}_6\text{H}_4\cdot\text{NC})_5\text{J}](\text{ClO}_4)_2$.

a) g 4 di diperclorato di penta-*p*-tolilisonitrilo-cobalto sciolti in cm^3 30 di cloruro di metilene vennero trattati a goccia a goccia con la quan-

tità calcolata di iodio sciolto in cloruro di metilene. Il composto venne poi precipitato per cauta aggiunta di etere isopropilico e ricristallizzato per la stessa via.

Cristalli prismatici color marrone molto scuro, solubili in cloruro di metilene e cloroformio con colorazione rosso-viola, insolubili in alcool.

Analisi

	trov. %	N	7,21;	Cl	7,24;	J	12,98;	Co	6,06
per $C_{40}H_{35}O_8N_5Cl_2JCo$	calc. %	N	7,22;	Cl	7,32;	J	13,10;	Co	6,08

b) g 9,1 (0,01 moli) di $Co(p-CH_3 \cdot C_6H_4 \cdot NC)_4J_3$ sciolti in cm^3 70 di cloruro di metilene vennero trattati a goccia a goccia, in palloncino munito di agitatore meccanico e imbuto a rubinetto, con g 6,23 (0,03 moli) di perclorato d'argento sciolto in toluolo. Dalla soluzione, filtrata dallo ioduro d'argento, venne precipitato il composto per cauta aggiunta di etere isopropilico. Il prodotto, ricristallizzato da cloruro di metilene per aggiunta di etere, si presenta identico a quello ottenuto operando secondo a).

Analisi

	trov. %	N	7,19;	Cl	7,27;	J	13,14;	Co	6,07
per $C_{40}H_{35}O_8N_5Cl_2JCo$	calc. %	N	7,22;	Cl	7,32;	J	13,10;	Co	6,08

6. - $[Co(p-CH_3 \cdot C_6H_4 \cdot NC)_4J_2]J$.

g 4 di diioduro di tetra-p-tolilisonitrilo-cobalto sciolti in cm^3 50 di cloruro di metilene vennero trattati a goccia a goccia e sotto agitazione con la quantità calcolata di iodio sciolto in cloruro di metilene. Il composto venne precipitato per cauta aggiunta di etere isopropilico, ridisciolti in cloruro di metilene e ricristallizzato nello stesso modo.

Cristalli prismatici color marrone scuro, solubili in cloruro di metilene e cloroformio con colorazione marrone-viola, insolubili in alcool.

Analisi

	trov. %	N	6,16;	J	42,04;	Co	6,49
per $C_{35}H_{26}N_4J_3Co$	calc. %	N	6,17;	J	41,94;	Co	6,50

7. - $[Co(p-CH_3O \cdot C_6H_4 \cdot NC)_4J_2]J$.

Il composto venne preparato da diioduro di tetra-p-metossifenilisonitrilo-cobalto e iodio operando come descritto per il triioduro di tetra-p-tolilisonitrilo-cobalto.

Cristalli prismatici color verde scuro, solubili in cloruro di metilene e cloroformio con colorazione marrone-viola, insolubili in alcool.

Analisi

	trov. %	N	5,78;	J	39,10;	Co	6,04
per $C_{32}H_{26}O_4N_4J_3Co$	calc. %	N	5,76;	J	39,20;	Co	6,07

8. - $[\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\cdot\text{NC})_4\text{Br}_2]\text{Br}$.

Questo composto venne preparato da dibromuro di tetrafenilisonitrilcobalto e bromo sciolto in cloruro di metilene, operando secondo le modalità sopra descritte.

Cristalli prismatici color verde scuro, solubili in cloruro di metilene e cloroformio con colorazione marrone-viola, insolubili in alcool.

Analisi

	trov. %	N 7,85;	Br 33,70;	Co 8,26
per $\text{C}_{28}\text{H}_{20}\text{N}_4\text{Br}_3\text{Co}$	calc. %	N 7,88;	Br 33,76;	Co 8,30

9. - $\text{Co}(\text{p-CH}_3\cdot\text{C}_6\text{H}_4\cdot\text{NC})_5\text{J}(\text{ClO}_4)$

Una soluzione di ioduro di penta-p-tolilisonitrilcobalto in cloruro di metilene venne trattata con una quantità equimolecolare di $[\text{Co}(\text{p-CH}_3\cdot\text{C}_6\text{H}_4\cdot\text{NC})_5\text{J}](\text{ClO}_4)_2$ sciolto in cloruro di metilene. La soluzione risultante venne cautamente addizionata di etere di petrolio e il prodotto ottenuto venne ripetutamente cristallizzato nello stesso modo.

Cristalli prismatici color nero intenso, solubili in cloruro di metilene e cloroformio con colorazione viola, poco solubili in alcool.

Analisi

	trov. %	N 8,00;	Cl 4,05;	J 14,68;	Co 6,78
per $\text{C}_{40}\text{H}_{35}\text{O}_4\text{N}_5\text{ClJCo}$	calc. %	N 8,04;	Cl 4,07;	J 14,60;	Co 6,78

10. - $(\text{p-CH}_3\cdot\text{C}_6\text{H}_4\cdot\text{NN})_2[\text{CuCl}_4]$.

g 4 di $(\text{p-CH}_3\cdot\text{C}_6\text{H}_4\cdot\text{NC})_3\text{CuCl}$, ottenuto da cloruro rameoso e fenilisonitrile secondo Klages⁽⁴⁾, in cm^3 50 di alcool etilico vennero trattati con cm^3 2 di nitrito d'amile e con cm^3 4 di acido cloridrico concentrato. Dopo breve tempo cominciò a separarsi dalla soluzione un abbondante precipitato in cristalli tabulari color giallo brillante, che vennero filtrati alla pompa, lavati abbondantemente con alcool ed essiccati sotto vuoto. Il prodotto si decompone con violenza per riscaldamento e per percussione. È molto solubile in acqua, insolubile negli ordinari solventi organici.

Analisi

	trov. %	N 12,49;	Cl 32,08;	Cu 14,26
per $\text{C}_{14}\text{H}_{14}\text{N}_4\text{Cl}_4\text{Cu}$	calc. %	N 12,60;	Cl 32,00;	Cu 14,30.

(4) F. KLAGES e K. MÖNKEMEYER, « Ber », 85, 109 (1952).

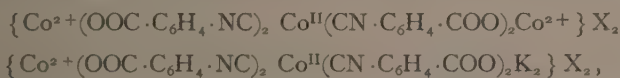
Chimica inorganica. — *Complessi cobalto (II)- e ferro (II)- arilisonitrilici* (*). Nota (**) di ADRIANO SACCO e ORNELLA COLETTI, presentata dal Socio L. CAMBI.

In una serie di lavori precedenti si descrissero la preparazione e le proprietà dei complessi del cobalto monovalente ⁽¹⁾ e del cobalto bivalente ⁽²⁾ con gli arilisonitrili, corrispondenti a $\text{Co}(\text{CNR})_5\text{X}$ e a $\text{Co}(\text{CNR})_4\text{X}_2$ (dove $\text{X} = \text{J, Br, ClO}_4$). In un'altra ricerca, di cui si dirà in una prossima pubblicazione, vennero isolati i complessi arilisonitrilici del ferro bivalente, di formula $\text{Fe}(\text{CNR})_4\text{X}_2$ (dove $\text{X} = \text{J, Br, Cl}$).

Proseguendo in queste ricerche, vennero presi in esame i complessi di due particolari isonitrili aromatici contenenti nella molecola un gruppo anionico, e precisamente il p-isocianbenzensolfonato potassico e il p-isocianbenzoato potassico. Questi vennero preparati secondo il metodo di A. W. Hofmann ⁽³⁾ modificato, operando in soluzione alcalina acquosa concentrata anziché in alcool o in solvente inerte.

I complessi del cobalto e del ferro con il p-isocianbenzensolfonato potassico, corrispondenti a $\text{M}(\text{p-CN} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{SO}_3\text{K})_4\text{X}_2$ ⁽⁴⁾ (dove $\text{M} = \text{Co}^{2+}, \text{Fe}^{2+}$; $\text{X} = \text{J, Br, Cl}$), si presentano come sostanze cristalline solubili in acqua, poco solubili in alcool, insolubili negli ordinari solventi organici. In soluzione sono però poco stabili e riesce difficile purificarli per cristallizzazione.

I complessi del cobalto con il p-isocianbenzoato potassico, corrispondenti a $\text{Co}(\text{p-CN} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{COOK})_4\text{X}_2$, sono assai solubili in acqua e in alcool, ma ancora più instabili e non ci è riuscito di isolarli allo stato puro. Si possono però isolare i complessi in cui il potassio sia totalmente o parzialmente sostituito da un metallo pesante: in particolare vennero isolati quelli in cui il carbossile era salificato dal cobalto stesso, corrispondenti a



insolubili in acqua e stabili allo stato cristallino. La suscettività magnetica molecolare di questi composti, determinata sperimentalmente, è in buon accordo con quella calcolata attribuendo all'atomo di cobalto coordinato un momento magnetico dipolare di 1,73 magnetoni Bohr (1 elettrone spin) e agli altri atomi di cobalto un momento di 3,87 magnetoni Bohr (3 elettroni spin).

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1953.

(1) L. MALATESTA e A. SACCO, «Zeit. anorg. allg. Ch.», Nota in corso di stampa.

(2) L. MALATESTA e L. GIUFFRÈ, «Rend. Accad. Lincei» [8], **11**, 206 (1951); L. MALATESTA e A. SACCO, «Gazz. Chim. It.», Nota in corso di stampa.

(3) A. W. HOFMANN, «Ann.», **146**, 109 (1868).

⁴⁾ Questa formula, come le seguenti, prescinde dallo stato di ionizzazione effettivo del complesso, che per ora non conosciamo.

PARTE SPERIMENTALE.

Le analisi dei prodotti ottenuti vennero eseguite: il cobalto per via elettrolitica, il ferro per via ponderale, gli alogeni e lo zolfo con la bomba di Parr, l'azoto secondo Kjeldahl. La suscettività magnetica venne determinata con la bilancia di Gouy.

1. *p-isocianbensolfonato potassico*. - In g 900 di una soluzione acquosa di idrato potassico al 50 % vennero sciolti, in pallone munito di agitatore meccanico, refrigerante a ricadere e imbuto a rubinetto, g 270 di acido solfanilico. Alla soluzione vennero aggiunti alcuni cubici di alcool etilico e quindi, a piccole porzioni, g 240 di cloroformio. L'aggiunta di cloroformio venne regolata in modo da mantenere, per tutta la durata della reazione, un leggero riflusso; al termine dell'aggiunta la miscela venne bollita ancora per circa un'ora a ricadere. La massa cristallina separatasi dopo raffreddamento venne filtrata alla pompa e il prodotto venne purificato mediante ripetute cristallizzazioni da alcool etilico. Cristalli aghiformi color giallo chiaro, inodori, molto solubili in acqua, solubili in alcool etilico a caldo.

Analisi:

	trov. %	N 6,32; S 14,53
per $C_7H_4O_3NSK$	calc. %	N 6,34; S 14,50

2. *p-isocianbenzoato potassico*. - A g 1120 di una soluzione acquosa di idrato potassico al 50 %, in pallone munito di agitatore meccanico, refrigerante a ricadere e imbuto a rubinetto, vennero addizionati g 274 di acido p-amminobenzoico e alcuni cubici di alcool etilico; vennero quindi aggiunti, a piccole porzioni, g 300 di cloroformio. La reazione stenta ad innescarsi e da principio occorre riscaldare blandamente; l'aggiunta di cloroformio viene poi continuata in modo da mantenere un lieve riflusso per tutta la durata della reazione. Al termine dell'aggiunta la miscela venne bollita ancora per mezz'ora a ricadere. La massa cristallina separatasi dopo raffreddamento venne filtrata alla pompa e il prodotto venne purificato mediante ripetute cristallizzazioni da acqua.

Analisi:

	trov. %	N 7,98; C 54,70; H 2,29
per $C_8H_4O_2NK$	calc. %	N 8,00; C 54,85; H 2,285

3. $Co(p\text{ CN} \cdot C_6H_4 \cdot SO_3K)_2$. - Una soluzione di g 8,84 di p isocianbenzensolfonato potassico in cc 20 di acqua venne addizionata a poco a poco ad una soluzione di g 3 di ioduro cobaltoso in cc 60 di alcool etilico. Si notò immediatamente una colorazione scura e la formazione di un precipitato turchino intenso, che venne filtrato alla pompa e lavato abbon-

dantemente con alcool. Il prodotto è poco solubile in alcool a caldo, insolubile a freddo; si altera quando si tenta di scioglierlo a caldo in alcool contenente più del 10 % di acqua. Resa 60 %.

Analisi:

trov. % N 4,62; S 10,82; J 21,0; Co 4,89; K 13,30
per $C_{28}H_{16}O_{12}N_4S_4J_2K_4Co$ calc. % N 4,68; S 10,69; J 21,2; Co 4,93; K 13,04

Suscettività magnetica molecolare a 18°: $\chi_M = 1198 \cdot 10^{-6}$.

4. $Co(p-CN \cdot C_6H_4 \cdot SO_3K)_4Br_2$. - Una soluzione di g. 8,84 di p-isocianbenzensolfonato potassico in cc 20 di acqua venne addizionata a una soluzione raffreddata in ghiaccio, di g 2,2 di bromuro cobaltoso in cc 100 di alcool etilico. Il precipitato marrone scuro venne filtrato alla pompa e lavato ripetutamente con alcool etilico caldo. Resa 75 %. Il prodotto è solubile in acqua a freddo e viene decomposto dall'alcool all'ebollizione.

Analisi:

trov. % N 5,05; S 11,95; Br 14,25; Co 5,25
per $C_{28}H_{16}O_{12}N_4S_4Br_2K_4Co$ calc. % N 5,08; S 11,61; Br 14,50; Co 5,35

5. $Fe(p-CN \cdot C_6H_4 \cdot SO_3K)_4J_2$. - Una soluzione di g 4,5 di p-isocianbenzensolfonato potassico in cc. 100 di alcool etilico venne addizionata a una soluzione alcoolica di g 1,5 di joduro ferroso, raffreddando con ghiaccio. Il precipitato cristallino verde chiaro formatosi venne filtrato alla pompa e lavato con alcool. Resa 50 %. Il prodotto è solubile in acqua a freddo, scarsamente solubile in alcool all'ebollizione con decomposizione.

Analisi:

trov. % N 4,65; S 10,65; J 21,28; Fe 4,50
per $C_{28}H_{16}O_{12}N_4S_4J_2K_4Fe$ calc. % N 4,71; S 10,75; J 21,88; Fe 4,68

6. $Fe(p-CN \cdot C_6H_4 \cdot SO_3K)_4Br_2$. - Una soluzione di g 9 di p-isocianbenzensolfonato potassico in cc 20 di acqua venne addizionata a una soluzione raffreddata a 0°, di g 2 di bromuro ferroso in cc 100 di alcool etilico. Il precipitato giallo formatosi venne filtrato alla pompa e lavato con alcool freddo. Resa 20 %. Il prodotto è solubilissimo in acqua, alquanto solubile in alcool etilico a caldo.

Analisi:

trov. % N 5,15; S 11,90; Br 14,22; Fe 5,06
per $C_{28}H_{16}O_{12}N_4S_4Br_2K_4Fe$ calc. % N 5,30; S 11,69; Br 14,50; Fe 4,95

7. $Fe(p-CN \cdot C_6H_4 \cdot SO_3K)_4Cl_2$. - Una soluzione di g 9 di p-isocianbenzensolfonato potassico in cc 20 di acqua venne addizionata a una soluzione, raffreddata a 0°, di g 1,8 di cloruro ferroso in cc 100 di alcool etilico. Il precipitato cristallino formatosi venne filtrato alla pompa e lavato con

alcool etilico freddo. Resa 30 %. Il prodotto è molto solubile in acqua a freddo e in alcool etilico a caldo, poco solubile in alcool a freddo.

Analisi:

	trov. %	N 5,59; S 12,83; Cl 6,92; Fe 5,47
per $C_{28}H_{16}O_{12}N_4S_4Cl_2K_4Fe$	calc. %	N 5,53; S 12,63; Cl 7,01; Fe 5,42

8. $Co \{ (p-CN \cdot C_6H_4 \cdot COO)_2Co; (p-CN \cdot C_6H_4 \cdot COOK)_2 \} J_2$. - Una soluzione di g 5 di p-isocianbenzoato potassico in cc 40 di acqua venne addizionata a una soluzione di g. 4,5 di joduro cobaltoso in cc 100 di alcool etilico. Si formò subito un precipitato blu scuro che venne filtrato alla pompa e lavato con alcool etilico caldo. Resa 80 %. Il prodotto è poco solubile in acqua a caldo, insolubile in alcool.

Analisi:

	trov. %	N 5,40; J 24,37; Co 11,30; K 7,40
per $C_{32}H_{16}O_8N_4J_2K_2Co_2$	calc. %	N 5,40; S 24,50; Co 11,38; K 7,56

Suscettività magnetica molecolare a 20°: $\chi_M = 8670 \cdot 10^{-6}$.

9. $Co \{ (p-CN \cdot C_6H_4 \cdot COO)_4Co_2 \} J_2$. - Una soluzione di g 3,5 di p-isocianbenzoato potassico in cc. 40 di acqua venne addizionata a goccia a goccia ad una soluzione raffreddata a 0° di g 4,65 di joduro cobaltoso in cc 100 di alcool etilico. Si ebbe dapprima una colorazione rosso vino, poi un precipitato blu scuro che venne filtrato alla pompa e lavato più volte con alcool etilico caldo. Resa 70 %. Il prodotto è pochissimo solubile in acqua, insolubile negli altri solventi.

Analisi.

	trov. %	N 5,08; J 23,24; Co 16,71
per $C_{32}H_{16}O_8N_4J_2Co_3$	calc. %	N 5,14; J 23,48; Co 16,95

Suscettività magnetica molecolare a 20°: $\chi_M = 14020 \cdot 10^{-6}$.

10. $Co \{ (p-CN \cdot C_6H_4 \cdot COO)_2Co; (p-CN \cdot C_6H_4 \cdot COOK)_2 \} Br_2$. - Una soluzione di g 7 di p-isocianbenzoato potassico in cc 50 di acqua venne addizionata a una soluzione di g 4,4 di bromuro cobaltoso in cc 120 di alcool etilico. Si formò subito un precipitato marrone che venne filtrato alla pompa e lavato con alcool etilico caldo. Resa 80 %. Il prodotto è poco solubile in acqua calda, insolubile negli altri solventi.

Analisi:

	trov. %	N 5,88; Br 16,98; Co 12,44; K 8,40
per $C_{32}H_{16}O_8N_4Br_2K_2Co_2$	calc. %	N 5,96; Br 17,00; Co 12,53; K 8,32

11. $Co \{ (p-CN \cdot C_6H_4 \cdot COO)_4Co_2 \} Br_2$. - Una soluzione di g 5 di p isocianbenzoato potassico in cc 50 di acqua venne addizionata a goccia a goccia

ad una soluzione raffreddata a 0° di g 3,1 di bromuro cobaltoso in cc 100 di alcool etilico. Si ebbe dapprima una colorazione bruna, poi un precipitato marrone che venne filtrato alla pompa e lavato con alcool etilico caldo. Resa 65 %. Il prodotto è poco solubile in acqua a caldo, insolubile negli altri solventi.

Analisi: $\text{C}_{32}\text{H}_{16}\text{O}_8\text{N}_4\text{Br}_2\text{Co}_3$

trov. % N 5,91; Br 17,28; Co 18,96

per $\text{C}_{32}\text{H}_{16}\text{O}_8\text{N}_4\text{Br}_2\text{Co}_3$ calc. % N 5,86; Br 17,50; Co 19,20

Suscettività magnetica molecolare a 20°: $\chi_M = 14025 \cdot 10^{-6}$.

Chimica inorganica. — *Complessi isonitrilici del cobalto monovalente* (*). Nota II (**) di LAMBERTO MALATESTA e ADRIANO SACCO, presentata dal Socio L. CAMBI.

In una Nota precedente (1) si descrissero la preparazione e le proprietà di due serie di sali complessi del cobalto monovalente, e precisamente dei perclorati e degli ioduri di pentaarilisonitrilcobalto (I) $\text{Co}(\text{CNR})_5\text{ClO}_4$ e $\text{Co}(\text{CNR})_5\text{J}$ e di alcuni loro prodotti di addizione.

In quell'occasione si osservò come per azione degli isonitrili aromatici sui sali cobaltosi si possano ottenere complessi derivati dal cobalto bivalente limitatamente al caso dello ioduro (2) e del perclorato; ma mentre il primo dà composti della serie $\text{Co}(\text{CNR})_4\text{J}_2$ con tutti gli arilisonitrili, l'esistenza dei perclorati $\text{Co}(\text{CNR})_5(\text{ClO}_4)_2$ è limitata a particolari isonitrili.

Altri sali di cobalto, per esempio il solfato, il nitrato, l'acetato, il formiato ed in certi casi il cloruro e il perclorato, trattati con gli isonitrili aromatici danno luogo in un primo tempo al complesso del cobalto bivalente — o quanto meno ad una colorazione azzurro-verde che noi ritenemmo di poter attribuire alla formazione di tale complesso — ma dopo pochi secondi la soluzione assume una colorazione giallo puro che noi abbiamo attribuito alla formazione di sali cobalto (I)-pentaarilisonitrilici che restano in soluzione.

Proseguendo ora in questa ricerca siamo riusciti ad isolare altri sali complessi del cobalto monovalente appartenenti alla stessa serie e precisamente i clorati $\text{Co}(\text{CNR})_5\text{ClO}_3$ ed i nitrati $\text{Co}(\text{CNR})_5\text{NO}_3$. Questi composti, analogamente ai perclorati, sono indefinitamente stabili all'aria; in soluzione sono dei veri e propri sali. Il fatto che l'anione di questi sali non venga ridotto dal catione dimostra che lo ione complesso $[\text{Co}(\text{CNR})_5]^+$ ha pro-

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1953.

(1) L. MALATESTA e A. SACCO, «Zeit. anorg. allg. Ch.», Nota in corso di stampa.

(2) Ricerche precedenti avevano mostrato che il bromuro di cobalto si comporta analogamente allo ioduro.

prietà riducenti assai deboli; certamente inferiori, per esempio, a quelle dello ione ferroso. La possibilità di ottenere cristallini, e quindi facilmente purificabili, questi sali è legata alla voluminosità dell'anione e alla sua struttura sterica, e deve ritenersi assai scarsa per gli acetati, i formiati, i solfati e i cloruri che di fatto non siamo riusciti ad ottenere.

È invece relativamente facile la precipitazione dei cationi $[\text{Co}(\text{CNR})_5]^+$ con acidi organici del tipo del picrato e del reineckato, ma ciò non offre alcun particolare interesse.

Questi sali sono regolarmente diamagnetici come richiede la loro natura di complessi di compenetrazione.

PARTE SPERIMENTALE.

Gli arilisonitrili usati in questo lavoro vennero preparati, secondo il metodo di A. W. Hofmann modificato, dalle ammine corrispondenti, cloroformio e idrato sodico in polvere, operando in etere isopropilico ⁽³⁾. Le analisi vennero eseguite: il cobalto per via elettrolitica, gli alogeni con la bomba di Parr e l'azoto con il semimicro-Dumas.

1. *Nitrato di penta-p-clorofenilisonitrilo-cobalto* (I). - Ad una soluzione concentrata di nitrato cobaltoso in alcool etilico scaldato a 40-50°C venne aggiunta una soluzione alcoolica di p-clorofenilisonitrile in leggero eccesso sulla quantità calcolata. Il precipitato cristallino separatosi dopo raffreddamento venne filtrato alla pompa e ricristallizzato da alcool etilico.

Cristalli prismatici color giallo chiaro, solubili in cloruro di metilene e cloroformio, poco solubili in alcool etilico a freddo.

Analisi:

	trov. %	N 10,40; Cl 21,70; Co 7,34
per $\text{C}_{35}\text{H}_{20}\text{O}_3\text{N}_6\text{Cl}_5\text{Co}$	calc. %	N 10,38; Cl 21,94; Co 7,30

2. *Nitrato di penta fenilisonitrilo-cobalto* (I). - Una soluzione concentrata di nitrato cobaltoso in alcool etilico, scaldato a 40-50°C, venne trattata a goccia a goccia con un leggero eccesso sul calcolato di fenilisonitrile in alcool etilico. Il precipitato ottenuto venne filtrato alla pompa e ricristallizzato da alcool.

Polvere cristallina color giallo chiaro, solubile in cloruro di metilene e cloroformio, poco solubile in alcool a freddo.

Analisi:

	trov. %	N 13,08; Co 9,30
per $\text{C}_{35}\text{H}_{25}\text{O}_3\text{N}_6\text{Co}$	calc. %	N 13,20; Co 9,27

(3) L. MALATESTA « Gazz. Chim. It. », 77 238, (1947).

3. *Clorato di penta-p-clorofenilisonitrilo-cobalto* (I). — Una soluzione alcoolica di clorato cobaltoso, ottenuto per metatesi da clorato sodico e solfato cobaltoso, venne trattata con un leggero eccesso sul calcolato di p-clorofenilisonitrile in alcool etilico. Il precipitato ottenuto venne filtrato alla pompa e ricristallizzato da alcool etilico. Cristalli prismatici color giallo chiaro solubili in cloruro di metilene e cloroformio, pochissimo solubili in alcool a freddo.

Analisi:

	trov. %	N 8,41; Cl 25,70; Co 7,09
per $C_{35}H_{20}O_3N_5Cl_6Co$	calc. %	N 8,43; Cl 25,65; Co 7,11

4. — *Clorato di penta-fenilisonitrilo-cobalto* (I). — Questo prodotto venne ottenuto in modo analogo a quello sopra descritto, da clorato cobaltoso e fenilisonitrile in soluzione alcoolica. Cristalli prismatici color giallo chiaro, solubili in cloruro di metilene e cloroformio, poco solubili in alcool a freddo.

Analisi:

	trov. %	N 10,60; Cl 5,42; Co 9,01
per $C_{35}H_{25}O_3N_5ClCo$	calc. %	N 10,64; Cl 5,40; Co 8,97

Geologia. — *Risultati preliminari dell'esplorazione ecometrica del Basso Tirreno* ^(*). Nota di ALDO G. SEGRE, presentata ^(**) dal Socio RAMIRO FABIANI.

Le cognizioni esistenti sulla conformazione dei fondali corrispondenti alla vasta area del Tirreno meridionale compreso fra la Sardegna, l'Italia peninsulare e la Sicilia, sono, nel loro insieme, molto limitate. Occorre innanzi tutto precisare come, col progredire delle conoscenze della topografia del fondo, si vengano a stabilire più sicuri confini fra i diversi mari: così il Basso Tirreno si limita a N con una linea che va dalle Isole Ponzie al golfo di Olbia e comprende l'intera area al di sotto dei 3000 m, con carattere di ampio bacino traversato da una serie di rilievi bene individuati. L'alto Tirreno, invece, presenta una topografia considerevolmente accidentata, con alte montagne e profondi valloni; il limite occidentale col mar Ligure è ben definito dal ripido pendio assunto dal fondo tra C. Corso e la zona di Portofino ⁽¹⁾, inciso da valloni, come del resto tutta la riviera Ligure di Ponente, e che porta rapidamente i fondali da meno di 600 m del Tirreno a oltre 2000 del Mar Ligure.

^(*) Lavoro eseguito a bordo della Nave « Staffetta » dell'Istituto Idrografico della Marina.

^(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

⁽¹⁾ Già L. MARINI accennò a questo importante elemento morfologico (in: *Preliminari per lo studio fisico del Tirreno*, « Boll. Soc. Geogr. It. », LXIV, 649 (1927)).

Della configurazione del Basso Tirreno, la cartografia esistente⁽²⁾ fornisce una rappresentazione molto approssimativa. Questa è ricavata dagli scandagli eseguiti a più riprese da spedizioni oceanografiche, che però non avevano per scopo lo studio particolare del Tirreno⁽³⁾, da campagne idrografiche dell'Istituto Idrografico della Marina⁽⁴⁾ e da altre navi⁽⁵⁾. Recentemente H. Pettersson ha effettuato una traversata anche nel Tirreno, per una serie di ricerche di geologia sottomarina di alto interesse⁽⁶⁾. Nei trattati più recenti di oceanografia⁽⁷⁾, del mar Tirreno si accenna sommariamente, e tuttavia si riconosce l'incertezza esistente presso gli Autori circa le maggiori profondità e riguardo alle grandi linee morfologiche. D'altro canto il progresso degli studi geologici nell'area circumtirreniche, ha sollevato interessanti problemi, fondamentali per la storia della evoluzione paleogeografica delle terre e per i rapporti strutturali che tra esse intercorrono. Le distese marine interposte e mal conosciute costituiscono per ogni ricostruzione gravi ostacoli.

Dei dati esistenti si sono valse le più recenti sintesi sulla tettonica della Penisola quanto del bacino Mediterraneo⁽⁸⁾, per i collegamenti fra le strutture di opposte terre. Da questi lavori è apparsa subito quale lacuna costituisca l'assenza pressoché completa di una batimetria utilizzabile a tali fini,

(2) Cfr.: Ammiragliato Inglese, F^o n. 676, *Tyrrhenian Sea*; Istituto Idrografico della Marina, F^o 200, *Mari d'Italia*; F^o 164 *Mare Tirreno e canali di Sicilia e di Malta*; G. DAINELLI, *Atlante fisico-economico d'Italia* (T. C. I., Milano 1940, tav. II «Condizioni fisiche del mare»); T. C. I., *Atlante internazionale*, V ed., Milano 1938, tavv. 22-23 e 27-28-29. ANDREES *Allgemeiner Handatlas*, tavv. 101-102, *Übersichtskarte v. Italien*; I.G.M., *Carta d'Italia* 1 : 1.000.000; N. APOLLONI, *Carta batimetrica del Mar Tirreno* (in: *Studio batimetrico sul Mar Tirreno*, «Boll. Soc. Geogr. It.», ser. VI, LXVI, p. 768 (1929). *Carte générale bathymétrique des Océans*, F^o A-IV, *Mer Tyrrhénienne*).

(3) C. WYVILLE THOMSON, *The depths of the Sea, an account of the general results of the dredging cruises of H. M. S. S. «Porcupine» and «Lightning» during the summer of 1868, 1869 and 1870 etc.* (II ed., London 1871). Nave «Thor»: J. SCHMIDT, *Report of the Danish Oceanographical expedition 1908-1910 to the Mediterranean and adjacent seas*.

(4) Nave idrografica «Washington» nel 1881-91 e 1898-99.

(5) Nave posacavi «Città di Milano» nel 1902 e 1924, ed altre francesi e inglesi.

(6) H. PETERSSON, *The Swedish Expedition to the Western Mediterranean, April-May 1946* («Bull. Inst. Océanogr.», Monaco, n. 919 (1947)). Id., *Oceanographic Work in the Mediterranean* («Geogr. Journ.», CVIII, 163 (1946)).

(7) J. ROUCH, *Traité d'océanographie physique*; I, *Sondages* (Paris 1943, a p. 202); J. BOURCART, *Géographie du fond des Mers* Paris 1949, a p. 255; SVERDRUP, JOHNSON, FLEMING, *The Oceans* (N. Y. 1946, a p. 34).

(8) H. DE CIZANCOURT, *Problèmes de tectonique profonde en Méditerranée occidentale* (Report. Internat. Geol. Congress. in Gr. Br. 1948, part VIII, 15 (1950)); L. GLANGEAUD, *Interprétation tectono-physique des caractères structuraux et paléogéographiques de la Méditerranée occidentale* («Bull. Soc. Géol. Fr.», ser. 6^e, I, 735 (1951)); P. RUSSO, *Contribution à l'étude tectonique de la Méditerranée Occidentale* («Bull. Soc. Géol. Fr.», XVII (1947)); R. STAUB, *Ueber Beziehungen zwischen Alpen u. die Gestaltung d. Alpenen Tectonien Europas* («Ecl. Geol. Helvet.», XL, 30 (1951)); R. FABIANI e A. SEGRE, *Schema strutturale della regione Italiana* («Ricerca Scientifica», XXII; suppl. Contrib. d. Sc. geol., 2^o, 8 (1952)); G. MERLA *Geologia dell'Appennino Settentrionale* («Boll. Soc. Geol. It.», LXX, 95 (1952)).

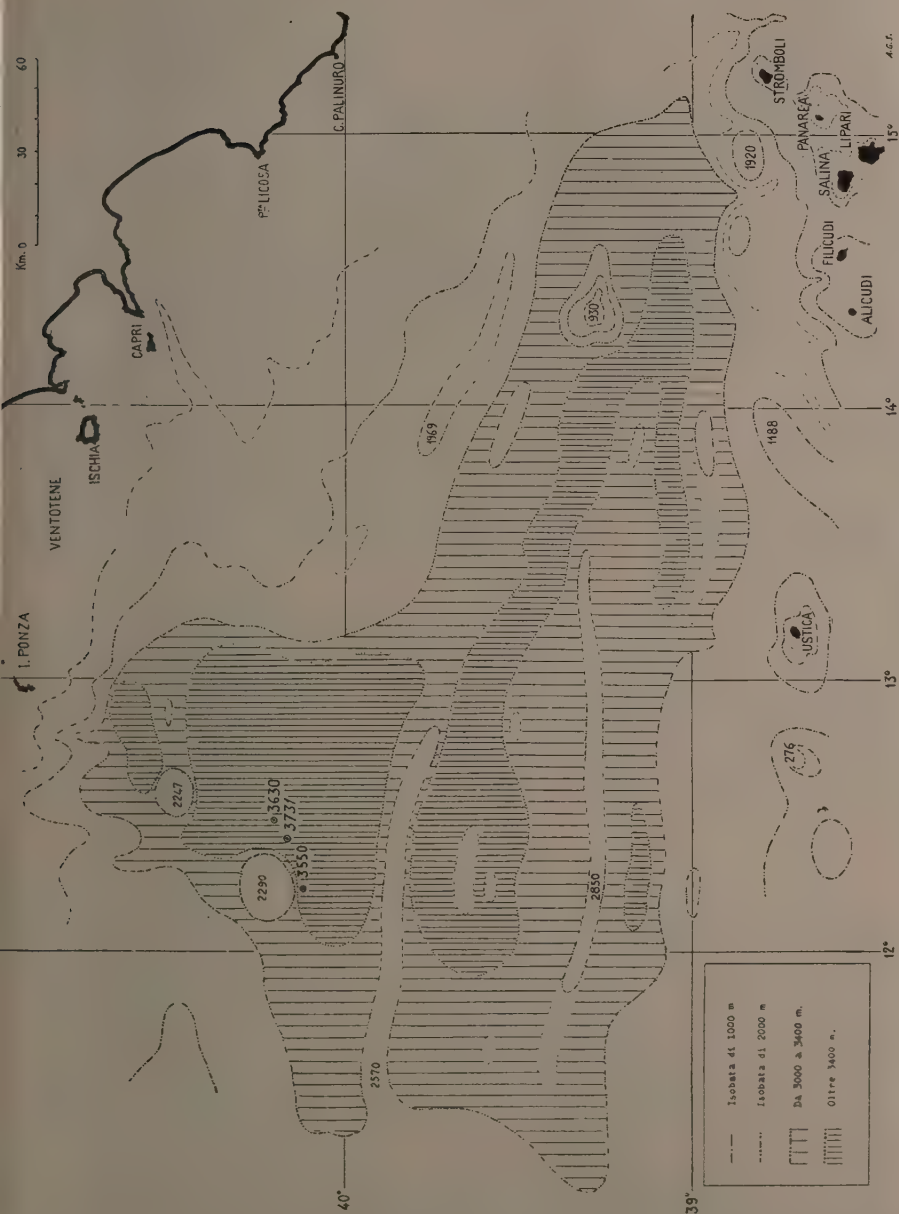


Fig. 1. - Schizzo schematico della zona abissale del Basso Tirreno, secondo i nuovi rilevamenti della Nave idrografica « Staffetta ».

principalmente per il bacino Tirrenico. Si è quindi cominciati dalla parte centrale e più profonda che è anche la più scarsa di dati ⁽⁹⁾.

La massima profondità conosciuta (ved. fig. 1) è ritenuta quella di 3731 m comparsa per la prima volta sulle carte inglesi verso il 1895. Il Magnaghi trovò una massima profondità di 3630 m; i rilevamenti della N. Staffetta, nei medesimi paraggi, a SW dell'isola di Ponza, dettero da 3550 a 3568 m le massime riscontrate durante l'intera campagna.

Per una superficie di 90.600 kmq del basso Tirreno oltre lo scalino continentale si hanno 121 scandagli. Nell'area centrale, sulle carte si trova una media frequenza di 10 scandagli su 9.000 Km²; la superficie racchiusa nell'isobata di 3000 m è di ca 34.087 Km², con 33 scandagli fra 3000 e 3500 m, 12 fra 3500 e 3630 m. Date queste premesse si stabilì una poligonale, per una prima esplorazione, composta di 6 allineamenti NS distanti fra loro ca. 51 Km, per un complessivo sviluppo di 1700 Km; questo percorso è stato controllato con 200 punti-nave, mantenendo una velocità di crociera di 10 miglia orarie, ottenuti astronomicamente o con radar, e con punti a terra. I profili del fondo sono stati rilevati con apparecchio u. s. «Atlas-Werke 2 DK» per profondità fino a 1600 m, e con apparecchio «Navy model NMC echo-sounding equipment» a registrazione fino a 2000 braccia (=3658 m) e capace di scandagliare, con segnalazione ottica e acustica, fino a 4000 braccia (=7315 m).

La conca Tirrenica è un ampio bacino di sedimentazione, esteso in larghezza per 351 Km e lungo 194, al di sotto dei 3000 m di profondità. Nel suo aspetto generale appare costituito da una vasta distesa, priva di forti dislivelli, ma solcata da sistemi di rilievi bene individuati, disposti a «cordigliere», che ne interrompono bruscamente e a più riprese la suborizzontalità. L'isobata dei 3000 m mostra un andamento notevolmente diverso da quanto si riteneva: la più prossima rappresentazione è quella fornita dalle

(9) Nel lavoro riassuntivo per la compilazione dello schema strutturale della Penisola Italiana sopra cit., benché già noti alcuni nuovi elementi sull'Alto Tirreno (ril. eseguiti da A. G. Segre col motopeschereccio «Lividonia» con ecometro Bendix-Marine), ci si urtò tuttavia nell'incognita della zona abissale del Tirreno Meridionale. Il prof. R. Fabiani mosso da queste ragioni, insistette a più riprese nelle sedute del Comitato per la Geologia, la Geografia e la Talassografia del C.N.R. fino dal 1951 sull'importanza e necessità di tali ricerche. Nella seduta della Commissione Talassografica tenuta il 13 febbraio 1953 al C.N.R., ha trovato immediata comprensione da parte del direttore dell'Istituto Idrografico della Marina, Contrammiraglio M. Iannucci, il quale ha messo a disposizione la nave idrografica «Staffetta» da 1500 tonn. al comando del Cap. di Fregata E. Debrazzi. La Direzione del Servizio Geologico d'Italia, considerato l'interesse che queste iniziative avrebbero assunto per la parte marittima e costiera dei fogli della carta geologica, ha incaricato l'A. della presente Nota di partecipare a questi rilevamenti. Una relazione dettagliata dei risultati, qui appena accennati, comparirà sul «Boll. d. Servizio Geologico».

Ci è grato porgere i più vivi ringraziamenti all'Ammiraglio Iannucci, al Comandante Debrazzi e all'equipaggio tutto della Nave «Staffetta», che ha tanto contribuito alla riuscita del lavoro.

tavv. 22-23 dell'Atlante Internazionale del T. C. I. Ancor maggiore differenza si osserva per quella dei 3400, la quale viene a delimitare aree allungate fra le catene montuose.

La diversa forma dei profili dei rilievi tradisce evidentemente una differente costituzione geolitologica.

Si riconoscono pertanto dalla topografia due forme prevalenti:

a) Cordigliere continue, rilievi allineati lungo una ben determinata direttrice, che rappresentano sommità più elevate di sistemi quasi completamente sepolti dai fanghi abissali.

b) Rilievi isolati a montagna conica o subconica.

Le « cordigliere » mantengono fra loro una distanza abbastanza costante.

Da Nord a Sud si riconoscono infatti i seguenti sistemi diretti E-W:

I^a Cordigliera: incontrata su tre allineamenti della poligonale; estesa per ca. Km 130. Ha una larghezza di ca. Km 13 e un'altezza massima riconosciuta di m 1972 ⁽¹⁰⁾.

II^a Cordigliera: incontrata su tre allineamenti; si tratta forse di più rilievi staccati riconoscibili per una lunghezza di ca. Km 111, in due serie parallele fra loro; altezza massima m 417.

III^a Cordigliera: incontrata su cinque allineamenti, per una lunghezza di ca. Km 240, con un'altezza massima riconosciuta di m 702.

A oriente il bacino è limitato da un sistema orografico diretto NW-SE una ottantina di Km al largo di Salerno. Questo costituisce la:

IV^a Cordigliera: incontrata su tre allineamenti per una lunghezza presumibile di Km 130, probabilmente frazionata in più parti; altezze riscontrate dai 1041 ai 1588 m. Tutta la zona compresa tra questa, Capri e Capo Palinuro, presenta una morfologia considerevolmente accidentata, con rilievi che a SE di Capri e al largo di C. Palinuro raggiungono con la sommità i 500-300 m sotto il livello del mare.

Un grandioso vallone parallelo al versante salernitano della Penisola Sorrentina è impiantato su un'importante e nota frattura.

Tra i monti isolati, il I° si incontra 94 Km a SW di Ponza, largo Km 18,5 e alto ca. 1267 m. Un II° si innalza 80 Km a nord dell'isola di Alicudi: è una montagna alta 2617 e larga alla base da 32 a 20 Km, che da un fondale di 3500 m ca. s'innalza fino a 930 m.

Tutto il bacino Tirrenico dove sembrano mancare completamente profonde fosse chiuse, ma esistere solo larghe depressioni lievemente incavate, è delimitato da una scarpata continentale, dove più, dove meno ripida. Essa scende a gradoni, interrotta da salti di quota, e incisa, nella parte superiore,

(10) Le quote dei rilievi montuosi del fondo sono date prendendo come livello di base, cioè quota 0, la maggiore profondità riscontrata nel bacino arrotondata a m. 3550. Questo è stato fatto per dare un'idea concreta dell'altitudine relativa delle singole montagne sul fondo del Tirreno. Ad alcune fra le quote batimetriche citate non è stata ancora apportata per intero la correzione dovuta alla variazione di velocità del suono alle diverse profondità.

da profondi valloni (*submarine canyons*). Essi iniziano intorno ai 150-200 m di profondità; non si raccordano con gli elementi morfologici della piattaforma continentale al di sopra dei 100 m, dovuti a modellamento subaereo, essendo buona parte di questa zona emersa durante l'ultima glaciazione. I valloni terminano generalmente tra i 1000 e i 2000 m, qualcuno dei più imponenti (Calabria meridionale e Sicilia) si spinge, molto attenuato, fino a 3000. A queste profondità essi vengono livellati da digitazioni della coltre melmosa che vi si insinuano. Lo spazio sottomarino esteso fra le isole Ponziane e la costa a sud di C. Palinuro è considerevolmente accidentato per una larghezza di ca. 84 Km. A sud dell'isola di Capri, come s'è detto innanzi, e per tutte le coste Campano-Calabre e Sicule, numerosi profondi valloni solcano la scarpa continentale, spingendo la loro testata fino a distanze minime dalla costa, come, per esempio, presso Palmi dove un *canyon* inizia immediatamente sotto costa con 400 m di profondità.

Appare evidente come gli allineamenti dei rilievi, più sopra sommariamente descritti, debbano, con ogni attendibilità, considerarsi come la parte estrema della sommità di antichi sistemi orotettonici affioranti da potenti spessori di melme abissali che tendono a livellare il fondo col loro continuo accumularsi.

I sistemi orografici si distribuiscono secondo le due direttrici E-W o ercinica, in direzione NW-SE o appenninica. I rilievi delle cordigliere E-W sono, in alcune sezioni, distintamente asimmetrici, più ripidi sul versante sud; quelli in direzione appenninica si mostrano più discontinui e accidentati. È presumibile che i primi siano costituiti in prevalenza da rocce cristalline e metamorfiche, gli altri forse da rocce di natura calcarea o dolomitica, in conformità con le masse autoctone degli archi appenninici, mentre i rilievi isolati, per la loro ubicazione e morfologia, vadano considerati come con vulcanici.

I cospicui allineamenti dei rilievi individuati nella parte più profonda del Tirreno si armonizzano con le direttrici tettoniche della Sicilia settentrionale e centrale, al cui medesimo sistema sembrano appartenere ed altresì con gli elementi della tettonica trasversale appenninica, riconosciuti e presi in considerazione nei più recenti studi. L'intero bacino poi rappresenta una area di sprofondamento alla quale contribuiscono in parte i cospicui accumuli di sedimenti, alimentati, fra l'altro, dagli abbondanti apporti terrigeni provenienti dal progressivo smantellamento dei rilievi appenninici e delle maggiori isole, nonché dalla deposizione periodica di materiali piroclastici dei vulcani circumtirrenici. Intorno alla conca, per due terzi del perimetro a S, a E, e a NE, la fascia di instabilità tettonica più recente è individuata da fratture e da una serie di apparati vulcanici.

A proposito della coltre di melme profonde che tendono a colmare il bacino, si ricorda come durante la spedizione oceanografica diretta da H. Pettersson (ved. op.cit., nel 1946, sia stato misurato con metodo sismico a rifles-

sione, dal prof. W. Weibull, uno spessore di sedimenti « plastici » intorno ai 2600 m e più, nella parte centrale del Tirreno ⁽¹¹⁾. Ora, questo ed altri dati dal medesimo resi noti, esaminati al lume dei profili recentemente ottenuti, si riconfermano assai attendibili.

I rilievi montuosi, riconosciuti solo in parte con la recente campagna della nave idrografica « Staffetta », sono verosimilmente parti di terre che nel Terziario costituirono a varie riprese e fasi le zone di provenienza dei materiali conglomeratici poligenici del Paleogene e Neogene dell'Appennino meridionale e della Sicilia ⁽¹²⁾.

Il rilevamento eseguito, sebbene rappresenti una prima sommaria esplorazione, data la vastità della superficie, è tuttavia valso a farci conoscere quali siano i lineamenti generali morfologici del Tirreno del tutto ignoti precedentemente, ponendo in evidenza una serie di elementi suscettibili di ulteriori e più importanti ricerche sulla geologia sottomarina.

Mineralogia. — *Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite* ^(*). Nota II di FRANCESCO EMILIANI e RENATO PELLIZZER, presentata ^(**) dal Corrisp. C. ANDREATTA.

e) SPETTROGRAMMI DI WEISSENBERG. — Per confermare i valori ottenuti per le dimensioni della cella elementare e per determinare il gruppo spaziale abbiamo eseguito i seguenti spettrogrammi di Weissenberg:

A) *Simonellite artificiale*

1° asse di rotazione [100]	strato equatoriale
2° asse di rotazione [001]	strato equatoriale
3° asse di rotazione [010]	strato equatoriale
4° asse di rotazione [010]	equinclinato di ordine 1
5° asse di rotazione [010]	equinclinato di ordine 2

B) *Simonellite naturale*

1° asse di rotazione [100]	strato equatoriale
2° asse di rotazione [100]	equinclinato di ordine 1
3° asse di rotazione [100]	equinclinato di ordine 2

(11) W. WEIBULL, *The thickness of ocean sediments measured by a reflexion method* («Meded Oceanogr. Inst.», Göteborg, n. 12 (1947)).

(12) C. E. BURCKHARDT, *Contributo alla conoscenza del conglom. basale della trasgressione terz. postorogen. nei M. Peloritani*. («Contrib. di Sc. Geol.», II. Suppl. a «La Ricerca Scient.», n. 22^o, 1952); R. FABIANI, *Sulle interpr. geol. delle anomalie negative della gravità regionale in Sicilia*. («La Ricerca Scientifica», a. 23^o, n. 5, 1953, p. 780).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

Dall'esame delle tabelle III e IV risulta evidente la concordanza dei valori ottenuti per la simonellite artificiale con quelli ottenuti per la naturale. Questi valori sono pure concordanti con quelli ottenuti con il metodo di Polanyi ⁽¹⁾.

TABELLA III.

Calcolo delle dimensioni della cella dagli spettrogrammi Weissenberg per la simonellite artificiale.

Asse di rotazione	λ	$[u\ v\ w]$	n	$s^{(1)}$ in mm.	ϑ	$t[u\ v\ w]$ media
[100]	K_{α}	[001]	4	11,00	$4^{\circ}55'$	35,91
	K_{α}	[001]	8	22,25	$9^{\circ}57'$	35,61*
	K_{β}	[001]	8	20,00	$8^{\circ}57'$	35,71*
	K_{α}	[001]	12	33,50	$14^{\circ}59'$	35,72*
	»	[010]	2	21,50	$9^{\circ}37'$	9,21*
	»	[010]	4	43,00	$19^{\circ}14'$	9,34*
	»	[010]	6	67,25	$30^{\circ} 5'$	9,21*
						35,68
						9,25
[010]	K_{α}	[001]	4	11,00	$4^{\circ}55'$	35,91
	»	[001]	8	22,25	$9^{\circ}57'$	35,61*
	»	[001]	12	33,50	$14^{\circ}59'$	35,72*
	K_{β}	[001]	8	20,00	$8^{\circ}57'$	35,71*
	K_{α}	[100]	2	21,75	$9^{\circ}44'$	9,10*
	K_{β}	[100]	2	19,75	$8^{\circ}50'$	9,05*
	K_{α}	[100]	4	44,25	$19^{\circ}47'$	9,09*
[001]	K_{α}	[010]	2	21,25	$9^{\circ}30'$	9,32*
	K_{β}	[010]	2	19,25	$8^{\circ}48'$	9,08*
	K_{α}	[100]	2	21,75	$9^{\circ}44'$	9,10*
	K_{β}	[100]	2	19,75	$8^{\circ}50'$	9,05*
	K_{α}	[100]	4	44,25	$19^{\circ}47'$	9,09*

(1) t = distanza fra punti corrispondenti nel piano di simmetria come indicato in fig. 7.

(1) F. EMILIANI e R. PELLIZZER, *Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite*. Nota I. « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei » (Cl. Sc. fis. mat. nat., vol. XIV, fasc. 5, 1^o sem., pp. 652-657).

TABELLA IV.

Calcolo delle dimensioni della cella dagli spettrogrammi Weissenberg per la simonellite naturale.

Asse di rotazione	λ	$[u\ v\ w]$	n	s in mm.	θ	$t[u\ v\ w]$ media
[100]	K_{α}	[001]	4	11,00	$4^{\circ}55'$	35,91
	»	[001]	8	22,00	$9^{\circ}50'$	36,05
	K_{β}	[001]	8	20,00	$8^{\circ}57'$	35,71*
	K_{α}	[001]	12	33,50	$14^{\circ}59'$	35,72*
	»	[001]	16	45,00	$20^{\circ}7'$	35,80*
	»	[001]	28	82,75	37°	35,80*
	»	[001]	32	97,25	$43^{\circ}29'$	35,78*
	K_{α}	[010]	2	21,50	$9^{\circ}37'$	9,21*
	K_{β}	[010]	2	19,50	$8^{\circ}43'$	9,17*
	K_{α}	[010]	4	43,75	$19^{\circ}34'$	9,19*
	»	[010]	6	67,00	$29^{\circ}58'$	9,24*
						35,76
						9,20

In base alla decifrazione dei suddetti spettrogrammi Weissenberg riportiamo nella tabella V i simboli corrispondenti alle riflessioni.

Dallo studio di questi dati, per quanto riguarda le riflessioni, risulta quanto segue:

hkl : nessuna condizione

okl : $k = 2n$

hko : $k = 2n$

hol : $h + l = 2n$

hoo : $h = 2n$

oko : $k = 2n$

ool : $l = 2n$.

Più genericamente possiamo enunciare che: nei piani generici (hkl) non risulta nessuna estinzione; per i piani con un indice uguale a zero si hanno estinzioni quando la somma degli altri due indici in un tipo di questi piani è dispari, mentre negli altri due tipi si ha estinzione quando è dispari l'indice che nel primo tipo era uguale a zero; di conseguenza per i piani con due indici uguali a zero si hanno estinzioni quando il terzo indice è dispari.



Fig. 7. - Spettrogramma di Weissenberg di simonellite artificiale. Asse di rotazione $[010]$ - Strato equatoriale. Ant. Cu - $R = \text{mm. } 28,65$ - Grand. nat.



Fig. 8. - Spettrogramma di Weissenberg di simonellite naturale. Asse di rotazione $[100]$ - Strato equatoriale. Ant. Cu - $R = \text{mm. } 28,65$ - Grand. nat.



Fig. 9. - Spettrogramma di Weissenberg di simonellite naturale. Asse di rotazione [100] - Equinclinato di ordine 1. Ant. Cu — R = 28,65 - Grand. nat.

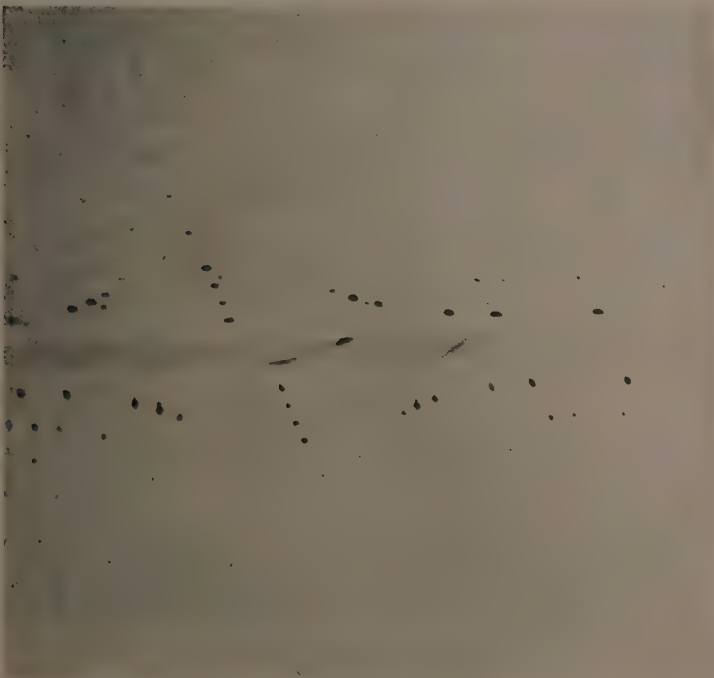


Fig. 10. - Spettrogramma di Weissenberg di simonellite naturale. Asse di rotazione [100] - Equinclinato di ordine 2. Ant. Cu - - R = mm. 28,65 - Grand. nat.

TABELLA V.

$h\ 0\ 0$	$0\ k\ 0$	$0\ 0\ l$	$h\ k\ 0$	$h\ 0\ l$	$0\ k\ l$	$h\ k\ l$		
2 0 0	0 2 0	0 0 4	1 2 0	1 0 3	0 2 1	1 1 1	1 1 2	1 1 4
4 0 0	0 4 0	0 0 8	2 2 0	1 0 5	0 2 2	1 1 5	1 1 6	1 1 8
	0 6 0	0 0 12	3 2 0	1 0 9	0 2 3	1 1 10	1 1 11	1 1 12
		0 0 16	4 2 0	1 0 11	0 2 4	1 1 13		
				2 0 2	0 2 6	1 2 1	1 2 2	1 2 3
				2 0 4	0 2 7	1 2 4	1 2 5	1 2 6
				2 0 6	0 2 8	1 2 7	1 2 8	1 2 11
				2 0 8	0 2 9	1 2 12	1 2 13	1 2 16
				2 0 10	0 2 11	1 3 2	1 3 3	1 3 4
				2 0 12	0 2 12	1 3 6	1 3 7	1 3 8
				2 0 14	0 2 13	1 3 9	1 3 10	1 3 11
				2 0 16	0 2 14	1 3 12	1 3 13	1 3 14
				2 0 18	0 2 15	1 3 15		
				3 0 1	0 2 16	1 4 5	1 4 6	1 4 7
				3 0 3	0 2 17	1 5 4	1 5 5	1 5 6
				3 0 5	0 2 19	1 5 7		
				3 0 9	0 4 1	2 1 1	2 1 2	2 1 4
				3 0 11	0 4 2	2 1 5	2 1 6	2 1 8
				4 0 4	0 4 3	2 2 1	2 2 2	2 2 3
				4 0 6	0 4 4	2 2 4	2 2 5	2 3 2
				4 0 8	0 4 5	2 4 5		
				5 0 5	0 4 7	3 1 4	3 1 5	
				5 0 9	0 4 9	3 2 5	3 2 6	3 2 11
					0 4 10	4 1 4	4 1 7	
					0 4 11	4 2 1	4 2 3	4 2 4
						4 2 5	4 2 6	4 2 9

Queste condizioni corrispondono a quelle del gruppo spaziale D_{3h}^{19} (Pccn):

hkl : nessuna condizione

okl : $l = 2n$

$$hko : h + k = 2n$$

$$hol : l = 2n$$

$$hoo : h = 2n$$

$$oko : k = 2n$$

$$ool : l = 2n$$

che coincidono con quelle da noi rilevate per la simonellite, qualora si permuti k con l . Riteniamo però più opportuno mantenere la nostra notazione che meglio si adatta alla morfologia della specie cristallina in considerazione, tenuto conto anche della simmetria pseudotetragonale della medesima.

In definitiva dallo studio oggetto del presente lavoro risulta che:

- a) simonellite naturale ed artificiale sono perfettamente identiche;
- b) la simonellite cristallizza nella classe bipiramidale rombica, gruppo spaziale D_{2h}^{10} (Pccn);
- c) le dimensioni della cella elementare risultano:

$$a = 9,12$$

$$b = 9,27$$

$$c = 35,80.$$

Biologia. — *Ulteriori ricerche sui centri tegmentali rombencefalici degli Anfibi Anuri* (*). Nota di ANNA MARIA ZACCHEI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Con le osservazioni comparative dei centri tegmentali rombencefalici dei Vertebrati inferiori si è visto che esiste un rapporto diretto tra tali centri e il tipo di locomozione proprio di questi animali.

Stefanelli⁽¹⁾ ha infatti osservato come nei Rettili a movimento serpentiniforme (Ofidi) vi sia un notevole sviluppo dell'apparato tegmentale e come questo sia assai minore in quelli deambulanti per arti (Sauri); infine come vi sia una ulteriore diminuzione, almeno nella grandezza, se non nel numero degli elementi, nei Cheloni in cui il tronco è rigido e la deambulazione è esclusivamente in rapporto al movimento degli arti.

Queste differenze strutturali dei centri tegmentali si ritrovano anche nei Pesci nei quali, in corrispondenza al movimento anguilliforme di alcuni Teleostei⁽²⁾, si riscontra una maggiore estensione degli elementi giganti tegmentali in confronto agli altri Teleostei nei quali la natazione avviene

(*) Dal Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma. La ricerca è stata eseguita con un contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) A. STEFANELLI, « Arch. Zool. Ital. », vol. XXIX (1941).

(2) A. STEFANELLI e A. CAMPOSANO, « Pubbl. Staz. Zool. di Napoli », vol. XX, fasc. I (1946).

per movimento ortotonico e la funzione, anziché diffusa ai vari elementi, rimane accentrata nella coppia mauthneriana che assume proporzioni gigantesche.

Come negli anguilliformi così tra i Ciclostomi, nei Petromizonti ⁽³⁾, si osserva un grande sviluppo dei centri tegmentali e degli elementi reticolari giganti che partecipano alla loro formazione.

Le ricerche condotte da vari autori (Van Hoever, Beccari, Kappers, ecc.) nei Vertebrati inferiori e nei Vertebrati superiori rivelano pur con le differenze di sviluppo accennate, un piano strutturale comune dei centri tegmentali meso-rombencefalici.

Dalle poche ricerche fatte sugli Anfibi (Herrick 1914-1930 ⁽⁴⁾, Kappers 1936 ⁽⁵⁾) risulta invece che non è possibile fare una distinzione di questi centri, poco sviluppati, in gruppi minori.

Tuttavia anche gli Anfibi presentano delle notevoli differenze di sviluppo di questi centri in rapporto al loro diverso tipo di movimento legato alla loro ecologia.

Già in una Nota del 1949 ⁽⁶⁾ mi sono occupata dello sviluppo dei centri tegmentali rombencefalici in girini di Anuri, considerando i loro rapporti con lo sviluppo delle cellule di Mauthner. Avevo allora comparato tali centri del girino di *Rana*, in cui vi sono cellule mauthneriane tipiche ed anche una coppia pre-mauthneriana (Stefanelli 1942 ⁽⁷⁾) con quelli del girino di *Bufo* in cui non si differenzia un apparato mauthneriano ⁽⁸⁾. Tale differenza era da porsi in relazione con la diversa durata di vita larvale delle due specie, assai lunga per la rana, molto breve per il rospo e al diverso sviluppo dell'apparato del nuoto rappresentato dalla coda munita di pinne. Nel girino di rana tale organo è assai più sviluppato che in quello di rospo.

Da questa analisi comparativa è risultata una evidente differenza nello sviluppo dei centri rombencefalici costituiti in *Bufo* da un numero maggiore di elementi, di relativamente grandi dimensioni, mentre nel girino di *Rana* questi elementi risultano meno grossi quasi che l'attività funzionale del sistema fosse concentrata nelle due coppie di elementi mauthneriani e pre-mauthneriani.

Riprendendo queste ricerche sui centri tegmentali degli Anfibi Anuri ho per prima cosa voluto comparare i risultati già ottenuti nei girini dei due Anuri citati con la larva di *Xenopus laevis* (Anuro aglosso sud africano), che presenta un completo adattamento alla vita acquatica. La fig. 1 mostra schematicamente in proiezione frontale la disposizione di questi centri nella larva di *Xenopus* (con abbozzo degli arti posteriori e coda della massima

(3) A. STEFANELLI, « Arch. Zool. Ital. », vol. XX (1934).

(4) C. I. HERRICK, « J. Comp. Neur. », 24 (1914); 50 (1930).

(5) KAPPERS, A. HUBER, e CROSBY, Mac Millan, New York 1936.

(6) A. M. ZACCHEI, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. VII, fasc. 1-4 (1949).

(7) A. STEFANELLI, « Bollettino di Zool. », anno XIII, n. 5-6 (1942).

(8) A. STEFANELLI e A. M. OSTI, « Boll. di Zool. », anno XIII, nn. 5-6 (1942).

lunghezza) in cui, come è noto dalle osservazioni di Stefanelli, vi è una sviluppatissima coppia di cellule di Mauthner.

Si può notare il relativo scarso sviluppo di tutto il sistema e la impossibilità di una chiara suddivisione a prescindere dal nucleo mielencefalico laterale abbastanza bene individuato come aggruppamento di cellule.

Più interessante si dimostrava invece una analisi comparativa tra individui adulti di *Xenopus*, *Rana* e *Bufo*, tenendo conto delle differenze ecologiche che portano ad una diversa utilizzazione degli arti nella locomozione.

Infatti mentre lo *Xenopus* adulto è adattato ad esclusiva vita acquatica e gli arti hanno la prevalente funzione di nuoto (lo straordinario sviluppo delle membrane interdigitali degli arti posteriori ne sono una espressione), la rana oltre a tale attività usa gli arti, nelle sue escursioni all'asciutto, per la locomozione mediante i caratteristici salti.

In *Bufo* invece troviamo un adattamento prevalentemente terragnolo e gli arti sono usati per la deambulazione tetrapoda che porta tra l'altro al sollevamento del corpo sul terreno con tutte quelle conseguenze statiche che ne derivano.

La comparazione dei centri tegmentali degli Anfibi anuri viene ad assumere un particolare interesse proprio in rapporto con queste condizioni. La fig. 2 rappresenta le proiezioni frontali dei centri tegmentali bulbari di tre adulti di *Xenopus*, *Rana* e *Bufo* ottenute con il solito metodo descritto nel mio lavoro citato.

Si osserva innanzi tutto la scomparsa del neurone di Mauthner in *Rana* e *Xenopus*. Tutto il sistema di cellule reticolari appare nelle tre specie poco sviluppato e formato da elementi di modeste dimensioni. Inoltre, come era già stato detto dagli autori citati, ogni divisione in nuclei o gruppi minori sarebbe arbitraria.

Tuttavia è evidente una differenza di sviluppo nelle tre specie. Gli elementi di maggiori dimensioni si trovano nello *Xenopus* mentre in *Bufo* le

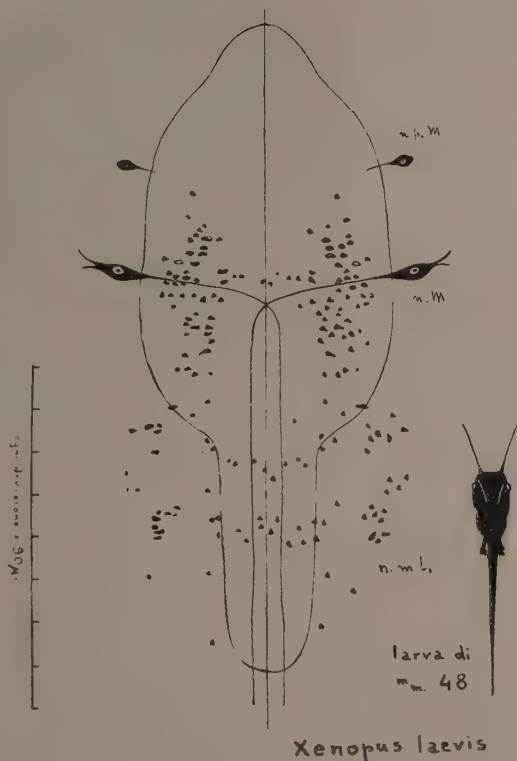


Fig. 1.

cellule sono più piccole, assumendo nella *Rana* una condizione intermedia; nel *Bufo* inoltre anche in numero inferiore.

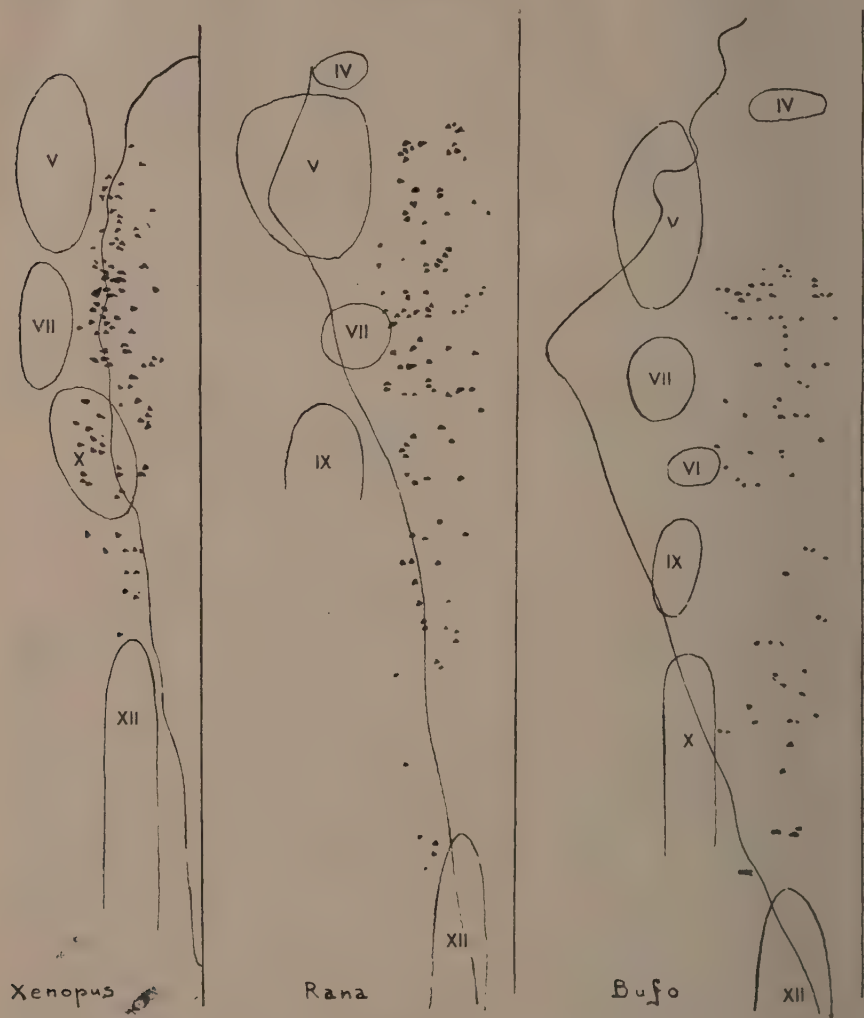


Fig. 2.

Se si tiene presente, da quanto è stato posto in luce in vari Vertebrati da Stefanelli⁽⁹⁾, che lo sviluppo dei centri tegmentali è sempre maggiore (in Pesci, Ciclostomi, Rettili) nelle specie dotate di vasta motilità del tronco e della coda, come nelle forme anguilliformi o serpentine, si chiarisce lo scarso sviluppo di questi centri negli Anuri adulti in cui non si conserva la coda e in cui il tronco è rigido.

(9) A. STEFANELLI, « Ricerca Scientifica », anno 18° (1948); anno 20° (1950).

Così le differenze che si osservano nelle tre specie comparate vanno poste in funzione di altri fattori.

Se consideriamo le condizioni di ambiente in cui vivono e si muovono questi animali constatiamo come nel *Bufo*, deambulante, si debbono instaurare nuovi meccanismi di coordinazione relativi a questo particolare tipo di movimento e infatti ho potuto osservare un ben più cospicuo sviluppo del cervelletto che nelle altre due specie considerate. In *Xenopus* il cervelletto ha il minimo sviluppo e ciò si comprende se si tiene conto essere il cervelletto degli Anuri un paleocerebello di tipo vestibolare, seguendo i concetti di Stefanelli, e come nella condizione di vita subacquea poca importanza abbiano i meccanismi di sostentamento sugli arti.

Risulta infatti una relazione tra lo sviluppo dei centri tegmentali e quello del cervelletto: nello *Xenopus* dove quest'organo è meno sviluppato i centri tegmentali hanno maggiore estensione; nel *Bufo* in cui il cervelletto è più sviluppato i centri tegmentali sono meno estesi.

È questa la condizione che si va instaurando nei tetrapodi in cui i centri tegmentali perdono il valore di centri iniziali motori (Beccari⁽¹⁰⁾), oltre che di coordinazione, per limitarsi nelle forme superiori a divenire una parte (paleotegmentale) del complesso sistema extrapiramidale di coordinazione motoria, in stretta relazione col cervelletto di tipo vestibolare e cerebrale.

Le condizioni da me illustrate nelle tre specie di anuri con graduale adattamento alla vita terrestre rappresentano tre tappe di questa trasformazione, tra gli animali a stretta vita acquatica e quelli terragnoli.

Biologia. — *Sul comportamento dell'apparato nucleolare negli ovociti di «Gobius ophiocephalus»*^(*). Nota^(**) di ENRICO VANNINI, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

In una Nota precedente, pubblicata in questi stessi «Rendiconti»⁽¹⁾, riferii su uno studio citometrico e citochimico, effettuato sugli ovociti di I ordine del crinoide *Antedon rosacea* Lamarck. In tale indagine esaminai soprattutto le variazioni di volume, che si verificano a carico del nucleolo durante l'accrescimento ovocitario, e le misi in rapporto con alcuni processi citochimici, che si svolgono nel citoplasma sia durante il periodo preparatorio alla vitellogenesi, che durante la fase di formazione ed accumulo dei globuli di tuorlo. I risultati ottenuti, allora esposti in via preliminare, sono stati successivamente elaborati in forma più completa, e in parte anche corretti od integrati con ulteriori osservazioni, in un lavoro più esteso che è

(10) N. BECCARI, *Neurologia Comparata*, Ed. Sansoni, 1943.

(*) Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Modena.

(**) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1953.

(1) E. VANNINI, *Sulle modificazioni volumetriche dei nucleoli negli ovociti in accrescimento. Osservazioni preliminari su «Antedon rosacea»*, «Rend. Accad. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. X, p. 256 (1951).

in corso di pubblicazione⁽²⁾. Con i reperti ottenuti ritengo di aver portato un contributo alle ben note interpretazioni di alcuni citologi moderni (Caspersson, Hydén), che attribuiscono al nucleolo una notevole importanza funzionale per i fenomeni di accrescimento cellulare e di sintesi od elaborazione di sostanze contenute in seno al citoplasma.

Per eseguire le suddette ricerche, preselsi gli ovociti dell'*Antedon* non solamente perché questi erano già largamente conosciuti da altri punti di vista, per me molto interessanti, riguardanti il metabolismo delle nucleoproteine in rapporto con la genesi del tuorlo (Cotronei, Urbani), ma anche perché presentavano il notevole vantaggio di esser provvisti di un unico nucleolo, che, essendo grande e regolarmente sferoidale, si prestava ottimamente alle misurazioni volumetriche. Le conclusioni raggiunte mi hanno però incoraggiato ad estendere le indagini anche ad altri ovociti, di struttura più complessa e di meno facile studio, perché provvisti di numerosi nucleoli. Mi sono, infatti, reso conto che i miei reperti citometrici avrebbero acquistato un interesse maggiore, qualora avessero trovato una conferma in queste nuove ricerche, compiute su animali di gruppi sistematici lontani dagli Echinodermi; e che sarebbe stato pure interessante rilevare eventuali differenze da tipo a tipo di ovociti, le quali avrebbero potuto dare lo spunto a considerazioni di carattere comparativo.

Animato da tali intendimenti, ho incaricato il mio allievo Ranzoli di eseguire un'indagine di questo genere, sul comportamento dei nucleoli negli ovociti del gasteropode *Patella coerulea* L.: i risultati conseguiti sono in corso di stampa⁽³⁾, ma posso dire fin d'ora che concordano, in maniera assai soddisfacente, con quelli miei sull'*Antedon*. Io stesso, d'altra parte, mi sono dedicato a studiare gli ovociti del teleosteo *Gobius ophiocephalus* Pallas, che diversificano dagli ovociti di *Antedon* per numerose caratteristiche, fra cui quelle di raggiungere dimensioni assai più considerevoli, di accumulare una quantità di tuorlo enormemente maggiore e di possedere moltissimi nucleoli.

La presente Nota è dedicata ad esporre sinteticamente i principali risultati di queste mie osservazioni.

Gli esemplari di *Gobius ophiocephalus* Pallas da me adoperati provengono dalla Laguna Veneta (Chioggia). Frammenti di ovaie ricche di ovociti in vari stadi di accrescimento, prelevati da femmine adulte pescate in diversi mesi dell'anno⁽⁴⁾, sono stati fissati in liquido di Helly, inclusi in paraffina

(2) E. VANNINI, *Osservazioni sull'accrescimento del nucleolo negli ovociti di «Antedon rosacea»*. «Pubbl. Staz. Zool. Napoli» (in corso di stampa).

(3) F. RANZOLI, *Osservazioni citometriche e citochimiche sul comportamento dei nucleoli nell'ovogenesi di «Patella coerulea» L.* «Caryologia» (in corso di stampa).

(4) La completa maturità sessuale viene raggiunta in aprile-maggio: cfr. C. PILATI, *Osservazioni sull'apparato riproduttore e sulla gametogenesi nel «Gobius ophiocephalus» Pallas*. «Arch. Zool. Ital.», vol. XXXV, p. 171 (1950). Per una revisione sistematica delle varie specie del genere *Gobius* della Laguna Veneta, vedi G. CAVINATO, *Revisione dei «Gobius» della Laguna Veneta*. «Arch. Oceanogr. Limnol.», vol. VII, p. 157 (1950).

e sezionati serialmente in fette microtomiche dello spessore di 10 μ . Alcune serie di fette sono state utilizzate per eseguire gli esami citometrici; altre, invece, sono servite a uno studio citochimico, che ha permesso di valutare, con un metodo approssimativamente quantitativo, le variazioni di concentrazione delle ribonucleoproteine nei nucleoli e nel citoplasma degli ovociti delle varie dimensioni. I metodi di studio sono essenzialmente gli stessi delle mie ricerche precedenti su *Antedon rosacea*.

I preparati destinati agli esami citometrici sono stati colorati con una miscela di verde di metile e pironina, allestita secondo le indicazioni di Unna-Pappenheim. Tale miscela tinge in rosso i nucleoli di tutti gli ovociti ed in varie tonalità di rosso il citoplasma degli ovociti delle diverse dimensioni. Aggiungo subito che un controllo, effettuato con il metodo della digestione, in ribonucleasi (Brachet), ha dimostrato che tale colorabilità da pironina dipende dalla presenza di ribonucleoproteine ed è tanto più intensa, quanto più elevata è la concentrazione di queste medesime sostanze. Infatti, la colorabilità da pironina scompare dopo la digestione in ribonucleasi; per raggiungere questo effetto, però, il soggiorno in ribonucleasi deve venire prolungato tanto maggiormente, quanto più intensa è, in assenza dell'enzima, la tinta rossa assunta dalle strutture cellulari.

Le sezioni di ovaie colorate con il metodo di Unna-Pappenheim sono state adoperate per eseguire la completa ricostruzione grafica di 85 ovociti di varie dimensioni. Il sistema seguito è consistito nel proiettare le fette con la camera lucida, all'ingrandimento di 1000 diametri, e nel disegnare, per tutte le superficie di sezione di ogni ovocita, il contorno cellulare complessivo, quello del nucleo e quello dei nucleoli. Dalle serie di disegni ottenute è stato facile ricavare, per ciascun ovocita, il volume cellulare complessivo, quello del nucleo e quello dei nucleoli. Data la forma regolarmente sferoidale od ellissoide degli ovociti e dei loro suddetti componenti, tali volumi sono stati calcolati, in μ^3 , adoperando la nota formula dell'ellissoide regolare $4/3 \pi a.b.c$, in cui le lettere a , b rappresentano, rispettivamente, le lunghezze in μ dei raggi maggiore e minore della massima superficie di sezione, e la c il valore medio fra di esse. Particolare attenzione è stata posta nell'evitare che il volume di un medesimo nucleolo, tagliato in due nelle sezioni microtomiche, venisse calcolato più di una volta.

I preparati destinati allo studio citochimico sono stati, invece, sottoposti ad una serie di colorazioni con miscele di verde di metile Hollborn e pironina Grübler, disciolte in liquidi tamponati a pH differenti (serie di tamponi di Sørensen). Con questa variante del metodo di Unna-Pappenheim, proposta da Gerola e da me ⁽⁵⁾ e citata anche nel recente trattato di istochimica del Lison ⁽⁶⁾, ho potuto confrontare le concentrazioni delle ribonucleoproteine nei nucleoli e nel citoplasma degli ovociti delle varie dimensioni, che appartengono a stadi di sviluppo differenti.

Il metodo si basa sul fatto che le regioni cellulari contenenti ribonucleoproteine vanno perdendo la loro affinità verso la pironina, ed acquistandone una verso il verde di metile, mano a mano che si adoperano miscele coloranti tamponate a pH più alti. Poiché la zona del graduale viraggio dalla tingibilità in rosso, dovuta alla sola pironina, a quella in verde, dovuta al solo verde di metile, è situata ad un grado di alcalinità tanto maggiore, quanto più alta è la concentrazione delle ribonucleoproteine, ne consegue che il riconoscimento del livello a cui sono collocati i pH di viraggio, caratterizzati dall'acquisizione di una tinta

(5) F. M. GEROLA e E. VANNINI, *L'importanza del pH nella colorazione con verde di metile pironina, usata da Brachet per la localizzazione istochimica dell'acido ribonucleico*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. V, p. 77 (1948). — *La colorazione con verde di metile pironina in mezzo tamponato nella ricerca degli acidi ribonucleici*. « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », vol. XXV, p. 644 (1949).

(6) L. LISON, *Histochimie et cytochimie animales. Principes et méthodes*. Paris (1953).

intermedia viola, costituisce un indizio sufficientemente approssimato della concentrazione delle ribonucleoproteine nelle diverse cellule o regioni cellulari.

Su alcune serie di fette è stata anche effettuata la reazione di Feulgen, che ha dato sempre esito negativo per gli ovociti degli stadi esaminati.

Il volume totale degli ovociti studiati varia da circa $2.400 \mu^3$ a circa $17.000.000 \mu^3$. Questo lungo periodo dello sviluppo ovocitario, corrispondente alla così detta fase di grande accrescimento, inizia con il momento della perdita quasi completa della colorabilità dei cromosomi, che hanno raggiunto lo stadio diplotene, e si estende fino al raggiungimento di un grado molto progredito di accumulo di globuli di tuorlo nel citoplasma. Per le loro dimensioni, per la loro struttura microscopica e per la loro colorabilità con la miscela di Unna-Pappenheim, tali ovociti possono essere ripartiti in cinque gruppi, che rappresentano altrettante tappe del processo di accrescimento e di maturazione.

Gli ovociti del primo gruppo, di volume compreso fra 2.400 e $7.000 \mu^3$, hanno un nucleo provvisto di un numero relativamente piccolo di nucleoli (da poco più di una decina a circa 50) e un citoplasma assai pironinofilo. Quelli del gruppo successivo, dal volume di 7.000 a quello di $100.000 \mu^3$, mostrano un numero progressivamente crescente di nucleoli (da una ventina a circa 150) e un citoplasma ancor più pironinofilo che gli ovociti del primo gruppo. Gli ovociti del terzo gruppo, corrispondenti a volumi da 100.000 a $500.000 \mu^3$, sono dotati di un numero di nucleoli ancora più elevato (da poco meno di un centinaio a più di 300), ma il citoplasma, pure apparendo assai pironinofilo, lo è un po' meno che nel gruppo precedente. Negli ovociti del quarto gruppo, il cui volume varia da circa $1.000.000$ a circa $6.000.000 \mu^3$, continua ad aumentare fortemente il numero dei nucleoli, i quali assumono tutti una disposizione marginale al disotto della membrana nucleare ⁽⁷⁾; il citoplasma risulta modicamente pironinofilo ed alla sua periferia compaiono molti vacuoli sferoidali, preludenti al processo di genesi del tuorlo ⁽⁸⁾. Nel quinto ed ultimo gruppo, gli ovociti (compresi fra i volumi di $10.000.000$

(7) Per uno studio accurato del comportamento dei nucleoli negli ovociti dei Teleostei, vedi T. ITO, *Ueber die Formänderung der Randnukleolen der wachsenden Oozyten bei einem Knochenfisch mit besonderer Berücksichtigung auf die Frage über den Austritt der Nukleolarsubstanz ins Zytoplasma*. «Cytologia», vol. IX, p. 283 (1938).

(8) Per un'analisi del processo di vitellogenesi negli ovociti dei Teleostei, vedi (fra l'altro): B. KONOPACKA, *Recherches histochimiques sur le développement des Poissons. I. La vitellogenèse chez le goujon et la carpe*. «Bull. Acad. Polonaise Sci. Lett.», Cl. Sci. Math. Nat., sér. B: Sci. Nat., vol. II, p. 163 (1935); *Recherches histochimiques sur le développement des Poissons. II. La vitellogenèse chez certains Téléostéens de mer* «*Gobius paganellus*», «*Smaris alcedo*», «*Crenilabrus pavo*», «*Atherina Boyeri*» et «*Atherina hepsetus*». «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. XVI, p. 327 (1937); V. D. MARZA, E. V. MARZA a. M. J. GUTHRIE, *Histochemistry of the ovary of «Fundulus heteroclitus» with special reference to the differentiating oocytes*. «Biol. Bull.», vol. LXXIII, p. 67 (1937); V. D. MARZA, *Histophysiologie de l'ovogénèse*. «Act. Scient. Ind.», Paris (1939); L. VAKAET, *La répartition des acides nucléiques au cours du grand accroissement de l'oeuf de «Lebistes reticulatus»*. «Bull. Acad. Roy. Belg.», Cl. Sci., sér. V, vol. XXXVI, p. 941 (1950).

e 17.000.000 μ^3) hanno il medesimo elevatissimo numero di nucleoli a disposizione marginale, rilevato per il gruppo precedente, e il loro citoplasma, ormai infarcito di grossi globuli di tuorlo, mostra soltanto una modestissima affinità verso la pironina.

Questi reperti si prestano ad essere interpretati da un punto di vista citochimico. Tenendo conto del fatto che, come già dicemmo, il grado di colorabilità da pironina dipende dal contenuto in ribonucleoproteine, *i dati esposti dimostrano che la concentrazione delle ribonucleoproteine citoplasmatiche cresce passando dagli ovociti del primo gruppo a quelli del secondo e poi decresce gradatamente negli ovociti dei gruppi successivi.* Ciò è confermato, con maggiore precisione, anche dai risultati delle colorazioni effettuate con le miscele di verde di metile e pironina disciolte in liquidi tamponati a pH differenti: colorazioni che, come già dicemmo, permettono di valutare la concentrazione delle ribonucleoproteine, in base alla dimostrazione del grado di pH, cui corrisponde un viraggio dall'affinità verso la pironina all'affinità verso il verde di metile. Quanto più alto è il valore del pH di viraggio, tanto maggiore è la concentrazione delle ribonucleoproteine. Come appare dall'annessa Tabella, il valore del grado del pH di viraggio (tinta *viola*, da contemporanea colorabilità da parte di entrambi i coloranti) aumenta dal primo al secondo gruppo di ovociti e diminuisce negli ovociti dei gruppi successivi, indicando un'analoga variazione della concentrazione delle ribonucleoproteine nel citoplasma.

Tabella dei risultati delle colorazioni con verde di metile e pironina in mezzo tamponato. La tinta «viola» indica il pH di viraggio.

pH	Colore assunto dal citoplasma in ovociti di volume diverso				
	2.400- 7.000 μ^3	7.000- 100.000 μ^3	100.000- 500.000 μ^3	1.000.000- 6.000.000 μ^3	10.000.000- 17.000.000 μ^3
11	<i>bleu</i>	<i>viola</i>	<i>bleu</i>	<i>verde</i>	<i>verde</i>
10	<i>viola</i>	<i>rosso-violaceo</i>	<i>viola</i>	<i>viola</i>	<i>bleu</i>
9	<i>rosso</i>	<i>rosso-intenso</i>	<i>rosso</i>	<i>rosso-violaceo</i>	<i>viola</i>
8	<i>rosso</i>	<i>rosso-intenso</i>	<i>rosso</i>	<i>rosso-chiaro</i>	<i>rosso-chiaro</i>

Per quanto riguarda la colorabilità dei nucleoli, possiamo aggiungere che questi, in tutti e cinque i gruppi di ovociti, mostrano sempre un'affinità verso la pironina assai elevata. Negli ovociti di volume compreso fra circa 30.000 e circa 200.000 μ^3 esiste un «macronucleolo», che spicca fra tutti gli altri per le sue maggiori dimensioni e per la sua colorabilità ancora più intensa da parte della pironina. Nelle colorazioni in mezzo tamponato, la

generalità dei nucleoli appare tinta in rosso ai pH 8 e 9, in rosso-violaceo a pH 10 e in viola a pH 11; il suddetto macronucleolo appare invece tinto in rosso-intenso ai pH 8, 9 e 10 ed in rosso-violaceo a pH 11. Ciò dimostra l'elevatissima concentrazione delle ribonucleoproteine nei nucleoli di tutti gli ovociti, ed in modo particolare nel macronucleolo degli ovociti che ne sono provvisti.

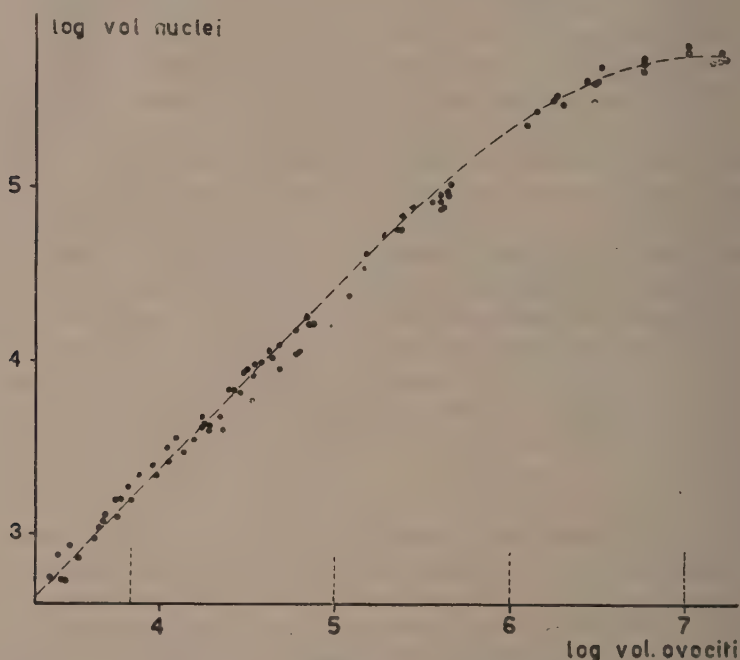


Fig. 1. - Variazioni del volume del nucleo in funzione dell'accrescimento di tutto l'ovocita. Sulle ascisse, il logaritmo dei volumi ovocitari; sulle ordinate, il logaritmo dei volumi nucleari. Sia in questo che nei diagrammi successivi, ogni punto corrisponde a un ovocita e le quattro linee verticali a tratteggio, sollevate sull'asse delle ascisse, delimitano i volumi dei cinque gruppi di ovociti, considerati nella Tabella.

Questi sommari rilievi citochimici sullo sviluppo degli ovociti di *Gobius* sono sufficienti, per permetterci di passare all'esposizione dei principali risultati dell'indagine citometrica.

Una prima parte di questo studio quantitativo è consistita nell'analisi delle variazioni volumetriche del nucleo durante l'accrescimento ovocitario. Il diagramma della fig. 1 mette in evidenza che i volumi del nucleo, considerati in funzione della grandezza cellulare, appaiono distribuiti lungo il decorso di una linea, che ha l'andamento di una retta diagonale negli ovociti del primo, secondo e terzo gruppo, mentre in quelli del quarto e quinto gruppo flette in basso tendendo a divenire orizzontale. Ciò dimostra che in un primo, lungo periodo esiste un rapporto di diretta proporzionalità fra

accrescimento del nucleo e accrescimento di tutto l'ovocita; e che soltanto più tardi, negli ovociti che si preparano alla vitellogenesi o la stanno effettuando, il nucleo tende a stabilizzarsi a una grandezza stazionaria.

Un'altra parte dell'esame citometrico è stata dedicata allo studio delle variazioni del volume complessivo dei nucleoli, contenuti nel nucleo degli ovociti delle varie dimensioni. Dal diagramma della fig. 2 risulta chiaramente che l'accrescimento in volume dei nucleoli, considerato anche questa volta in funzione dell'accrescimento cellulare complessivo, *procede dapprima*

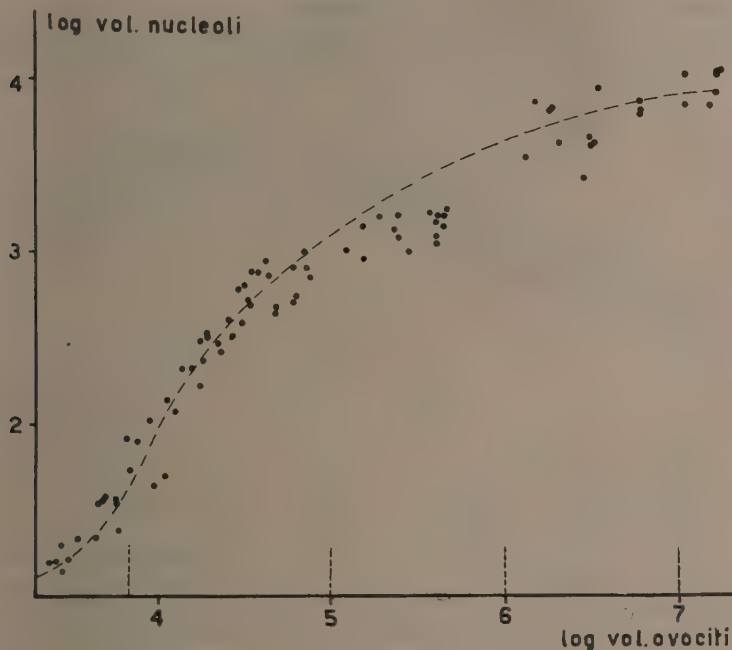


Fig. 2. - Variazioni del volume dei nucleoli in funzione dell'accrescimento di tutto l'ovocita. Sulle ascisse, il logaritmo dei volumi ovocitari; sulle ordinate, il logaritmo dei volumi nucleolari. Ulteriori spiegazioni, come nel diagramma precedente.

assai rapidamente negli ovociti del primo e del secondo gruppo, che sono ancora relativamente lontani dall'inizio della vitellogenesi; *continua, invece, più lentamente negli ovociti dei gruppi successivi*, includenti il periodo terminale di formazione ed accumulo del tuorlo. Nel suo complesso, *la curva di accrescimento dei nucleoli ha l'andamento di una linea sigmoide*, simile a quella ben nota per molti altri processi accrescitivi.

Il confronto fra le due curve di accrescimento appare interessante, perché dimostra che, durante il periodo di vita cellulare esaminato, *nucleo e nucleoli variano di volume con un andamento ben diverso*. Ciò induce ad attribuire ai nucleoli un buon grado di indipendenza funzionale, rispetto al nucleo nel quale sono contenuti.

Tale confronto fra il comportamento del nucleo e quello dei nucleoli però risulta ancora più dimostrativo se si considerano, sempre in funzione dell'accrescimento ovocitario, le variazioni della grandezza relativa del nucleo o dei nucleoli, rispetto al citoplasma. La grandezza relativa del nucleo è stata calcolata sotto forma di *rapporto nucleo-plasmatico* (N/P), ottenuto, come di consueto, dividendo il volume nucleare per il volume del citoplasma. In modo analogo, la grandezza relativa dei nucleoli è stata calcolata sotto forma di *rapporto nucleolo-plasmatico* (n/P), ottenuto dividendo il volume complessivo dei nucleoli per il volume del citoplasma.

Il diagramma della fig. 3 fa rilevare che *i valori del rapporto N/P tendono ad essere costanti in un primo periodo dell'accrescimento ovocitario*, corrispon-

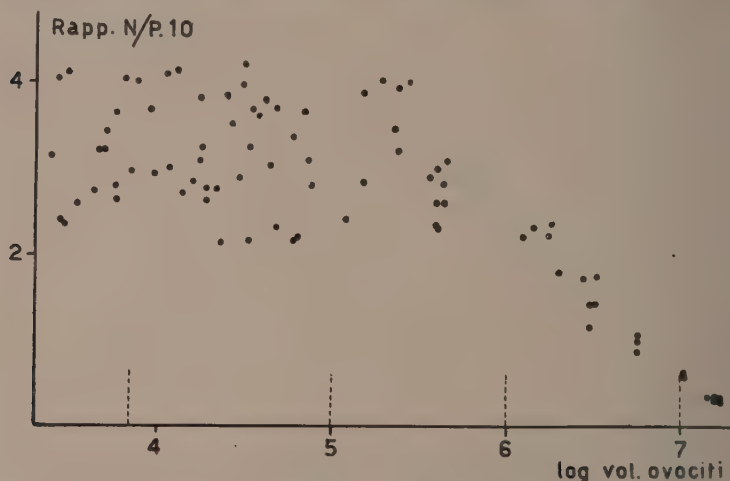


Fig. 3. - Variazioni del rapporto nucleo-plasmatico (N/P) in funzione dell'accrescimento ovocitario. Sulle ascisse, il logaritmo dei volumi ovocitari; sulle ordinate, il valore del rapporto N/P moltiplicato dieci volte. Ulteriori spiegazioni, come nei diagrammi precedenti.

dente agli ovociti dal primo al terzo gruppo, non ancora in vitellogenesi; ma *si abbassano rapidamente nel periodo successivo*, corrispondente agli ovociti del quarto e quinto gruppo, che si preparano alla fase di genesi del tuorlo o l'hanno già raggiunta. Il diagramma della fig. 4, a sua volta, dimostra che *i valori del rapporto n/P crescono rapidamente dal primo al secondo gruppo di ovociti e decrescono, poi, negli ovociti dei gruppi successivi*. Questa diversità fra il comportamento dei volumi relativi del nucleo e dei nucleoli, ovviamente, è correlata con quanto abbiamo già rilevato sul comportamento dei volumi assoluti rispettivi.

L'andamento del diagramma della fig. 4 è particolarmente interessante, perché dimostra che *esiste un'evidente corrispondenza fra il ciclo di variazione del volume nucleolare relativo ed il ciclo di variazione della concentrazione delle ribonucleoproteine, contenute nel citoplasma ovocitario*. Nel diagramma, a scopo dimostrativo, tale corrispondenza è stata espressa sotto forma di

una fascia tratteggiata, che schematizza i risultati delle colorazioni del citoplasma con verde di metile e pironina in mezzo tamponato, già indicati nell'apposita Tabella. È evidente che, in ciascun gruppo di ovociti, a valori elevati del rapporto n/P corrispondono elevate concentrazioni di ribonucleoproteine nel citoplasma, mentre a valori più bassi del medesimo rapporto corrispondono concentrazioni più basse di ribonucleoproteine.

Il chiarimento di questa stretta correlazione, fra variazioni di volume dei nucleoli e variazioni del contenuto del citoplasma in ribonucleoproteine, appare in ottimo accordo con le funzioni, che oggi si tende ad attribuire agli apparati nucleolari. Questi, formati in gran parte da ribonucleoproteine,

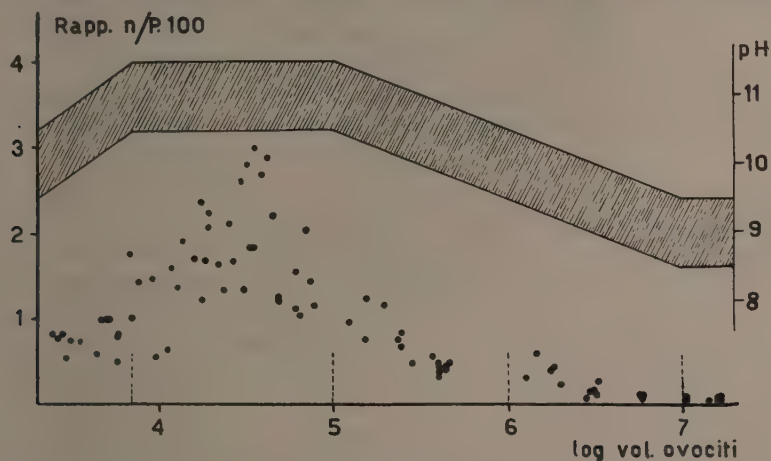


Fig. 4. - Variazioni del rapporto nucleolo-plasmatico (n/P) in funzione dell'accrescimento ovocitario. Sulle ascisse, il logaritmo dei volumi ovocitari; sulle ordinate, il valore del rapporto n/P moltiplicato cento volte. La fascia tratteggiata, riferita ai gradi di pH segnati a destra, indica le concentrazioni delle ribonucleoproteine citoplasmatiche. Ulteriori spiegazioni, come nei diagrammi precedenti.

si ammette siano veri e propri organiti nucleari, elaboranti - con meccanismi biochimici complessi - le ribonucleoproteine destinate al citoplasma. Negli ovociti all'inizio del proprio accrescimento, l'aumento veloce del volume dei nucleoli e del valore del rapporto n/P costituirebbe l'espressione di una loro intensa attivazione funzionale. L'arricchimento contemporaneo del citoplasma in ribonucleoproteine sarebbe, poi, una conseguenza di tale attivazione; in rapporto con il fatto che le ribonucleoproteine si considerano sostanze necessarie per lo svolgersi di processi di anabolismo cellulare, esso conferirebbe all'ovocita la potenzialità di un rigoglioso accrescimento, preparandolo anche alla produzione di sostanze di riserva. Negli ovociti di maggiori dimensioni, che si trovano alla fine del proprio accrescimento, il rallentamento del ritmo accrescitivo dei nucleoli e l'abbassamento dei valori del rapporto n/P esprimerebbero, viceversa, una diminuzione della funzionalità dell'apparato nucleolare, con conseguente impoverimento del cito-

plasma in ribonucleoproteine, che si consumano durante la genesi dei globuli di tuorlo.

Confrontando i risultati delle presenti osservazioni con i reperti precedentemente conseguiti sugli ovociti di *Antedon* (2) e *Patella* (3), si rilevano talune differenze nel ritmo di accrescimento dei volumi nucleari; ma si nota una perfetta concordanza sia nel comportamento dei volumi dei nucleoli, che nel ciclo di variazione quantitativa delle ribonucleoproteine del citoplasma.

Biologia. -- *La struttura cerebellare degli Anfibi Anuri in rapporto alle condizioni statiche e di locomozione* (*). Nota (**) di ANNA MARIA ZACCHEI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Le ricerche sul sistema nervoso condotte con indirizzo comparativo ecologico, come si stanno svolgendo da molti anni nel nostro Istituto, mettendo cioè in rapporto i dati morfologici anatomo comparativi con l'ecologia degli animali studiati, chiariscono il significato fisiologico delle varie strutture collegate alle diverse condizioni di vita.

Lo Stefanelli si è occupato particolarmente dei Rettili osservando come in quelli dotati di movimento serpentino le cellule tegmentali sono numerose, di grandi dimensioni e sparse per cui è difficile poter stabilire un aggruppamento in nuclei distinti, mentre nei Rettili deambulanti per arti queste cellule sono di volume più ridotto, meno numerose e raggruppate in nuclei meglio delimitati.

Tali differenze strutturali del sistema di coordinazione motoria in relazione alla differente motilità dei Rettili comparati hanno fatto pensare che anche il sistema statico presentasse rapporti strutturali simili.

Le ricerche di Stefanelli (1941) (1) estese al sistema vestibolare hanno dimostrato come vi sia una maggiore estensione del nucleo tangenziale e un minor sviluppo del nucleo, di Deiters nelle forme serpentine che in quelle deambulanti. Egli ritiene che il nucleo tangenziale sia deputato ai riflessi spinali in rapporto all'azione della muscolatura segmentale del tronco.

Per quanto riguarda il cervelletto Stefanelli ha visto che nei Rettili deambulanti si presenta più esteso di quello dei Rettili serpentine. La differenza citoarchitettica più evidente è a carico delle cellule di Purkinje che si presentano grosse e ben delimitate in un sol strato nei Rettili dotati di arti e in strati triplici o quadruplici e di dimensioni minori e mal allineate negli animali senza arti e a movimento serpentino (Pietrogrande) (2).

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1953.

(1) A. STEFANELLI, « Arch. di Fisiologia », vol. XLIV, fasc. 2 (1944); « La Ricerca Sc. », Suppl. Anno 18 (1948).

(2) V. PIETROGRANDE, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », XVI (1941); « Arch. It. Anat. Embriol. » XLVIII (1942);

Anche i nuclei cerebellari ⁽³⁾ si presentano diversamente conformati: i Rettili deambulanti hanno due nuclei distinti, uno laterale e uno mediale, mentre questa distinzione è sempre meno evidente nei sauri serpentine fino a che negli Ofidi se ne osserva uno solo.

In un mio lavoro ⁽⁴⁾ sui centri tegmentali degli Anfibi anuri ho potuto constatare come anche in questi animali vi sia una relazione tra lo sviluppo e l'estensione dei centri tegmentali e il tipo di locomozione e di vita propri delle specie considerate: *Bufo*, *Rana* e *Xenopus*.

Questi animali hanno infatti attitudini statiche diverse, relative alla stazione sugli arti e la locomozione. Il *Bufo* che si solleva sugli arti per la deambulazione è eminentemente terragnolo andando all'acqua solo nel periodo di deposizione delle uova, la *Rana*, più legata all'ambiente acquatico, passa tuttavia molto del suo tempo sul terreno ove si muove con i ben noti salti, lo *Xenopus* (anuro agloso sud-africano), animale ad esclusiva vita acquatica non potendo sopravvivere al di fuori di essa che per breve periodo, adopera gli arti posteriori, molto palmati, per il nuoto e non per il sostentamento.

Avevo allora notato come nel *Bufo* e nella *Rana* le cellule tegmentali sono più piccole, in minor numero e più sparse che nello *Xenopus* pur essendo impossibile in ogni caso una delimitazione in nuclei distinti e come a questa maggiore estensione dei centri tegmentali delle forme a vita più eminentemente acquatica corrispondesse un minor sviluppo del cervelletto.

Una osservazione macroscopica di questo faceva pensare che anche in quest'organo, tenendo presente come il cervelletto sia il principale centro delle reazioni che intervengono nel coordinamento e nella regolazione degli impulsi motori, vi fossero differenze strutturali in rapporto all'ecologia dell'animale e alla differente statica di questi.

Il cervelletto delle tre forme presenta delle variazioni per il diverso grado di sviluppo delle parti laterali, le auricole, e della parte mediale il *corpus cerebelli*. Esso appare come una lamina un pò curva, con il lato convesso rivolto caudalmente verso il IV ventricolo, con auricole piccole ma ben evidenti in *Bufo* e *Rana*, in *Xenopus* come una laminetta sottile non differenziata in auricola e che si continua direttamente con le pareti alari del rombencefalo.

Uno studio della morfologia del cervelletto degli anuri è stato fatto da Larsell ⁽⁵⁾ (1923-24). Questo autore ha considerato lo sviluppo del cervelletto nella metamorfosi in rapporto quindi al complicarsi del sistema vestibolare, alla riduzione e alla scomparsa del sistema della linea laterale e all'aumento delle vie propriocettive generali in relazione allo sviluppo degli arti.

Gli Anfibi infatti, prima e dopo la metamorfosi, che segna il passaggio dall'ambiente acquatico a quello terrestre, dimostrano le modalità di tran-

(3) A. STEFANELLI, «Mon. Zool. It.», LIV (1943).

(4) A. M. ZACCHEI, «Rend. Acc. Lincei», VII (1949).

(5) LARSELL, «J. Comp. Neur.», 36 (1923); «J. Comp. Neur.» (1925).

sizione tra le forme cerebellari di animali menanti vita acquatica e quelli terrestri.

Negli Anfibi branchiati, quali sono le larve degli Anuri, è presente la linea laterale come nei Pesci, anche se molto meno sviluppata, e il paleocerebello è di tipo laterale (secondo la classificazione di Stefanelli).

Con la metamorfosi e il passaggio dall'ambiente acquatico a quello terrestre si instaura una particolare attività propriocettiva generale rappresentata dalle vie spino cerebellari (sensibilità propriocettiva degli arti) in relazione alla nuova condizione di equilibrio. Il cervelletto connesso con le fibre spinali, e in rapporto al grande sviluppo dei centri vestibolari aumenta di dimensioni in relazione a questa accentuata attività; è questo il cervelletto di « tipo vestibolare » (Stefanelli 1939-48), così detto per essere le vie vestibolari le prevalenti vie cerebellipete.

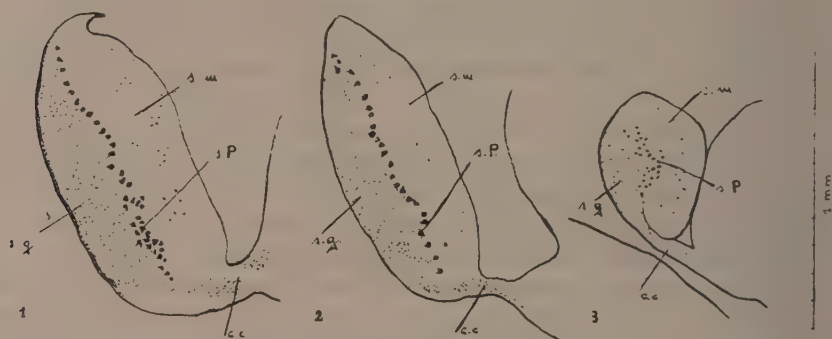


Fig. 1. - Schema delle sezioni longitudinali mediali del cervelletto di *Bufo* (1) *Rana* (2), *Xenopus* (3).

s. P. strato delle cellule di Purkinje, s. m. strato moleculare, s. g. strato granulare; c. c. commissura cerebellare

Gli studi comparativi sulla struttura istologica del cervelletto mostrano come vari la disposizione delle cellule di Purkinje nei vari Vertebrati.

Negli Anfibi lo strato delle cellule di Purkinje è ben delimitato (Herick 1914), formato da più elementi sovrapposti e senza un allineamento regolare; ma ho potuto notare che il loro numero e il loro allineamento varia negli animali considerati.

Dalle sezioni longitudinali e trasversali delle tre specie considerate, *Bufo*, *Rana* e *Xenopus*, colorate con bleu di Toluidina e col metodo argenteo di Bodian ho eseguito dei disegni alla camera lucida (fig. 1) per meglio chiarire i punti di contatto e le differenze trovate.

Lo strato delle cellule di Purkinje occupa una posizione ben definita tra gli strati granulare e molecolare ma con delle caratteristiche condizioni nelle specie. Così, mentre nel *Bufo* e nella *Rana* le cellule sono disposte per lo più in un solo strato (in doppia fila in qualche punto in prossimità della base), nello *Xenopus* sono disposte disordinatamente in tre, quattro strati e sono soprattutto accentrate nel terzo medio del corpo cerebellare.

Le cellule di Purkinje della *Rana* e del *Bufo* hanno un corpo cellulare rotondeggiante, quelle dello *Xenopus* sono molto più piccole e ovoidali (fig. 2). Riguardo agli altri due strati non si notano differenze essenziali tra le tre specie.

Il foglietto granulare si estende lateralmente nelle auricole, molto ridotte, in relazione al fatto che il sistema della linea laterale negli Anuri con la metamorfosi scompare e rimangono solo le connessioni vestibolari con questa parte della struttura che si sviluppa dall'area acustica.

Particolarmente interessante è l'apparato della linea laterale dello *Xenopus*. Questo anuro, per il suo particolare adattamento alla vita acquatica, conserva anche da adulto tale apparato che anzi si sviluppa ancor più che nella larva. Il coesistere in questa specie dei centri della linea laterale e di quelli vestibolari (Stefanelli e Zacchei) ⁽⁶⁾ non contribuisce affatto, con l'apporto delle loro fibre, ad un particolare sviluppo del cervelletto che invece nello *Xenopus* si presenta molto più ridotto rispetto a quello del *Bufo* e della *Rana*.

Mentre in questi, come ho osservato prima, è una lamina massiccia e piuttosto cospicua e che si continua coi bordi delle pareti alari del rombencefalo formando due insenature laterali, due

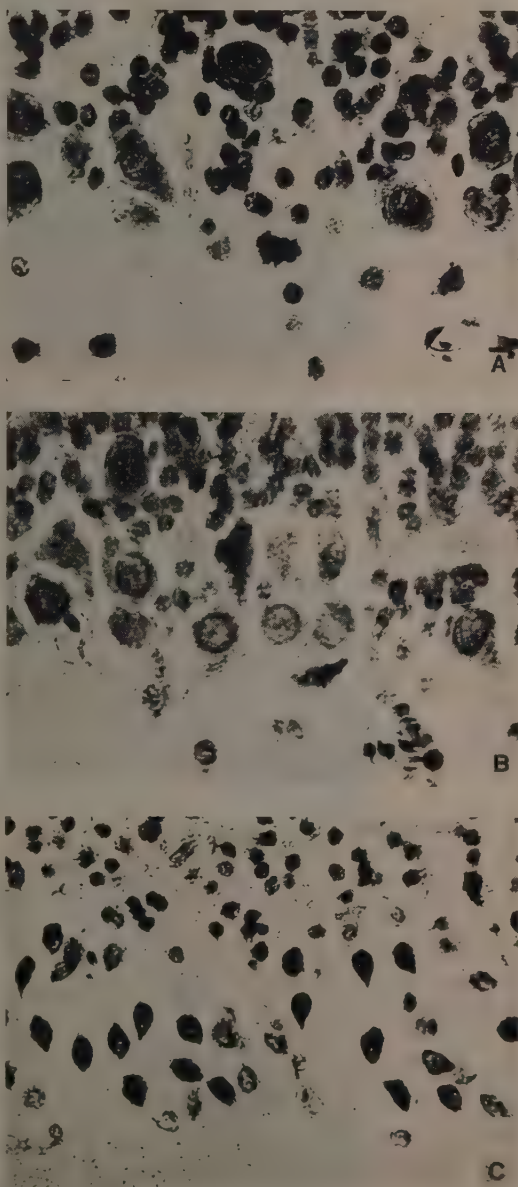


Fig. 2. - Cellule di Purkinje di *Bufo* (A), *Rana* (B), *Xenopus* (C) (Colorazione con bleu di Toluidina).

(6) STEFANELLI e ZACCHEI, « Rend. Acc. Lincei », VII (1949).

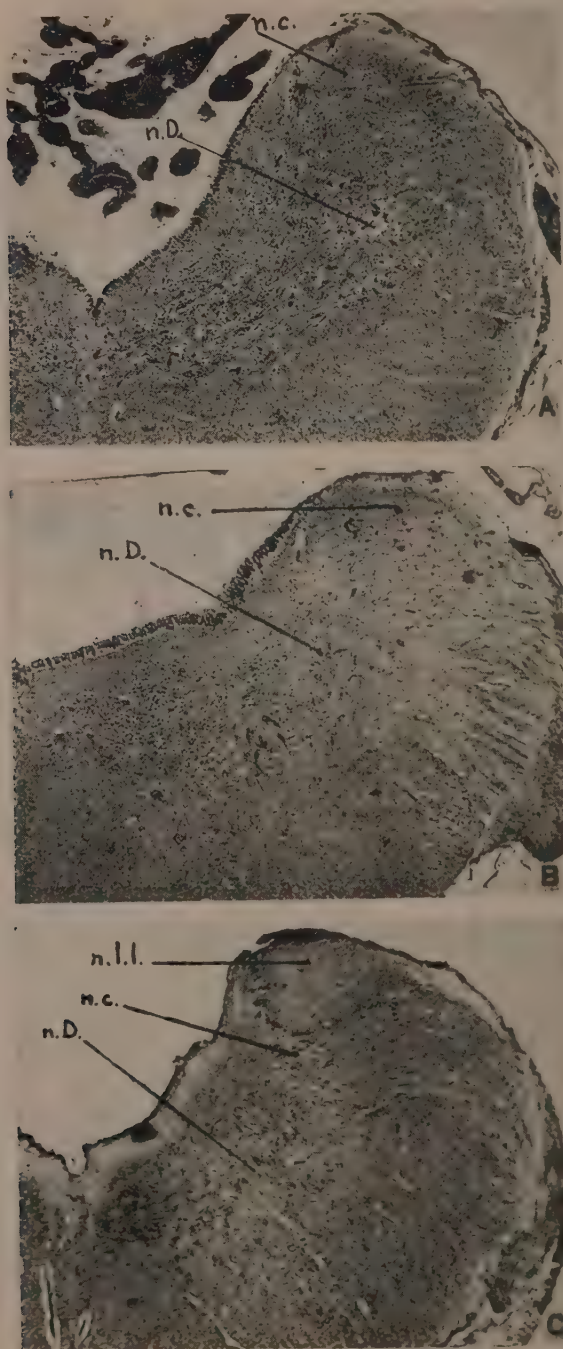


Fig. 3. - Sezioni trasversali del midollo allungato di *Bufo* (A), *Rana* (B), *Xenopus* (C) all'altezza del nucleo di Deiters. n. c. nucleo cocleare, n. D. nucleo di Deiters, n. l. l. nucleo della linea laterale. (Metodo all'argento colloidale di Bodian).

piccole auricole, nello *Xenopus* tale laminetta sottile si continua direttamente con questi. Questa condizione è una conferma che negli Anfibi anuri (anche in quelli dotati di linea laterale) il cervelletto è di tipo esclusivamente vestibolare (Stefanelli).

Un esame dei nuclei cerebellari non mette in evidenza differenze notevoli nelle tre specie esaminate; solo mentre è possibile fare una delimitazione approssimativa in un nucleo cerebellare in *Bufo* e *Rana*, distinto dal nucleo vestibolare e dall'eminenza del V°, in *Xenopus* questo risulta impossibile.

Parallelamente allo sviluppo del sistema vestibolare e alla riduzione della linea laterale si ha, negli anuri adulti, la comparsa di un'area cocleare. Nello *Xenopus*, in cui la linea laterale permane tutta la vita, si è visto chiaramente (Stefanelli e Zacchei) che i due apparati coesistono e non derivano l'uno dall'altro come ritenevano il Kappers e Larsell (fig. 3).

L'area cocleare nello *Xenopus* non ha tuttavia una grande estensione e ciò in rapporto alla notevole riduzione dell'apparato acustico di questi animali che vivono sempre in acqua. Nella *Rana* e nel *Bufo* la membrana del timpano è molto evidente mentre nello *Xenopus* è completamente opercolata dalla pelle e tutto l'apparato uditivo risulta più ridotto.

In rapporto con la riduzione dell'area acustica in *Xenopus* ho osservato come il nucleo dell'istmo del mesencefalo, centro acustico tipico degli Anfibi e Rettili, omologo secondo Larsell al genicolato mediale dei Mammiferi, situato al limite con il rombencefalo, ventralmente al cervelletto, sia molto ridotto rispetto a quello del *Bufo* e soprattutto della *Rana*.

In conclusione, da queste osservazioni risulta come le differenze strutturali del cervelletto nelle tre specie, *Bufo*, *Rana* e *Xenopus* siano in stretta relazione con il tipo di locomozione e di statica propri dell'animale.

E questo non solo per quel che riguarda il volume ma anche la forma, la grandezza e l'ordinamento delle cellule di Purkinje, grosse, rotondeggianti allineate in uno strato nella *Rana* e nel *Bufo*, più piccole, ovoidali e in più strati disordinati nello *Xenopus* adattato all'esclusiva vita acquatica.

Inoltre il cervetto dello *Xenopus*, nonostante siano presenti i centri della linea laterale anche nell'adulto e quindi vi sia un apporto delle loro fibre oltre che di quelle vestibolari, si presenta ridotto rispetto a quello del *Bufo* e della *Rana* che da adulti non la presentano, per cui ne risulta che il cervelletto degli Anfibi è di tipo esclusivamente vestibolare.

Quale premessa di ulteriori ricerche sull'argomento ho descritto una notevole riduzione del nucleo dell'istmo nello *Xenopus*, rispetto agli altri anuri considerati, in rapporto alla riduzione dell'organo acustico conseguente alla vita subacquea.

Biologia. — *Osservazioni sulla vita latente.* — IV. *Studio della fosfatasi alcalina di «Artemia salina»* L. (*). Nota (**) di ENRICO URBANI e LEA URBANI-MISTRUZZI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

In precedenti lavori è stata dimostrata l'esistenza, nei germi incistati di *Artemia salina* L. di alcuni enzimi idrolitici. Si è visto che durante la vita latente restano conservati dipeptidasi (Urbani, Rognone e Russo 1952) ⁽¹⁾, proteinasi (Urbani e De Cesaris-Coromaldi 1953) ⁽²⁾, amilasi e maltasi (Urbani, Russo e Rognone 1953) ⁽³⁾. Sono state studiate con varie tecniche alcune caratteristiche di azione di queste idrolasi allo scopo di apportare un contributo alla conoscenza dei problemi inerenti allo stato di anabiosi nel quale cadono, per cause particolari, alcuni organismi.

I risultati ottenuti hanno mostrato che gli enzimi, che in linea generale sono molto labili una volta estratti dal protoplasma in quanto possono venire facilmente inattivati, nella anabiosi restano legati alla sostanza vivente disidratata dei germi incistati in modo tale da poter resistere, anche per parecchi anni, alle avverse condizioni ambientali.

Continuando sullo stesso tema di lavoro abbiamo esteso l'indagine alle fosfatasi dei germi incistati di *Artemia salina* e in questa Nota vengono esposti i risultati relativi alla fosfatasi alcalina.

Si devono a Suzuki, Yoshima e Takahishi (1907) e a von Euler e Funke (1912) le prime osservazioni subito confermate da altri autori, che gli estratti di tessuti animali e vegetali contengono enzimi capaci di liberare da diversi substrati acido ortofosforico: questi enzimi sono chiamati genericamente fosfatasi. A seconda del substrato che sono capaci di idrolizzare vengono oggi distinte le fosfomonoesterasi, le fosfodiesterasi, le pirofosfatasi, le fosfoamidasi; i triesteri dell'acido ortofosforico che sono facilmente idrolizzati dagli acidi, dalle basi o semplicemente dall'acqua bollente non sono invece attaccati enzimaticamente.

Nei riguardi delle fosfomonoesterasi si è riconosciuta l'esistenza di quattro enzimi isodinamici ossia che agiscono sullo stesso substrato ma in condizioni ambientali diverse e sono stati chiamati fosfatasi A_1, A_2, A_3, A_4 (Folley e Kay) o anche fosfomonoesterasi I, II, III, IV (Roche e Coll.) ⁽⁴⁾: il fattore che le differenzia nella maniera più precisa è il pH al quale agiscono. La fosfatasi A_1 , capace di idrolizzare i monoesteri dell'acido ortofosforico a pH 8,8-9,6 è chiamata generalmente «fosfatasi alcalina» ed è di questo enzima che ci occupiamo nel presente lavoro. Le altre tre fosfatasi agiscono sugli stessi substrati ma a pH acidi e vengono perciò definite «fosfatasi acide».

Le fosfatasi hanno una larga distribuzione negli organismi e sono presenti sia nel nucleo che nel citoplasma delle cellule. Lo studio istochimico delle fosfatasi ha avuto un grande

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1953.

(1) E. URBANI, L. ROGNONE e S. RUSSO, «Rend. Acc. Naz. Lincei», XIII, 300 (1952).

(2) E. URBANI e L. DE CESARIS-COROMALDI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», XIV, 144 (1953).

(3) E. URBANI, S. RUSSO e L. ROGNONE, «Rend. Acc. Naz. Lincei», XIV, 697 (1953).

(4) J. ROCHE e NGUYEN-VAN THOAI, «Adv. in Enzymology», vol. 10, p. 83 (1950).

impulso in questi ultimi anni dall'impiego della tecnica di Gomori. Questo metodo che offre il fianco a serie critiche (Palade 1951) ⁽⁵⁾ per la sua non rigorosa specificità ha avuto tuttavia il grande merito di portare sul piano citologico e morfologico lo studio di questi enzimi. Circa la funzione che le fosfatasi svolgono negli organismi molti fatti fanno pensare a relazioni con i meccanismi di sintesi proteiche (Roche 1952) ⁽⁶⁾ che avvengono nelle cellule e possono esservi rapporti tra fosfatasi ed acidi nucleici, come indicano le osservazioni di Brachet (1946) ⁽⁷⁾ di Montalenti e Allievi (1948) ⁽⁸⁾, Battaglia (1949) ⁽⁹⁾. Jeener (1948) ⁽¹⁰⁾ ha visto che una parte di questi enzimi è localizzata nei microsomi che secondo le vedute correnti sarebbero le strutture cellulari a livello delle quali avvengono prevalentemente i fenomeni di sintesi ⁽¹¹⁾.

Malgrado l'impressionante quantità di lavori di carattere biochimico ed istochimico condotti sulle fosfatasi alcalina e acide, se sono state precisate e definite molte caratteristiche di questi enzimi nella loro azione *in vitro*, non appare chiaro quale sia il loro compito nella cellula vivente. La ubiquità della loro distribuzione lascia ritenere che intervengano nei processi metabolici con attributi di carattere generale.

Così è stato possibile dimostrare il loro intervento nel metabolismo del tessuto osseo ed in generale il loro aumento nel corso della differenziazione cellulare e dello sviluppo e accrescimento embrionali (Moog 1944) ⁽¹²⁾; Krugelis 1947 ⁽¹³⁾, 1950 ⁽¹⁴⁾; Raunich 1952) ⁽¹⁵⁾ e nei fenomeni di rigenerazione (Ghiretti 1950) ⁽¹⁶⁾.

Il materiale da noi impiegato è lo stesso dei precedenti lavori, vale a dire germi incistati di *Artemia salina* L. provenienti dalla California e in vita latente da circa due anni.

Per rivelare l'attività fosfatasica abbiamo usato metodi colorimetrici di dosaggio del P inorganico liberato dal substrato dalla azione enzimatica.

È stato usato anche un metodo di dosaggio del fenolo liberato dalla idrolisi enzimatica del fenil-fosfato.

Abbiamo trascurato, per le incertezze che li accompagnano e alle quali abbiamo accennato, i metodi istochimici ed abbiamo preferito fare uso, per quanto più complessi, dei metodi tipicamente enzimologici usati per lo studio

(5) G. E. PALADE, « J. Exp. Med. » 94, 6 (1951) e « Arch. Biochem. », 30, 1 (1951).

(6) J. ROCHE' in *The Enzymes* Edites by J. B. Summer and K. Myrbäch, vol. I, Parte I, p. 473, Acad. Press. Inc. 1952.

(7) J. BRACHET, « Experientia », 2, 1 (1946).

(8) G. MONTALENTI e M. DE NICOLA, « Experientia », 4, 315 (1948); G. VITAGLIANO e M. DE NICOLA, « Nature », 162, 965 (1948).

(9) B. BATTAGLIA, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », XXII, 79 (1949).

(10) R. JEENER, « Bioch. et Biophys. Acta », 2, 439 (1948).

(11) J. BRACHET. *Le rôle des acides nucléiques dans la vie de la cellule et de l'embryon*. Ed. Masson e Desoer 1952.

(12) F. MOOG, « Biol. Bull. », 86, 51 (1944).

(13) E. KRUGELIS, « Biol. Bull. », 93, 215 (1947).

(14) E. KRUGELIS, « C. R. Lab. Carlsberg, Sér. Chim. », 27, 273 (1950).

(15) L. RAUNICH, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XIII, 276 (1952).

(16) F. GHIRETTI, « Experientia », 6, 98 (1950).

di questi fermenti: la tecnica del *Carlsberg laboratorium* già usata dalla Kru-
gelis è stata seguita nelle linee generali per il nostro studio ⁽¹⁴⁾.

In pratica è stato operato nel modo seguente.

I germi incistati sono stati omogenati in acqua bidistillata leggermente
alcalinizzata con NH_4OH N/20, circa pH 8 (Roche) ⁽¹⁷⁾, l'omogenato è stato

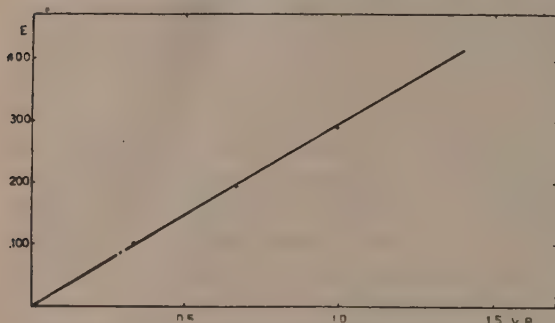


Fig. - 1. Curva di taratura: in ordinate Estinzione,
in ascisse γ P inorganico.

centrifugato per eliminare
i detriti ed il supernatante
è stato usato quale estratto
enzimatico. L'estratto enzi-
matico è stato tamponato
al pH voluto con veronal
sodico secondo Michaelis ⁽¹⁸⁾
oppure con NH_4OH (0,1 M)
 NH_4Cl (0,1 M) unendo parti
eguali di estratto e di tam-
pone. Una eguale quantità
di beta-glicerofosfato di
sodio all'1 % (Eimer and

Amend Co. New-York) è stata unita all'estratto enzimatico-tampone. Quale
attivatore abbiamo adoperato MgSO_4 alla concentrazione di 2,5 mgr./ml.

Il dosaggio del Pinorganico liberato dalla idrolisi enzimatica è stato eseguito
in un primo tempo con il metodo di Lowry e Lopez ma poiché i risultati otte-
nuti non erano completa-
mente soddisfacenti abbia-
mo adottato la classica tec-
nica di Fiske e Subbarow
ridotta a micro metodo (Sal-
vidio) ⁽¹⁹⁾ nel modo seguente.

31 μl . della miscela
estratto enzimatico-tam-
pone-substrato dopo aver
reagito per un certo tempo,
sono stati uniti con 31-
62 μl . di acido tricloro roa-
cetico al 10 %, preparato
di fresco. Il precipitato è
stato eliminato per centri-
fugazione (3.000 giri per
5 minuti) e in un microtubo
sono stati posti nell'ordine:

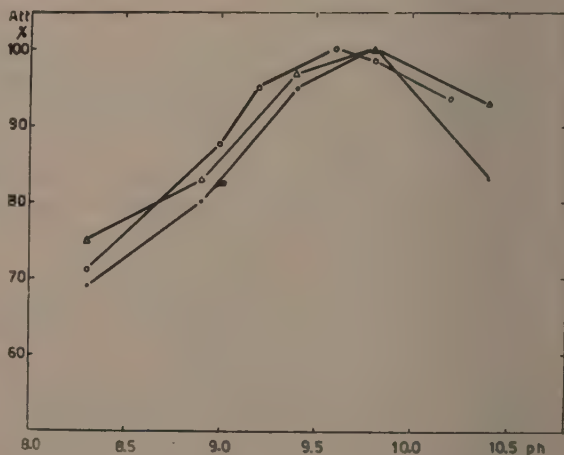


Fig. 2. - Attività enzimatica in funzione del pH in ascisse
valori di pH, in ordinate il per cento di attività. I punti, i
cerchi ed i triangoli rappresentano tre esperienze diverse.

(17) In tutte le esperienze dove si parla di omogenati eseguiti con acqua bidistillata
si intende che l'acqua stessa era stata alcalinizzata.

(18) L. MICHAELIS, « J. Biol. Chem. », 87, 33 (1930).

(19) E. SALVIDIO, Comunicazione personale.

- a) 31 μ l. acqua bidistillata;
- b) 31 μ l. supernatante;
- c) 7 μ l. acido aminonaftolsulfonico (1,5 gr/10 ml.);
- d) 7 μ l. molibdato di ammonio. (2,5 %).

I reagenti *c* e *d* sono della Hartman-Leddon Co. Philadelphia ed i risultati ottenuti sono stati, data la grande delicatezza delle determinazioni del P inorganico, veramente soddisfacenti. Il colore bleu è stato colorimetrato cinque minuti dopo l'aggiunta del reattivo *d* nel microcolorimetro a cellula fotoelettrica già illustrato (Urbani 1952)⁽²⁰⁾, filtro PC 5 dello spettrofotometro Coleman.

Al fine di controllare la esattezza del metodo abbiamo costruito una curva di taratura usando fosfato di sodio secondario Merck alla concentrazione indicata in ascisse della fig. 1 in un volume di 76,00 μ l.

Come il grafico stesso illustra chiaramente il colore sviluppato presenta (cuvetta di 1,9 mm. spessore) relazione lineare fino alla concentrazione di circa 1,5 gamma P inorganico.

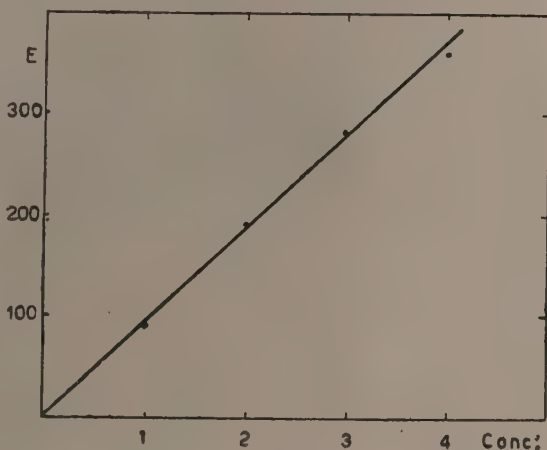


Fig. 3. - Attività in funzione della concentrazione enzimatica, in ascisse le concentrazioni enzimatiche, in ordinate l'Estinzione.

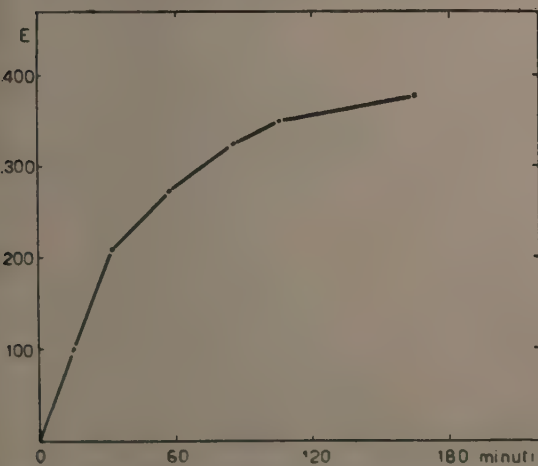


Fig. 4. - Attività in funzione del tempo di incubazione in ascisse minuti di incubazione a 38°C in ordinate l'Estinzione.

Attività enzimatica in funzione del pH. - 200 mgr.

di Artemie incistate sono state omogenate in mortaio di vetro con 3 ml. di acqua bidistillata. Una parte dell'omogenato è stato mescolato con una parte di tampone ai vari pH e con una parte di substrato ed incubato per un'ora a 38°C. Nella fig. 2 sono illustrati i risultati ottenuti. Si vede come l'optimum di pH sia risultato in una esperienza a 9,6 e in due esperienze

(20) E. URBANI, « La Ricerca Scientifica », 22, 2174 (1952).

a 9,8. D'altra parte sia a pH 8,3 che a pH 10,4 (estremi della scala da noi considerata) l'attività è sempre forte e si aggira rispettivamente intorno al 70 % (pH 8,3 e 90 % (pH 10,4) della attività massima ottenuta. Il fatto che la fosfatasi da noi studiata idrolizzi il beta-glicerofosfato di sodio entro limiti di alcalinità abbastanza ampi è noto nella letteratura sulle fosfatasi (Roche) ⁽⁴⁾ ed è possibile trovare su determinati materiali un optimum anche a 9,95 (Salvidio in eritroblasti e granuloblasti di mammiferi) ⁽²¹⁾. Determinato l'optimum di attività in funzione del pH, le nostre successive determinazioni sono state eseguite a pH 9,8.

Attività in funzione della concentrazione dell'enzima. - 200 mgr. di Artemie incistate sono stati omogenati con 3 ml. di acqua bidistillata. L'omogenato ottenuto è stato assunto come concentrazione

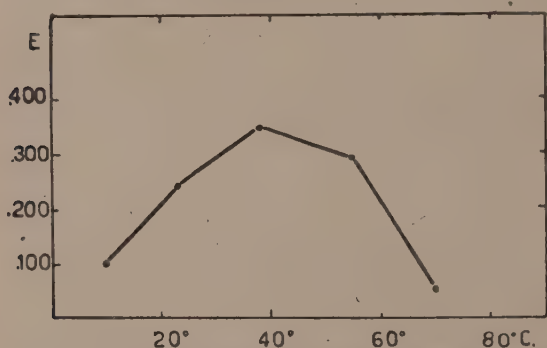


Fig. 5. - Attività enzimatica in funzione della temperatura di incubazione. In ascisse la temperatura in gradi centigradi, in ordinate l'Estinzione.

4 e con acqua bidistillata si sono ottenute le concentrazioni gradatamente decrescenti 3, 2, 1. I bianchi sono stati eseguiti al tempo zero o con estratto inattivato con la ebollizione in fiala saldata per 20 minuti. Incubazione a pH 9,8 per 45 minuti a 38°C. I risultati ottenuti sono riportati nella fig. 3 che mostra come la liberazione di P inorga-

nico da parte del glicerofosfato di Na sia proporzionale alla concentrazione dell'enzima nell'estratto.

Attività in funzione del tempo di incubazione. 200 mgr. di Artemie incistate sono state omogenate in 4 ml. di acqua bidistillata, l'omogenato è stato unito con parti eguali di tampone a pH 9,8 e di substrato e posto ad incubare a 38°C. Eseguiti i prelievi a vari tempi di incubazione. Bianchi al tempo zero. I risultati ottenuti sono illustrati nella fig. 4 che mostra il classico andamento della reazione enzimatica in funzione del tempo di incubazione.

Attività in funzione della temperatura di incubazione. - 200 mgr. di Artemie incistate sono state omogenate in 4 ml. di acqua bidistillata. L'omogenato è stato unito con parti eguali di tampone a pH 9,8 e di substrato ed incubato a varie temperature per 45 minuti. I risultati ottenuti sono illustrati nella fig. 5 che mostra come l'optimum di idrolisi enzimatica per unità di tempo si abbia a 38°C.

Come abbiamo precedentemente accennato è stata saggiata l'attività enzimatica adoperando anche un altro substrato, ossia il fenilfosfato (Dina-

triumphenylphosphat-Merck) e dosando il fenolo liberato con il reagente di Folin Ciocalteu ⁽²²⁾ (tecnica identica a quella adottata da Urbani e De Cesaris Coromaldi nello studio delle proteinasi). Gli esperimenti eseguiti hanno mostrato che il fenilfosfato viene idrolizzato dall'enzima ma in misura minore del glicerofosfato. Dosaggi fatti su germi dopo 24 ore di idratazione ossia quando già è visibile la schiusura dei naupli hanno mostrato che l'attività fosfatasi è molto aumentata rispetto ai germi incistati. Questo risultato mostra che con lo sviluppo dell'embrione si ha un aumento di enzima e conferma i risultati già citati di altri autori che hanno visto che con il progredire della embriogenesi del pollo e degli Anfibì si ha un fortissimo aumento del tenore in fosfatasi alcalina.

In conclusione i risultati ottenuti mostrano che i germi incistati di *Artemia salina* mantengono conservata durante l'anabiosi una fosfatasi alcalina (fosfatasi A₁ o fosfomonoesterasi I) della quale sono state studiate alcune caratteristiche di azione. L'enzima idrolizza il betaglicerofosfato di sodio e in misura quantitativamente minore il fenilfosfato di sodio, è inattivato dalla ebollizione; al pari degli altri enzimi studiati su questo materiale deve essere legato alla sostanza vivente in modo del tutto particolare per potere resistere alle condizioni ambientali sfavorevoli che i germi incistati incontrano durante l'anabiosi.

Che l'enzima resti conservato nei germi incistati è dimostrato dal fatto che l'estratto ottenuto dai germi incistati disintegrati meccanicamente è capace, in presenza di acqua, di idrolizzare immediatamente il substrato, come è illustrato nel grafico della attività enzimatica in rapporto al tempo di incubazione. Bisogna tener presente che l'inizio dei dosaggi della attività enzimatica è fatto circa 15 minuti dopo la disintegrazione dei germi, ossia il tempo necessario per preparare l'omogenato, centrifugarlo, unirlo con il tampone e il substrato. D'altra parte non si può pensare che l'enzima si sintetizzi «ex novo» nell'estratto dove non esiste più nessuna organizzazione cellulare. Evidentemente le fosfatasi, come le altre idrolasi studiate, rimangono nei germi incistati in forma inattiva caratterizzando anche enzimologicamente lo stato di «vita minima» e si attivano non appena le sostanze protoplasmatiche si imbibiscono di acqua.

(22) F. BINKLEY, R. E. SHANK e C. HOAGLAND, « J. Biol. Chem. », 156, 253 (1944).

Biologia. — *Ricerche sperimentali sull'ossiforo di Spirito (catalasi).* — *L'ossiforo di Spirito nel sangue di coniglio in relazione al trattamento con tiroxina* ^(*). Nota ^(**) di CARLO BONDI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Varî lavori sono stati eseguiti negli ultimi anni nel nostro Istituto allo scopo di dimostrare la veridicità della teoria di Spirito ⁽¹⁾ il quale ha voluto indicare la catalasi non più come un fermento, ma come il veicolo dell'ossigeno nell'intimo delle strutture cellulari. Non starò ora a ripetere tutti i risultati ottenuti per i quali rimanendo ai lavori predetti ⁽²⁾, ma un accenno particolare merita qui una mia Nota precedente ⁽³⁾ trattante l'azione degli estratti tiroidei sull'ossiforo di Spirito nelle larve di *Bufo viridis*.

In essa — riprendendo un lavoro di A. Puma ⁽⁴⁾ eseguito nel nostro Istituto e che dimostrava come l'ossiforo si rivelasse in minor quantità nelle larve trattate con tiroxina — confermai i dati di questo A. e l'interpretazione da lui prospettata, in quanto tale minor rilevamento era da ritenersi puramente fittizio ed in funzione dell'aumentato bisogno di ossigeno da parte delle larve stesse.

Di tale interpretazione io potei dare una verifica sperimentale dimostrando infatti che tale minor rilevamento di ossiforo (a seguito del trattamento con tiroxina) si poteva mettere in evidenza soltanto usando acqua ossigenata a pH acido (la stessa usata dal Puma) mentre, nello stesso materiale e nelle stesse condizioni sperimentali, si aveva una eguale o lievemente maggiore quantità della stessa sostanza con l'uso di acqua ossigenata a pH 7, ciò che stava a dimostrare come la predetta diminuzione a pH 2,2 fosse soltanto apparente.

I dati miei e del Puma furono da me inquadrati con i risultati discordanti della letteratura, inquantoché Burge e collaboratori ⁽⁵⁾ nel 1917 e Timofejewa ⁽⁶⁾ nel 1927 avevano notato un aumento dell'attività catalasica nel sangue dei mammiferi dopo somministrazione dell'ormone tiroideo.

Il contrasto tra questi risultati merita di essere precisato inquantoché (a prescindere dall'impiego di acqua ossigenata a diversi pH portanti a valori che variano profondamente per le ragioni da me precisate in precedenti

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia Generale dell'Università di Perugia.

(**) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1953.

(1) A. SPIRITO, «Medicina e Biologia», 1 (1942); XXIX Riunione S.I.P.S. (1942);

(2) A. FRIGGERI, «Riv. di Biol.», 26, 12 (1938); «Arch. Sc. Biol.», 26, 6 (1940); M. CASTIGLI PITOTTI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», XXIV 1948; C. BONDI, «Riv. Biol.», 42 (1950); «Bol. Soc. It. Biol. Sper.», 26 (1950); «Riv. Biol.», 43 (1951); «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 28 (1952); «Riv. Biol.», 44, 317 (1952); «Riv. Biol.», 44, 451 (1952).

(3) C. BONDI, «Riv. Biol.», 44, 461 (1952).

(4) A. PUMA, XXIX Riunione S.I.P.S. (1942).

(5) W. E. BURGE, J. KENNEDY, A. J. NEILL, «Amer. Jour. Phys.», 43, 433 (1917).

(6) A. TIMOFEJEW, «Biochem. Z.», 180, 35 (1927).

lavori ⁽⁷⁾ se, nelle esperienze del Puma e mie, l'ossiforo era stato determinato su larve intere di *Bufo viridis* tenute a digiuno, gli Autori precedenti l'avevano studiato nel sangue di coniglio o di gatto e cioè in un tessuto nel quale poteva teoricamente prevedersi un aumento della sostanza in esame in quanto proveniente dai depositi di essa sempre pronti a fornirla per i maggiori bisogni inerenti a quei trattamenti che alterano il normale metabolismo respiratorio.

Per queste ragioni ho creduto opportuno riprendere l'argomento studiando l'ossiforo di Spirito nel sangue di coniglio trattato con l'ormone tiroideo.

Le esperienze sono state eseguite su conigli di sesso femminile del peso medio di kg. 2,800. Per ogni esemplare è stato determinato più volte, in giorni successivi, la quantità rilevabile di ossiforo con l'impiego di H_2O_2 a pH 7 e a pH 2,2 in modo da stabilire un punto di partenza per la comparazione con quanto si sarebbe rilevato dopo trattamento con ormone tiroideo. Il sangue è stato prelevato dalla vena marginale dell'orecchio ed ogni determinazione è stata costantemente fatta su cc 0,01 di sangue intero seguendo le solite modalità tecniche descritte nei miei precedenti lavori.

Ogni esemplare ha ricevuto quindi giornalmente una iniezione di mg 1 di tiroxina Roche e per ognuno è stato esaminato il numero dei globuli rossi ed il contenuto in emoglobina del sangue e ne è stato controllato il peso.

Per il numero dei globuli rossi e per il contenuto in emoglobina le variazioni sono state di lieve entità e non univoche nel loro comportamento. Per quanto riguarda il peso si è notata in tutti i casi una diminuzione progressiva.

In questa Nota preventiva riporto i dati riferentisi al contenuto in ossiforo rilevabile a pH 7 ed a pH 2,2 nei primi 10 giorni di esperimento; successivamente la ricerca sarà estesa per un tempo più lungo comprendente pure un congruo periodo oltre il termine del trattamento con tiroxina. Nella tabella sono riportati i valori ottenuti in tre esperienze diverse.

I risultati predetti nella loro schematicità presentano alcuni dati interessanti che desidero sottolineare.

Innanzitutto mi sembra realmente rilevante il fatto, che si ripete ancora una volta, del diverso contenuto in ossiforo, rispetto al controllo di partenza, rilevabile a pH 7 ed a pH 2,2. Con pH 7, infatti, si nota un aumento più o meno notevole del contenuto di questa sostanza nel sangue

(7) Ho già riferito più volte quanto si sa dalla letteratura sulla minor attività catalasica via via che il pH dell' H_2O_2 si allontana dalla neutralità: SUMNER e SOMERS (*Chemistry and Methods of Enzymes*, «Academic Press. inc.», New York, 1953) parlano di inattività a pH 3, ma altri Autori compreso il FRIGGERI (loc. cit.), il PUMA (loc. cit.), la MISTRUZZI («Riv. di Biol.», 36, 1, 1943), il CAVAZZINI («Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. VI, 250, 1949), la CASTIGLI PITOTTI (loc. cit.), BODAUSKI («Journ. of Biol. Chem.», 40-41, 127, 1919), io stesso ecc. rilevano tale attività anche a pH inferiori. Comunque è importante ripetere che tale fenomeno non sposta il significato comparativo delle mie ricerche.

circolante: lo stesso sangue saggiato con acqua ossigenata a pH 2,2 ci dice invece che il contenuto in ossiforo appare diminuito rispetto al controllo eseguito prima del trattamento tiroideo.

TABELLA I.

N. coniglio	Normale			Dopo trattamento per 10 giorni con tiroxina; mg 1 <i>pro die</i>				
	cc O ₂ svolto per cc di sangue		Peso kg	cc O ₂ svolto per cc di sangue				Peso kg.
	H ₂ O ₂ a pH = 7	H ₂ O ₂ a pH = 2,2		H ₂ O ₂ a pH = 7	Diff. %	H ₂ O ₂ a pH = 2,2	Diff. %	
1	6420	1420	2,850	8.860	+ 38	1320	- 7,1	2,400
2	8760	2190	2,400	10.240	+ 17	1780	- 18,8	1,900
3	9100	2000	2,500	11.600	+ 27,4	1650	- 17,5	2,150

Questi risultati spiegano pertanto quelli di Burge e di Timofejewa: realmente sotto l'azione dell'ormone tiroideo il sangue si arricchisce di ossiforo che evidentemente proviene dai depositi esistenti nell'organismo, per sopperire ai maggiori bisogni derivati dall'alterato metabolismo respiratorio.

Ma le mie esperienze dicono anche ben altro e cioè che - pur essendo l'ossiforo in maggior quantità rispetto al periodo antecedente al trattamento tiroideo (ciò che è detto dall'indagine e con H₂O₂ a pH 7) - a pH 2,2 tale contenuto ci appare inferiore, ciò che convalida ancora una volta la teoria di Spirito sul valore che tale sostanza ha nei fenomeni respiratori.

È logico infatti pensare che - pur trovandoci di fronte ad una maggiore quantità di ossiforo - tale aumento non sia sufficiente per sopperire ai bisogni di un metabolismo respiratorio fortemente aumentato: pertanto una maggiore aliquota di ossiforo si troverà allo stato ridotto e non sarà quindi percepibile con l'impiego di acqua ossigenata a pH 2,2 che impedisce (così come non avviene a pH 7) qualsiasi variazione delle aliquote ossidata e ridotta dell'ossiforo esistenti nel momento della determinazione quantitativa.

È ovvio che io aggiunga quali possano essere gli sviluppi delle presenti ricerche anche nel campo dei fenomeni dell'ipertiroidismo umano e quali possano essere gli sviluppi della teoria di Spirito che finora aveva considerato l'ossiforo come il vettore di ossigeno soltanto nell'intimo delle strutture cellulari.

Bisognerà vedere infatti quanto esso giuochi nel sangue come trasportatore diretto ed indiretto dell'ossigeno dell'ambiente fino ai tessuti e sarà

particolarmente importante tale studio in quei processi patologici nei quali si è notata la mancanza di catalasi nel sangue⁽⁸⁾ senza che di questa mancanza si sia capito il significato che soltanto poteva essere valutato alla luce della teoria di Spirito.

In conclusione: iniettando tiroxina Roche in conigli adulti si ottiene nel sangue di essi un aumento progressivo della quantità di ossiforo di Spirito rilevabile a mezzo dell'ossigeno svolto da acqua ossigenata a $\text{pH} = 7$. Tale aumento effettivo non è percepibile con l'uso di acqua ossigenata a $\text{pH} = 2,2$ la quale invece permette di conoscere — attraverso una minor quantità rilevabile dell'ossiforo — che il trattamento con tiroxina porta ad uno spostamento dell'equilibrio tra fase ossidata e fase ridotta di essa con aumento della fase ridotta in relazione all'aumentato metabolismo respiratorio dell'animale.

Fisiologia vegetale. — *Azione di alcune antiauxine sulla sintesi d'amido dal Glucosio-I-fosfato in stomi isolati di Iris*^(*). Nota^(**) di PAOLA PROFUMO, presentata dal Corrisp. E. REMOTTI.

Avevamo dimostrato precedentemente⁽¹⁾, adoperando quale test stomi isolati di Iris, come l'acido indolacetico stimoli la sintesi d'amido dal Glucosio-I-fosfato. In seguito ci è parso interessante, nel quadro di un complesso di ricerche che attualmente si stanno svolgendo in questo laboratorio, riprendere le osservazioni, indagando se ed in che senso potessero agire, sullo stesso processo, le antiauxine tipiche^(2, 3, 4). Abbiamo a tale scopo scelto l'acido transcinnamico e la cumarina, poiché, tra le sostanze antagoniste dell'indolacetico, queste sono presenti con larga diffusione nelle piante.

A definire l'azione delle antiauxine, abbiamo allora studiato comparativamente il comportamento degli stomi in presenza delle sostanze in esame nonché di acido indolacetico, disponendo al tempo stesso adeguati controlli. Inoltre, in rapporto al problema dell'antagonismo che si manifesta sull'effetto di crescita tra i due ordini di ormoni, abbiamo disposto ancora un terzo saggio, in cui acido indolacetico ed antiauxina erano associati insieme nella soluzione.

(8) M. D. SHIGEO TAKAHARA, *The Lancet*, Dic. 1952, 1101.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico Hanbury dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1953.

(1) MARRÈ e PROFUMO, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. 11, p. 230 (1951).

(2) PAUL LARSEN, *Formation, occurrence, and inactivation of growth substances*. « Annual Review of Plant Physiology », vol. 2, p. 170 (1951).

(3) J. VAN OVERBEEK, RENÉ BLONDEAU and VESTA HORNE, *Trans-cinnamic acid as an antiauxin*. « American Journal of Botany », vol. 38, p. 389 (1951).

(4) KENNETH V. THIMANN and WALTER D. BONNER, Jr., *Organic Acid Metabolism*. « Annual Review of Plant Physiology », vol. 1, p. 76 (1951).

Gli stessi gruppi di esperienze sono stati ripetuti in parallelo per l'acido transcinnamico e per la cumarina.

MATERIALI E METODO. - Ci siamo serviti ancora di foglie di *Iris florentina*: la pianta da utilizzare veniva oscurata circa 20 ore prima del prelievo per eliminare le risonanze della precedente illuminazione, dato che la luce interviene con un effetto inibente sulla sintesi d'amido controllata dall'auxina ⁽⁵⁾. D'altra parte, ad evitare l'influenza di fattori intrinseci, tutti i lembi di epidermide venivano staccati da una sola foglia, in territori quanto più possibile vicini.

TABELLA I.

Trattamento	Percentuali di stomi carichi d'amido dopo 80'
Controlli	52 %
I.A.A. 2×10^{-4} M	75 %
Cumarina $3,3 \times 10^{-3}$ M	4 %
I.A.A. e cumarina	11,8 %

TABELLA II.

Trattamento	Percentuali di stomi carichi d'amido dopo		
	30'	90'	270'
Controlli	0,9	31,9	50,9
I.A.A. 2×10^{-4} M	47,9	50	68,3
Transc. $1,7 \times 10^{-4}$ M	0	0,9	10,7
I.A.A. e Transc.	0	17,7	41,1

Le esperienze erano condotte pretrattando al buio le strisce di tessuto, dopo lavaggio in H₂O distillata, con le soluzioni in esame, le quali erano tutte tamponate su Ph 6,5, e precisamente con: *a*) I.A.A. 2×10^{-4} M; *b*) cumarina $3,3 \times 10^{-3}$ M (ovvero acido transcinnamico $1,7 \times 10^{-4}$ M; *c*) I.A.A. e cumarina (o acido transcinnamico). I controlli erano mantenuti in soluzione

⁽⁵⁾ MARRÈ e PROFUMO, - Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, vol. 12, p. 181 (1952).

tampone semplice. Dopo circa 90' si aggiungeva il Gl. I P., a concentrazione finale 0,33 %. Le capsule venivano successivamente tenute al buio a 18°. Ad intervalli di tempo, dopo l'aggiunta del Gl. I P., si procedeva allo esame del tessuto, trattando i lembi prelevati dalle soluzioni con liquido di Lugol, e procedendo al conteggio degli stomi che apparissero carichi d'amido in confronto di quelli che ne erano privi; ogni dato rappresenta la media di conte fatte su 7 strisce di epidermide.

Come risulta dalle tabelle, anche gli stessi controlli presentano differenze notevoli nei riguardi della velocità di sintesi, che sembra variare in dipendenza, almeno in parte, della diversa stagione in cui sono state condotte le osservazioni.

Dalle osservazioni compiute risulta che *in presenza di acido transcinnamico, come di cumarina, la percentuale degli stomi carichi d'amido è notevolmente inferiore a quella dei controlli*, mentre con l'I.A.A. si ripete il forte incremento già rilevato nei lavori precedenti. Non solo, ma l'aggiunta di auxina alle soluzioni delle due antiauxine modifica la fisionomia del risultato, determinando un incremento del processo di carica che, nei limiti di tempo delle nostre osservazioni, sembra aumentare con la durata del soggiorno dei lembi epidermici nelle soluzioni.

Possiamo così riassumere i risultati ottenuti:

a) in presenza di acido transcinnamico, come di cumarina, si ha un'inibizione della sintesi d'amido in assenza di auxina,

b) l'auxina controbilancia solo parzialmente l'azione inibente delle due antiauxine.

CONCLUSIONI. — Dalle nostre esperienze emergono principalmente due dati:

1° l'acido transcinnamico e la cumarina, che nei processi di crescita appaiono come sostanze ad azione antagonista a quella dell'auxina, manifestano tale attività anche nei riguardi della sintesi d'amido dal Glucosio-I-fosfato, in quanto, favorita dagli ormoni di tipo auxinico, essa è inibita dalle sostanze antagoniste;

2° riappare, nelle osservazioni descritte, l'antitesi di azione tra i due gruppi di sostanze quando agiscano simultaneamente sul tessuto, antitesi che fino ad ora era stata registrata a proposito della crescita ^(6 e 7).

Naturalmente non è possibile, attraverso questi semplici risultati, affrontare il problema del meccanismo d'azione dei due ordini di sostanze. Per quanto concerne l'auxina, l'inibizione esplicita dal cianuro ⁽⁸⁾ sul suo effetto sintetizzante ci aveva suggerito la possibilità che l'ormone agisse per il tra-

(6) CARLOS O. MILLER and BERNARD S. MEYER. *Expansion of Chenopodium album leaf disks as affected by coumarin*. « Plant Physiology », vol. 26, n. 3 (1951).

(7) H. RICHARD GOODWIN and CAROLYN TAVES. *The effect of coumarin derivatives on the growth of Avena roots*. « American Journal of Botany », vol. 37, p. 224 (1950).

(8) MARRÈ e PROFUMO, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. 12, p. 122 (1952).

mite della fase aerobia della respirazione. L'aumento dell'amido potrebbe allora derivare da una diretta azione sulla sintesi; oppure, indirettamente, da un maggiore assorbimento del Glucosio-I-fosfato per effetto dell'intensificata attività respiratoria; o infine seguire l'una e l'altra delle due vie, come sembra emergere da ricerche attualmente in corso.

Il problema di questa alternativa si ripresenta per gli antagonisti, dei quali almeno l'acido transcinnamico, secondo alcuni dati preliminari che ci riserviamo di sviluppare ulteriormente, sembrerebbe poter agire attraverso un minore assorbimento di zuccheri, forse per una depressione respiratoria.

D'altro lato, questa sensibilità del contenuto in amido delle cellule stomatiche ai principi ormonici auxinici ed antiauxinici, ci ripresenta il complesso problema del movimento degli stomi. Anche se, allo stato attuale delle ricerche, l'equilibrio glucosio-amido non sembra doversi considerare come il fattore essenziale del funzionamento stomatico, riferibile piuttosto al mutevole gioco d'imbibizione dei colloidi vacuolari, tuttavia esso non ha perduto la sua importanza almeno come fattore collaterale, attraverso le variazioni del valore osmotico. Sotto questo punto di vista, auxine ed anti-auxine potrebbero allora intervenire nel funzionamento delle cellule stomatiche.

Patologia. — *Sulle proprietà ottiche delle fibre reticolari*^(*).

Nota^(**) di ENNIO LUCIO BENEDETTI, presentata dal Socio G. VERNONI.

Lo studio delle proprietà ottiche delle fibre collagene, condotto da numerosi autori ha dimostrato che tali strutture, osservate al microscopio polarizzatore, sono dotate di birifrangenza positiva.

L'analisi più fine di tale proprietà ha permesso di stabilire che essa è complessa e deriva dalla sommatoria di una birifrangenza di forma del tipo bastoncellare, secondo Wiener, la quale è correlata a strutture micellari, e di una birifrangenza propria o cristallina, derivante dall'intimo orientamento spaziale delle molecole che costituiscono gli aggregati micellari.

Le proprietà ottiche delle fibre appartenenti ai diversi tipi di tessuto connettivo collagene (tendini, tessuto lasso, fasce, ecc.) sono identiche. Anche il tessuto osseo decalcificato dimostra le stesse proprietà ottiche degli altri tipi di tessuto collagene (A. Ascenzi^(*)).

Se le fibre collagene vengono trattate con particolari sostanze il segno della birifrangenza propria da positivo che era diviene negativo. Tale effetto è stato descritto da v. Ebner⁽²⁾ per il fenolo e successivamente dallo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1953.

(1) A. ASCENZI, « Scienze », **112**, 84 (1950).

(2) v. V. EBNER, citato da W. J. SCHMIDT (1894).

Schmidt⁽³⁾ e da altri autori per numerose altre sostanze quali il tannino, il trinitrofenolo, l'eugenolo, l'aldeide cinnamica ecc.

Lo Jaeger⁽⁴⁾ avrebbe ulteriormente dimostrato che in conseguenza della fissazione in formalina, le fibre collagene mantengono la birifrangenza di forma positiva mentre quella propria diviene negativa.

Lo studio delle proprietà ottiche delle fibre appartenenti al tessuto connettivo reticolare ha dato luogo a risultati contrastanti. Mentre Massari e Marsico⁽⁵⁾ e lo stesso Jaeger⁽⁴⁾ affermano che le fibre reticolari sono dotate delle stesse proprietà ottiche di quelle collagene, l'autorevole patologo inglese Robb-Smith⁽⁶⁾ sostiene che le fibre reticolari *non* sono birifrangenti, precisando che tale carattere negativo si aggiunge agli altri di ordine morfologico e di affinità tintoriale sui quali si basa la distinzione tra questo tipo di fibre e quelle appartenenti al tessuto collagene.

In vista di queste sostanziali divergenze di opinioni e per completare una serie di ricerche condotte sul tessuto reticolare con il microscopio a contrasto di fase⁽⁷⁾ e con quello elettronico⁽⁸⁾, ho studiato le proprietà ottiche delle fibre reticolari. Poiché lo Jaeger⁽⁴⁾, nel corso della sua già citata ricerca, afferma che è molto problematico valutare con esattezza la birifrangenza delle fibre reticolari perché molto debole e perché le abbondanti cellule reticolari e linfoidi tendono ad occultare le fibre stesse, ho tentato di ovviare a tali inconvenienti ricorrendo ad accorgimenti tecnici appropriati e soprattutto realizzando condizioni di osservazione analoghe a quelle suggerite da Swann e Mitchison⁽⁹⁾ per mettere in evidenza birifrangenze molto piccole.

MATERIALE E TECNICA. — I preparati da osservare al microscopio polarizzatore sono stati allestiti sezionando al congelatore linfonodi cervicali non fissati prelevati da giovani cavie.

Le sezioni erano raccolte in acqua distillata dove venivano lasciate per circa un'ora al fine di eliminare le cellule per lisi osmotica. Successivamente le sezioni erano montate su vetrini porta-oggetto ed essiccate.

Quindi una serie di sezioni venivano immerse in liquidi a vario indice di rifrazione, senza alcun trattamento preliminare. Un'altra serie veniva sottoposta alla digestione triptica (tripsina 0,5 %, pH=7,9, a 37° C, per due ore) e successivamente veniva posta in liquidi a vario indice di rifra-

(3) W. J. SCHMIDT, « Naturwissenschaftl. Abtlg. », 23, 56 (1947).

(4) H. JAEGER, « Schweiz. med. Woch. », 74, 503 (1944).

(5) F. MASSARI G. MARSICO, « Boll. Soc. It. Biol. Sp. », 28, 1141 (1952).

(6) A. H. T. ROBB-SMITH, « Lancet », 2, 362 (1945); 3^a Conference on Connective Tissues J. Macy Foundation, p. 92 (1952).

(7) E. L. BENEDETTI, « Arch. Sc. Med. », 92, fasc. 6 (1951).

(8) E. L. BENEDETTI, « Rend. Istituto Superiore di Sanità », 16 (1953).

(9) M. M. SWANN e J. MITCHISON, *Birifrangence of cytoplasm and cell membranes* in J. A. BUTLER e J. T. RANDALL, *Progress in Biophysics and Biophysical Chemistry*; Pergamon Press Ltd. London (1951).

zione. Un'altra serie ancora era trattata per 24 ore a temperatura ambiente con formalina al 20 % e quindi posta nella serie dei liquidi. Il tempo di permanenza in questi veniva determinato, per tutte le sezioni, sulla base della stabilizzazione dei valori misurati, che per alcuni liquidi si raggiungeva in pochi minuti, mentre per altri, quali gli oli e le essenze, richiedeva di solito diversi giorni.

L'andamento delle curve di birifrangenza di forma è stato studiato sulla base dei ritardi misurati per ogni fibra con il compensatore variabile di Berek. I valori determinati per ogni singolo liquido sono stati computati come media aritmetica di circa 50 misurazioni. Mi sono limitato alla misura dei ritardi e non a quella della potenza birifrattiva non essendo possibile determinare con adeguata esattezza lo spessore delle fibre. Tuttavia, affinché i valori misurati fossero tra loro comparabili e quindi fosse giustificato costruire una curva di « birifrangenza » di forma, si sono eseguite misure con il seguente accorgimento. Si contrassegnava appositamente, sotto il controllo dell'osservazione in contrasto di fase un complesso di fibre delle quali si misurava il ritardo in un primo liquido. Le successive misurazioni venivano eseguite sempre sulle stesse fibre, a mano a mano che le sezioni venivano passate nei singoli liquidi ad indice di rifrazione differente. Questa operazione è stata realizzata unicamente per la serie delle miscele di acqua e di glicerina. Le altre misurazioni pertinenti ad altri liquidi sono state eseguite avendo cura di scegliere, di volta in volta, fibre di spessore pressoché identico.

RISULTATI. - I risultati delle misurazioni, nelle condizioni ora illustrate, sono indicati nelle tabelle I, II, III e IV.

Le fibre reticolari osservate con il microscopio polarizzatore senza l'ausilio della tecnica di Swann e Mitchison⁽¹⁰⁾ possono apparire come non birifrangenti essendo dotate di ritardo molto debole in relazione, verosimilmente, alla loro sottigliezza. Infatti, con una illuminazione corrispondente a quella di una comune lampada da microscopia, solo le fibre più spesse, pertinenti alle trabecole collagene, spiccano nettamente illuminate.

Al contrario con l'adeguato dispositivo di Swann e Mitchison le fibre reticolari osservate sia in acqua che in altri liquidi a vario indice di rifrazione risultano dotate - salvo qualche rara eccezione che verrò analizzando - di birifrangenza positiva, anche se molto sottili.

Il rilievo è riassunto in forma numerica nella tabella I dove si vede come le fibre reticolari siano dotate di birifrangenza positiva, sempreché non vengano immerse in piridina, alcool benzilico o metacresolo.

Volendo studiare in qual modo tali dati si allineano nel determinare una curva di birifrangenza di forma (cfr. fig. 1) si nota come solo i valori dei ritardi relativi all'acqua, alla glicerina ed alle rispettive miscele di questi liquidi, costituiscano una branca di parabola con vertice orientato

(10) M. ALOISI, A. ASCENZI e E. BONETTI, « J. Path. Bact. » 64, 321 (1952).

in basso. Per altri liquidi ad indice di rifrazione più elevato della glicerina i ritardi si discostano talora notevolmente dall'andamento prevedibile della curva e senza relazione alcuna con i rispettivi valori dell'indice di rifrazione. Per alcuni liquidi poi, quali il metacresolo la piridina e l'alcool benzilico, si rilevano valori di ritardi nettamente negativi, malgrado che altri liquidi ad indice di rifrazione pressoché eguale, inducano ritardi nettamente positivi.

TABELLA I.

Fibre reticolari non fissate, né digerite (vedi fig. 1).

LIQUIDI	Indice di rifrazione	Ritardi in $\mu\mu$
1° Acqua	1,333	7,5
2° Acqua e glicerina	1,363	5,7
3° Acqua e glicerina	1,393	4,02
4° Alcool isobutilico	1,395	6,4
5° Amile acetato	1,401	3,7
6° Cloroformio	1,447	6,0
7° Glicerina	1,454	2,8
8° Cicloesano	1,467	3,0
9° Olio d'oliva	1,468	4,6
10° Paraffina	1,471	4,5
11° Olio di Ricino	1,480	5,6
12° Olio di Rosmarino	1,482	5,7
13° Piridina	1,487	4,0
14° Olio di Garofano	1,534	2,4
15° <i>m.</i> cresolo	1,540	7,0
16° Balsamo del Canada	1,540	4,2
17° Alcool Benzilico	1,544	2,3
18° Olio di Anilina	1,580	5,6
19° Bromonaftalina	1,659	5,7

I valori ottenuti dalle misure praticate su fibre previamente fissate in formalina (vedi Tabella IV e fig. 2) non si discostano sensibilmente da quelli ottenuti dalle fibre non fissate. In particolare con acqua, glicerina e rispettive miscele la branca di curva parabolica presenta andamento pres-

soché immutato sebbene i valori relativi alle ordinate siano lievemente maggiori onde la curva risulta come spostata leggermente più in alto. Anche dopo la fissazione in formalina la misura dei ritardi in taluni liquidi (meta-cresolo, alcool benzilico, piridina) corrisponde a valori negativi.

TABELLA II.

Fibre non fissate né digerite.

LIQUIDI	pH	Ritardi in $\mu\mu$
HCl	1,5	6,1
HCl	3,2	6,3
Acqua	6,8	7,5
Na OH	11,5	6,3

Dalla tabella II si rileva come le fibre reticolari, poste in ambiente acido od alcalino, si mantengano birifrangenti malgrado che l'osservazione con il microscopio in contrasto di fase dimostri un netto rigonfiamento delle stesse. La misura dei ritardi denuncia valori alquanto minori rispetto alle fibre normali tenute in acqua. Le fibre digerite in tripsina alcalina non presentano sensibili variazioni nei caratteri ottici (vedi tabella III).

TABELLA III.

Fibre non fissate, digerite in tripsina.

LIQUIDI	Indice di rifrazione	Ritardo in $\mu\mu$
Acqua	1,333	7,2
Miscela di acqua e glicerina	1,363	5,2
Miscela di acqua e glicerina	1,393	3,1
Glicerina	1,454	2,5
Piridina	1,487	3,5
Alcool benzilico	1,544	3,2
Essenza di cannella	1,576	6,7

CONCLUSIONI. - Sulla base dei presenti rilievi è lecito ritenere che, in accordo con le ricerche di Massari e Marsico ⁽⁵⁾, le fibre reticolari sono

dotate, al pari di quelle collagene, di birifrangenza positiva sia di forma che propria, la quale può essere invertita per azione di alcuni liquidi quali il metacresolo, l'alcool benzilico, la piridina.

TABELLA IV.

Fibre fissate in formalina.

LIQUIDI	Indice di rifrazione	Ritardo in $\mu\mu$
1° Acqua	1,333	8,5
2° Miscela di acqua e glicerina	1,363	6,9
3° Miscela di acqua e glicerina	1,393	4,5
4° Glicerina	1,454	3,3
5° Cicloesano	1,467	3,7
6° Olio d'Oliva	1,468	3,0
7° Olio Paraffina	1,468	4,4
8° Olio di Ricino	1,480	4,0
9° Piridina	1,487	— 5,5
10° Olio di Garofano	1,534	+ 2,8
11° m. Cresolo	1,540	— 5,7
12° Alcool Benzilico	1,544	— 3,5
13° Essenza di cannella	1,576	6,7
14° Olio anilina	1,580	5,7
15° Bromonaftalina	1,659	6,5

In contrapposto con le ricerche dello Jaeger ⁽⁴⁾, la formalina non inverte il segno della birifrangenza delle fibre. La divergenza dei risultati di questo autore con i miei non può essere imputata ad eventuali differenze strutturali delle fibre reticolari rispetto a quelle collagene, dal momento che la formalina non ha effetto nemmeno sulle fibre collagene della capsula e delle trabecole fibrose dei linfonodi. Si deve invece ritenere che lo Jaeger ⁽⁴⁾ non abbia considerato come alcuni liquidi ed in particolare l'alcool benzilico — da lui stesso impiegato — non invertano la birifrangenza in ordine all'indice di rifrazione, cioè in ordine alla birifrangenza di forma, quanto in virtù di un'azione chimica esercitata sulle strutture chimiche delle fibre e quindi sulla birifrangenza propria. L'inefficacia della formalina a modificare il comportamento ottico delle strutture proteiche è anche dimostrata, fra l'altro,

dallo studio della birifrangenza del muscolo striato in condizioni normale e patologiche (Aloisi, Ascenzi, Bonetti⁽¹⁰⁾).

Alcuni valori misurati per determinati liquidi si discostano notevolmente dall'andamento prevedibile sulla base della legge di Wiener. Si tratta

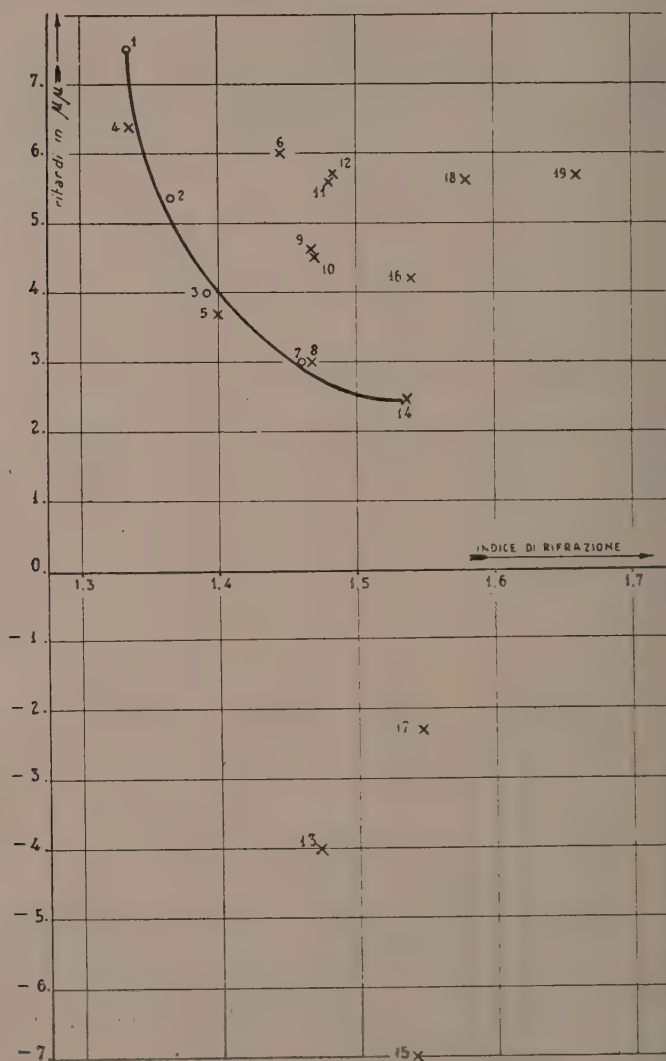


Fig. 1. - Fibre reticolari non fissate, né digerite.

di liquidi che, come gli oli o le essenze, hanno difficoltà a penetrare negli spazi intermicellari oppure che, per la loro costituzione chimica, modificano l'intima struttura micellare ed intermicellare da cui dipende la birifrangenza propria e quella di forma.

Pertanto al fine di stabilire una curva che con maggiore approssimazione corrisponda all'andamento della birifrangenza di forma delle fibre reticolari si devono considerare più indicativi i valori misurati nelle miscele di acqua e glicerina, che, come ritiene lo Schmidt ⁽³⁾ imbibiscono bene le fibre,

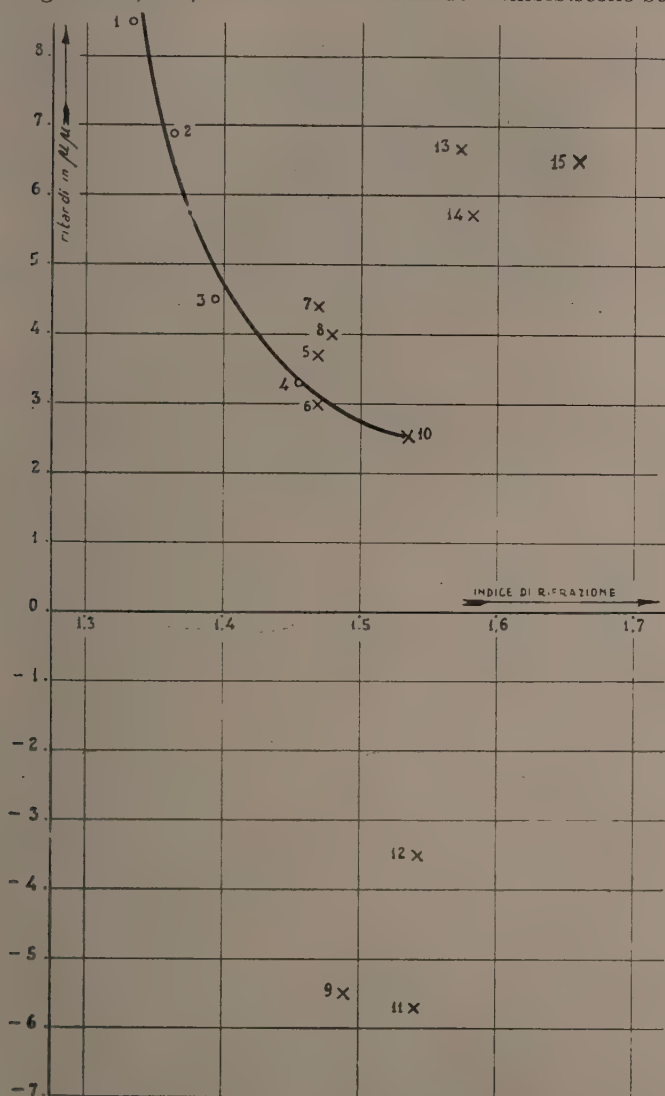


Fig. 2. - Fibre fissate in formalina.

mentre esercitano effetto chimico trascurabile sui caratteri ottici delle strutture proteiche.

La parabola relativa all'andamento della birifrangenza di forma della fibra reticolare e la cui branca sinistra è stata costruita prevalentemente

facendo uso di acqua e glicerina e delle relative miscele, presenta vertice positivo per un valore dell'indice di rifrazione del liquido d'imbibizione corrispondente a 1,53 circa. Con ciò si vuole significare che le fibre reticolari, a somiglianza di quelle collagene, sono dotate di birifrangenza propria o cristallina molto piccola.

Ritengo interessante richiamare l'attenzione sul fatto che le fibre reticolari rigonfiate per azione degli acidi e degli alcali diluiti rimangono birifrangenti e così pure quelle digerite con la tripsina. Infatti confrontando questi dati con le osservazioni elettroniche di fibre digerite in tripsina e rigonfiate, che dimostrano che le microfibrille non sono disgregate totalmente, ma solo risolte in filamenti formati a loro volta da piccoli fusì di circa 150 Å di lunghezza, uniti per gli estremi a corona di rosario, si può supporre che la birifrangenza propria sia legata a dette strutture a fuso che si osservano nelle immagini elettroniche.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE.

1° Le fibre reticolari sono dotate di birifrangenza di forma e propria positiva invertibile con il trattamento in *m.* cresolo, in alcool benzilico ed in piridina;

2° la formalina non modifica sensibilmente i caratteri ottici delle fibre reticolari;

3° dopo la digestione operata dalla tripsina in soluzione alcalina o dopo il rigonfiamento in acidi ed alcali diluiti le fibre reticolari sono ancora birifrangenti.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1953 - Settembre-ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Biologia. — *Confronto fra spettrogrammi Debye di cartilagine umana naturale, di osso demineralizzato e di osso naturale.* Nota ^(*) di CIRO ANDREATTA e IRNERIO FORNI, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

In una Nota precedente (1952) ⁽¹⁾ abbiamo riferito sui risultati di ricerche roentgenografiche sul componente minerale dell'osso umano naturale non polverizzato, dimostrando che i diagrammi Debye ottenuti con aghetti di osso sono perfettamente eguali a quelli ottenuti da Brandenberger e Schinz (1945) ⁽²⁾ su polvere di osso arroventata a circa 800° per aumentarne la cristallinità. Poiché i due Autori Svizzeri avevano documentato chiaramente che i diagrammi da loro ottenuti si dovevano riferire a idrossiapatite, i risultati delle nostre ricerche hanno dimostrato che il riscaldamento operato da Brandenberger e Schinz non aveva determinato la formazione di un nuovo composto, come era stato prospettato da qualche Autore successivo.

Oltre alla determinazione che il componente minerale dell'osso umano è sicuramente un termine della serie delle apatiti, le nostre ricerche sono state integrate da diagrammi Debye di aghetti di osso umano sottoposti a lenta demineralizzazione chimica, diagrammi che ci hanno permesso di constatare come una delle linee più intense del diagramma dell'osso naturale persista, con un lieve spostamento, anche in quello dell'osso demineralizzato. Poiché per la tecnica usata e per il controllo radiografico diretto avevamo potuto

(*) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1953.

(1) C. ANDREATTA e I. FORNI, *Ricerche roentgenografiche sul componente minerale dell'osso umano naturale non polverizzato e sull'osso demineralizzato*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis. mat. e nat., 13, 14-18 (1952).

(2) E. BRANDENBERGER, e H. R. SCHINZ. *Ueber die Natur der Verkalkungen bei Mensch und Tier und das Verhalten der anorganischen Knochensubstanz im Falle der hauptsächlich menschlichen Knochenkrankheiten*. « Helvet. Medic. Acta », 12, 1-65 (1945).

presumere di avere eliminato con la demineralizzazione chimica tutto il componente minerale dell'osso, abbiamo avanzato l'ipotesi che la linea descritta del diagramma dell'osso demineralizzato sia da riferire alla sostanza organica dell'osso stesso.

Le ricerche delle quali riferiamo nella presente Nota non sono che la logica continuazione con lo stesso metodo delle nostre ricerche precedenti, estese alla cartilagine umana naturale.

Il materiale usato non è stato sottoposto ad alcuna preparazione né ad alcun trattamento che potesse alterare la struttura cristallina dei componenti della cartilagine. Abbiamo perciò asportato da un astragalo umano fresco la cartilagine di incrostazione ricavando da essa aghetti della lunghezza di circa 2 cm e dello spessore di circa 2 mm, che venivano infilati in tubicini di vetro dello spessore di circa 2 mm allo scopo di mantenerli diritti durante l'essiccamento in termostato a 37° per 48 ore.

Dagli aghetti così preparati sono stati ottenuti i diagrammi Debye con una camera Weissenberg della Ch. Supper Co. usando tubi Machlett con anticatodo di rame. Nella tavola allegata sono riportati due diagrammi di aghetti di osso naturale, uno di aghetto di osso demineralizzato ed uno di aghetto di cartilagine.

L'osservazione della tavola dimostra che la cartilagine umana contiene un componente che dà nel diagramma Debye la stessa linea dell'osso demineralizzato, linea che si deve riferire al collagene. Le più recenti ricerche hanno infatti stabilito che la parte organica dell'osso è costituita da fibre collagene e da una sostanza cementante che comprende anche i cristalli di apatite; le fibre collagene formano più della metà della sostanza organica dell'osso (Robinson, 1952, Robinson e Watson, 1952⁽³⁾). Queste fibre sono state indicate come la parte cristallina della materia organica, perché danno una banda di diffrazione nei diagrammi roentgenografici. Nei nostri roentgenogrammi ottenuti da aghetti di osso demineralizzato, la banda suddetta è visibile con evidenza e corrisponde esattamente alla banda ottenuta dalla cartilagine, per cui si deduce la identità, dal punto di vista cristallografico fra il collagene dell'osso e della cartilagine.

La persistenza di tale linea nei diagrammi, sia pure con lieve spostamento passando dall'osso naturale all'osso demineralizzato (Andreatta e Forni, 1952⁽¹⁾), indica che esiste un motivo strutturale cristallino comune fra le apatiti e le fibre collagene dell'osso e della cartilagine. Tale motivo non può essere che quello tipicamente esagonale delle apatiti. Le recenti interessanti ricerche di Robinson (1952) al microscopio elettronico hanno precisato non solo la costanza della forma e delle dimensioni della fibre di collagene dell'osso, ma hanno permesso anche di intuire una sezione esagonale delle stesse; come dimostrarono l'esistenza di cristalli di apatite nella massa della sostanza cementante, concresciuti ai bordi delle fibre collagene.

(3) R. A. ROBINSON, *An electron microscope study of the crystalline inorganic component of bone and its relationship to the organic matrix.* - J. Bone and Joint Surg., 34, A, 389-434 1952; R. A. ROBINSON e M. L. WATSON, *Collagen cristal relationship in bone as seen in the electron microscope.* « Anat. Record », 114, 383-410 (1952).



Fig. 1. - *Aghetto di osso umano naturale*; camera diam. 57,3, radiazioni $\text{Cu K}\alpha\text{-K}\beta$.

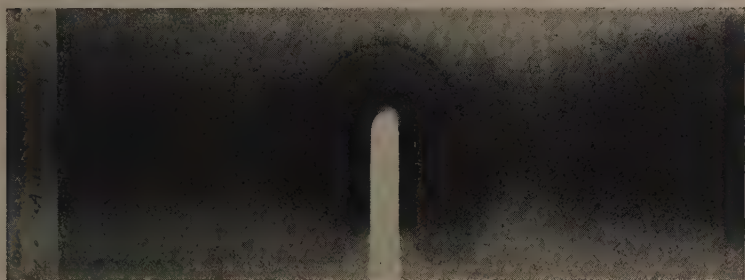


Fig. 2. - *Idem; idem.*

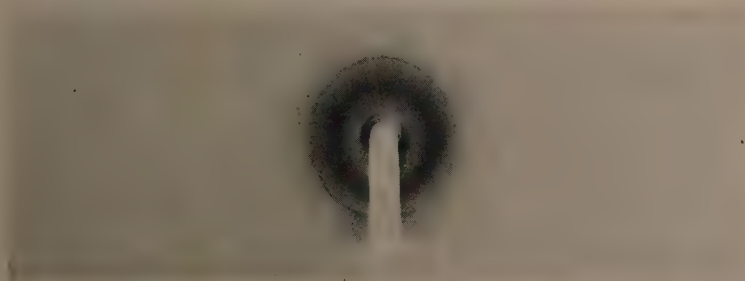


Fig. 3. - *Aghetto di osso umano demineralizzato* per immersione in soluzione al 2 % di HCl per 40 ore; camera e radiazioni come sopra.



Fig. 4. - *Aghetto di cartilagine umana naturale*; camera e radiazioni come sopra.

Le nostre ricerche continuano per risolvere in dettaglio sia i problemi che riguardano la composizione chimica del costituente minerale dell'osso umano sia per chiarire i rapporti fra tale costituente e le fibre collagene, in relazione alla loro struttura cristallina.

Tuttavia, il presente lavoro, che ha il carattere di nota preliminare, dimostra già fino da questo momento la esistenza di una relazione strutturistica fra i cristalli di apatite e le fibre collagene dell'osso umano. Tale relazione è verosimilmente da interpretare nel senso che le lunghe fibre collagene dovrebbero rappresentare una specie di impalcatura fondamentale nella quale trovano sistemazione i cristalli di idrossiapatite. Non è da escludersi che fra i due componenti cristallini dell'osso possano stabilirsi relazioni analoghe a quelle esistenti nelle associazioni di cristalli di specie diversa (epitassia). Questa deduzione è già in parte adombrata indirettamente nei lavori di Robinson (1952) e di Robinson e Watson (1952), quando è ricordato che l'asse c dei cristalli di idrossiapatite è approssimativamente parallelo all'asse di allungamento delle fibre collagene e che i cristalli di apatite formano anelli attorno alle fibre stesse.

Altri lavori sono in corso nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna allo scopo di avere una completa documentazione di diagrammi Debye dei vari tipi di apatite e di miscele di apatiti con calcite. Di quest'altro gruppo di ricerche si può qui anticipare un primo risultato: i diagrammi di idrossiapatite e di aghetti di osso umano naturale sono identici.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Calcolo delle variazioni. — *Sulla semicontinuità degli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* Nota I^(*) di ROBERTO CONTI, presentata dal Socio G. SANSONE.

1. È noto che, adottando la metrica lagrangiana, la semicontinuità inferiore degli integrali

$$I_C = \int_C f(x, y, y') dx$$

nel campo delle C assolutamente continue (curve « ordinarie » secondo L. Tonelli) porta di conseguenza la convessità della $f(x, y, z)$ come funzione della z ⁽²⁾.

In quel che segue metteremo in evidenza un fatto che ci sembra non sia stato rilevato esplicitamente finora, provando (Teorema 1) che se si allarga la classe delle C passando da quelle assolutamente continue a quelle

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1953.

(1) Ved. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, vol. 1^o (Bologna, 1921), Cap. X.

che sono soltanto continue e rettificabili, gli integrali semicontinui inferiormente (o superiormente) corrispondono ad una $f(x, y, z)$ indipendente dalla z e costituiscono pertanto una classe eccezionalmente ristretta. Questo risultato « negativo » concorda con le conclusioni di M. Lavrentieff il quale ha provato ⁽²⁾ che la classe più ampia in cui si possa utilmente impostare la ricerca degli estremi di I_C è appunto quella delle C assolutamente continue.

Per gli integrali dipendenti dalle derivate di ordine superiore

$$I_C^{[n]} = \int_C f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

si riscontra poi un fenomeno del tutto analogo; si prova infatti (Teorema 2) che allargando la classe delle C nelle quali S. Cinquini ha impostato lo studio dei problemi di ordine n ⁽³⁾, la semicontinuità inferiore di I ha per conseguenza che la $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ non dipende dalla variabile $y^{(n)}$.

Nel n. 7 si fa cenno al caso degli integrali doppi.

In una Nota successiva ci occuperemo di un tipo di semicontinuità più debole di quella lagrangiana.

2. Proviamo anzitutto due lemmi:

LEMMA 1 ⁽⁴⁾. — Sia $\varphi(x)$ una funzione assegnata, definita e continua per $\alpha \leq x \leq \beta$ e siano λ ed ε , con $\varepsilon > 0$, due numeri pure assegnati. Esiste allora (almeno) una funzione $\theta(x)$ continua ed a variazione limitata in (α, β) , con derivata quasi dappertutto uguale a λ e tale che

$$|\varphi(x) - \theta(x)| < \varepsilon, \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Sia $\lambda = 0$; mediante i punti $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = \beta$ dividiamo (α, β) in parti in ciascuna delle quali l'oscillazione di $\varphi(x)$ sia $< \varepsilon/3$ e costruiamo in (α_i, α_{i+1}) una funzione $\theta_i(x)$ singolare (cioè continua, a variazione limitata, con derivata nulla quasi dappertutto), tale che $\theta_i(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i)$ e $\theta_i(\alpha_{i+1}) = \varphi(\alpha_{i+1})$ ⁽⁵⁾. La funzione $\theta(x)$ definita ponendola uguale alla $\theta_i(x)$ in ciascun (α_i, α_{i+1}) soddisfa a tutti i requisiti.

Sia ora $\lambda \neq 0$; posto $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \lambda x$ costruiamo come si è fatto ora una $\eta(x)$ continua, a variazione limitata, con derivata nulla quasi dappertutto e tale che

$$|\psi(x) - \eta(x)| < \varepsilon, \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

(2) Ved. M. LAVRENTIEFF, *Sur quelques problèmes du Calcul des Variations*. « Ann. di Mat. pura ed appl. » (4), 4, pp. 7-28 (1927).

(3) Ved. S. CINQUINI, *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n* . « Ann. di Mat. pura ed appl. » (4), 15, pp. 77-86, (1936-7); *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di calcolo delle variazioni di ordine n* . « Ann. della S.N.S. di Pisa » (2), 5, pp. 169-190 (1936); *Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n* . « Ann. della S.N.S. di Pisa » (2), 6, pp. 149-178 (1937).

(4) Cfr. per il caso $\lambda = 0$, N. LUSIN, *Integrale e serie trigonometriche* (in russo) (Mosca-Leningrado, p. 78 (1951)).

(5) Cfr. ad esempio H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 2^a ed. (Paris, 1928), p. 56.

La funzione $\theta(x) = \eta(x) + \lambda x$ ha le proprietà richieste, poiché è identicamente $\varphi(x) - \theta(x) = \psi(x) - \eta(x)$.

LEMMA 2. — Sia $\varphi(x)$ una funzione assegnata, dotata in $\alpha \leq x \leq \beta$ di derivate continue fino alla $n-1$ -ma, $\varphi^{(n-1)}(x)$, inclusa. Dati due numeri λ, ε , con $\varepsilon > 0$, esiste (almeno) una funzione $\theta(x)$ dotata di derivata $n-1$ -ma, $\theta^{(n-1)}(x)$, continua e a variazione limitata, con derivata n -ma, $\theta^{(n)}(x)$, quasi dappertutto uguale a λ e tale che

$$|\varphi^{(r)}(x) - \theta^{(r)}(x)| < \varepsilon (\beta - \alpha)^{n-r-1} / (n-r-1)! \quad , \quad \alpha \leq x \leq \beta, \\ (r = 0, 1, \dots, n-1)$$

(dove $\varphi^{(0)}(x) \equiv \varphi(x)$, $\theta^{(0)}(x) \equiv \theta(x)$).

Per il Lemma 1 esiste (almeno) una funzione $\eta(x)$ continua ed a variazione limitata in (α, β) , con derivata quasi dappertutto uguale a λ , e tale che sia

$$(\prime) \quad |\varphi^{(n-1)}(x) - \eta(x)| < \varepsilon \quad , \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Se poniamo in (α, β)

$$\theta(x) = \varphi(\alpha) + \frac{\varphi'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \dots + \frac{\varphi^{(n-3)}(\alpha)}{(n-3)!}(x-\alpha)^{n-3} + \\ + \frac{1}{(n-2)!} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-2} \eta(t) dt,$$

si ha $\theta^{(n-1)}(x) = \eta(x)$, quindi quasi dappertutto $\theta^{(n)}(x) = \lambda$. Inoltre, essendo

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + \frac{\varphi'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \dots + \frac{\varphi^{(n-3)}(\alpha)}{(n-3)!}(x-\alpha)^{n-3} + \\ + \frac{1}{(n-2)!} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-2} \varphi^{(n-1)}(t) dt,$$

dalla (\prime) segue

$$|\varphi^{(r)}(x) - \theta^{(r)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(n-r-2)!} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-r-2} dt \leq \frac{(\beta-\alpha)^{n-r-1}}{(n-r-1)!} \varepsilon \\ (r = 0, 1, \dots, n-1).$$

3. Diamo qui alcune definizioni, in parte di uso comune, in parte nuove; queste ultime sono suggerite da motivi di concisione e di chiarezza ⁽⁶⁾.

Il campo A è un qualunque insieme di punti del piano x, y , contenente tutti i suoi punti di accumulazione al finito.

Con $f(x, y, z)$ indichiamo un'assegnata funzione (reale ⁽⁷⁾) definita per $(x, y) \in A$ e per $|z| < +\infty$; la $f(x, y, z)$ sarà supposta soltanto continua rispetto a (x, y, z) .

(6) Cfr., per le prime: L. TONELLI, op. cit., vol. I^o.

(7) Come tutte le quantità, costanti o variabili, qui considerate.

In corrispondenza a questa f indichiamo con Ω l'insieme di tutte le curve

$$C: \quad y = y(x), \quad a \leq x \leq b;$$

aventi i seguenti requisiti:

i) la $y(x)$ è una funzione definita e continua in un intervallo chiuso (a, b) , con $-\infty < a \leq b < +\infty$ ⁽⁸⁾;

ii) $(x, y(x)) \in A$ per $a \leq x \leq b$;

iii) la $y(x)$ è in (a, b) a variazione limitata;

iiii) indicata con $y'(x)$ la derivata di $y(x)$ dove esiste finita, l'integrale

$$I_C \equiv \int_C f(x, y, y') dx \equiv \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

esiste finito (nel senso di Lebesgue ⁽⁹⁾).

Indicheremo con Ω^* il sottoinsieme delle $C \in \Omega$ che soddisfano i), ii), iii) e

iii*) la $y(x)$ è in (a, b) assolutamente continua ⁽¹⁰⁾.

Diciamo che I_C è semicontinuo inferiormente su una $C_0 \in \Omega$ se, preso un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, si può determinare un altro numero $\rho > 0$ tale che la disuguaglianza

$$I_C > I_{C_0} - \varepsilon$$

valga per tutte le $C \in \Omega$ appartenenti propriamente all'intorno (ρ) ⁽¹¹⁾ della C_0 .

Se I_C è semicontinuo inferiormente su ogni $C \in \Omega$ diremo che I_C è semicontinuo inferiormente in Ω .

4. Proviamo ora il seguente

TEOREMA I. - Se I_C è semicontinuo inferiormente in Ω la $f(x, y, z)$ risulta della forma

$$f(x, y, z) = P(x, y)$$

($P(x, y)$ continua) in tutti i punti (x, y) interni al campo A ed in quelli di accumulazione di tali punti.

Per la continuità della f ci possiamo limitare a considerare i soli punti interni ad A .

(8) L'intervallo (a, b) non è necessariamente lo stesso per tutte le $y(x)$.

(9) L'integrazione è sempre intesa qui nel senso di Lebesgue.

(10) Ω^* è dunque l'insieme delle curve ordinarie di L. TONELLI (op. cit., p. 349).

(11) La curva $C \in \Omega$ ($y = y(x)$, $a \leq x \leq b$) si dice che appartiene propriamente all'intorno (ρ) della curva $C_0 \in \Omega$ ($y = y_0(x)$, $a_0 \leq x \leq b_0$) se la $y(x)$ appartiene propriamente all'intorno (ρ) della $y_0(x)$, cioè se (L. TONELLI, op. cit., p. 72): 1° per ogni x comune ad (a, b) e (a_0, b_0) è $|y(x) - y_0(x)| \leq \rho$; 2° per ogni x minore di a_0 e appartenente ad (a, b) è $|y_0(a_0) - y(x)| \leq \rho$; 3° per ogni x maggiore di b_0 e appartenente ad (a, b) è $|y_0(b_0) - y(x)| \leq \rho$; 4° è $|a_0 - a| \leq \rho$, $|b_0 - b| \leq \rho$.

Supponiamo per assurdo che esistano un punto (x_0, y_0) interno ad A e due valori z_1 e z_2 , con $z_1 < z_2$, tali che

$$|f(x_0, y_0, z_1) - f(x_0, y_0, z_2)| = \eta^2 > 0.$$

Ancora per la continuità della $f(x, y, z)$ potremo determinare un numero $\rho > 0$ in modo che in tutti i punti (x, y) del cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio ρ valga la

$$(1) \quad f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2) < -\eta^2/2,$$

oppure la

$$(2) \quad f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1) < -\eta^2/2.$$

Ammettiamo dapprima che valga la (1), siano α, β , con $\alpha < \beta$, due numeri tali che il segmento rettilineo

$$C_0: \quad y_0(x) = z_2(x - x_0) + y_0, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

risulti tutto interno al cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio ρ .

Costruiamo allora una successione $\{C_m\}$ di curve $C_m \in \Omega$

$$C_m: \quad y = y_m(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

tutte interne al cerchio ora detto (almeno da un certo m_0 in poi) tali che $y_m(x)$ converga uniformemente in (α, β) verso la $y_0(x)$ per $m \rightarrow +\infty$ e tali che sia $y'_m(x) = z_1$ quasi dappertutto in (α, β) ⁽¹²⁾.

Avremo dunque

$$f(x, y_0(x), y'_m(x)) - f(x, y_0(x), y'_0(x)) < -\eta^2/2,$$

quasi dappertutto in (α, β) , e quindi anche

$$\begin{aligned} f(x, y_m(x), y'_m(x)) - f(x, y_0(x), y'_0(x)) &< f(x, y_m(x), y'_m(x)) - \\ - f(x, y_0(x), y'_m(x)) - \eta^2/2 &= f(x, y_m(x), z_1) - f(x, y_0(x), z_1) - \eta^2/2, \end{aligned}$$

e integrando da α a β rispetto alla x :

$$I_{C_m} - I_{C_0} < \int_{\alpha}^{\beta} |f(x, y_m(x), z_1) - f(x, y_0(x), z_1)| dx - \eta^2(\beta - \alpha)/2.$$

Poiché $f(x, y, z_1)$ è continua, e quindi nel cerchio (chiuso) di centro (x_0, y_0) e raggio ρ è uniformemente continua, e poiché $y_m(x)$ converge in (α, β) uniformemente verso $y_0(x)$, esisterà un intero $m_1 \geq m_0$ tale che per ogni $m > m_1$ sia

$$|f(x, y_m(x), z_1) - f(x, y_0(x), z_1)| < \eta^2/4$$

(12) L'esistenza di (almeno) una successione soddisfacente le condizioni richieste è assicurata dal Lemma 1, nel quale si ponga $\varphi(x) = z_2(x - x_0) + y_0$, $\lambda = z_1$, $\varepsilon = 1/m$, $\theta(x) = y_m(x)$; si osservi che, per essere quasi dappertutto $y'_m(x) = z_1$, l'integrale I_{C_m} esiste finito.

per $\alpha \leq x \leq \beta$; dunque per ogni $m > m_1$ avremo

$$I_{C_m} - I_{C_0} < -\eta^2 (\beta - \alpha)/4,$$

e ciò, essendo η^2 un numero fisso, contrasta con la supposta semicontinuità inferiore di I_C .

Se invece della (1) vale la (2) basta ripetere il ragionamento sostituendo il segmento C_0 con un segmento della retta $y = z_1(x - x_0) + y_0$ e costruendo le $y_m(x)$ in modo da avere $y'_m(x) = z_2$ quasi dappertutto.

Oss. 1^a. - È evidente che se $f(x, y, z) = P(x, y)$, ($P(x, y)$ continua), allora I_C è addirittura continuo su ogni $C \in \Omega$ (ed anzi su ogni curva continua C soddisfacente le condizioni i) e ii) del n. 2); cioè, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si ha $|I_C - I_{C_0}| < \varepsilon$ per tutte le $C \in \Omega$ che appartengono propriamente all'intorno (ρ) della C_0 .

Oss. 2^a. - È pure evidente che la tesi del teorema 1 sussiste sostituendo la semicontinuità inferiore con quella superiore ($I_C < I_{C_0} + \varepsilon$).

5. Passiamo ora ad esaminare gli integrali dipendenti dalle derivate di ordine superiore al primo.

Invece del campo A del n. 2 si ha qui un campo $A^{[n]}$, insieme di punti dello spazio $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, contenente tutti i propri punti di accumulazione al finito. La funzione integranda è una data funzione $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ definita per $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in A$, $|y^{(n)}| < +\infty$; *la supporremo soltanto continua rispetto a $(x, y, y', \dots, y^{(n)})$.*

Con $\Omega_{[n]}$ indichiamo l'insieme di tutte le curve

$$C: \quad y = y(x) \quad , \quad a \leq x \leq b,$$

tali che:

i) la $y(x)$ è una funzione definita in un intervallo chiuso (a, b) , con $-\infty < a < b < +\infty$, ivi dotata di derivate fino alla $n-1$ -ma, inclusa, $y^{(n-1)}(x)$, ovunque finita;

ii) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in A^{[n]}$, $a \leq x \leq b$;

iii) la $y^{(n-1)}(x)$ è in (a, b) continua e a variazione limitata;

iiii) detta $y^{(n)}(x)$ la derivata n -ma di $y(x)$ dove essa esiste finita, l'integrale

$$I_C^{[n]} \equiv \int_C f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \equiv \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

esiste finito.

Con $\Omega_{[n]}^*$ indichiamo poi il sottoinsieme delle $C \in \Omega_{[n]}$ soddisfacenti i), ii), iii) e

iii*) la $y^{(n-1)}(x)$ è in (a, b) assolutamente continua⁽¹³⁾.

(13) Cosicché $\Omega_{[n]}^*$ è l'insieme delle curve considerate da S. CINQUINI nei lavori citati.

Ciò posto, l'integrale $I_C^{[n]}$ si dice semicontinuo inferiormente su una $C_0 \in \Omega_{[n]}$ [$C_0 \in \Omega_{[n]}^*$] se per ogni numero $\epsilon > 0$ si può determinare un numero $\rho > 0$ tale che la disuguaglianza

$$I_C^{[n]} > I_{C_0}^{[n]} - \epsilon$$

sia verificata per tutte le $C \in \Omega_{[n]}$ [$C \in \Omega_{[n]}^*$] appartenenti propriamente all'intorno $(\rho)^n$ ⁽¹⁴⁾ della C_0 .

Se $I_C^{[n]}$ è semicontinuo inferiormente su ogni $C \in \Omega_{[n]}$ [$C \in \Omega_{[n]}^*$] si dirà che $I_C^{[n]}$ è semicontinuo inferiormente in $\Omega_{[n]}$ [in $\Omega_{[n]}^*$].

6. S. Cinquini ha provato ⁽¹⁵⁾ che, se $I_C^{[n]}$ è semicontinuo inferiormente in $\Omega_{[n]}^*$, allora in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ interni ad $A^{[n]}$ ed in quelli di accumulazione di tali punti la $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, come funzione della sola $y^{(n)}$, deve essere concava verso l'alto (cioè *convessa* nel senso di J. L. W. V. Jensen).

In $\Omega_{[n]}$ vale invece il seguente

TEOREMA 2. — Se $I_C^{[n]}$ è semicontinuo inferiormente in $\Omega_{[n]}$ allora in

tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ interni al campo $A^{[n]}$ ed in quelli di accumulazione di tali punti la f risulta della forma

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = P(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

(con $P(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funzione continua), cioè essa non dipende dalla $y^{(n)}$.

La dimostrazione è una naturale estensione di quella del Teorema 1 e si compie facendo uso del Lemma 2 anziché del Lemma 1.

Esistano, per assurdo, un punto $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ interno ad $A^{[n]}$ (anche qui ci possiamo limitare a considerare i soli punti interni) e due numeri z_1 e z_2 , con $z_1 < z_2$, tali che sia

$$|f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, z_1) - f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, z_2)| = \eta^2 > 0,$$

cioè vi sarà un numero $\rho > 0$ tale che in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ della ipersfera S_ρ di centro $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ e raggio ρ valga la

$$(1_n) \quad f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z_1) - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z_2) < -\eta^2/2,$$

oppure la

$$(2_n) \quad f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z_2) - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z_1) < -\eta^2/2.$$

(14) La curva $C \in \Omega_{[n]}$ ($y = y(x)$, $a \leq x \leq b$) si dice che appartiene propriamente all'intorno $(\rho)^n$ della curva $C_0 \in \Omega_{[n]}$ ($y = y_0(x)$, $a_0 \leq x \leq b_0$) se la funzione $y(x)$ appartiene propriamente all'intorno $(\rho)^n$ della funzione $y_0(x)$, cioè se: 1° per ogni x comune ad (a, b) e (a_0, b_0) si ha $|y^{(r)}(x) - y_0^{(r)}(x)| < \rho$, ($r = 0, 1, \dots, n-1$; $y^{(0)}(x) = y(x)$, $y_0^{(0)}(x) = y_0(x)$); 2° per ogni $x < a_0$ ed appartenente ad (a, b) è $|y_0^{(r)}(a_0) - y^{(r)}(x)| < \rho$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$); 3° per ogni $x > b_0$ ed appartenente ad (a, b) è $|y_0^{(r)}(b_0) - y^{(r)}(x)| < \rho$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$); 4° è $|a - a_0| < \rho$, $|b - b_0| < \rho$. (Cfr. S. CINQUINI, lav. citati, in particolare il secondo).

(15) Lavoro citato per 2° in (3), p. 156, in nota.

Valga la (1_n) e siano α, β , con $\alpha < \beta$, due numeri tali che la curva

$$C_0: \quad y = \frac{z_2}{n!} (x - x_0)^n + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \dots + \frac{y_0'}{1!} (x - x_0) + y_0, \\ \alpha \leq x \leq \beta,$$

risulti « interna a S_0 » ⁽¹⁶⁾.

Valendoci del Lemma 2 possiamo costruire una successione $\{C_m\}$ di curve $C_m \in \Omega_{[n]}$

$$C_m: \quad y = y_m(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

tutte « interne a S_0 » (almeno da un certo m_0 in poi) ⁽¹⁷⁾ tali che $y_m^{(r)}(x)$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$) converga uniformemente in (α, β) verso $y_0^{(r)}(x)$ e tali che sia $y_m^{(n)}(x) = z_1$ quasi dappertutto in (α, β) ⁽¹⁸⁾.

Operando in modo analogo a quello tenuto nel n. 4 possiamo scrivere la disuguaglianza

$$I_{C_m}^{[n]} - I_{C_0}^{[n]} < \int_{\alpha}^{\beta} |f(x, y_m(x), y_m'(x), \dots, y_m^{(n-1)}(x), z_1) - \\ - f(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), z_1)| dx - \eta^2 (\beta - \alpha)/2.$$

Per l'uniforme continuità di $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z_1)$ nell'ipersfera S_0 (chiusa) e dalla convergenza uniforme di $y_m^{(r)}(x)$ verso $y_0^{(r)}(x)$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$) in (α, β) , segue l'esistenza di un intero $m_1 \geq m_0$ tale che per ogni $m > m_1$ sia

$$I_{C_m}^{[n]} - I_{C_0}^{[n]} < -\eta^2 (\beta - \alpha)/4,$$

da cui l'assurdo.

Se valesse la (2_n) in luogo della (1_n) si sostituirebbe la C_0 con un opportuno arco della curva

$$y = \frac{z_1}{n!} (x - x_0)^n + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \dots + \frac{y_0'}{1!} (x - x_0) + y_0$$

e si costruirebbe una successione $\{y_m(x)\}$ con le $y_m(x)$ tali da aversi $y_m^{(n)}(x) = z_2$ quasi dappertutto.

Oss. 1^a. - Valgono osservazioni del tutto analoghe a quelle fatte nel n. 4.

(16) Nel senso che si abbia $|y^{(r)}(x) - y_0^{(r)}(x)| < \rho$, ($r = 0, 1, \dots, n-1$) per $\alpha \leq x \leq \beta$.

(17) Nel senso che si abbia $|y_m^{(r)}(x) - y_0^{(r)}(x)| < \rho$, ($r = 0, 1, \dots, n-1$; $m = m_0, m_0 + 1, \dots$) per $\alpha \leq x \leq \beta$.

(18) Basterà porre nel Lemma 2: $\varphi(x) = z_2(x - x_0)/n! + y_0^{(n-1)}(x - x_0)/(n-1)! + \dots + y_0'$, $\lambda = z_1$, $\varepsilon = 1/m$, $\theta(x) = y_m(x)$; dalla $y_m^{(n)}(x) = z_1$, verificata quasi dappertutto, segue l'esistenza di $I_{C_m}^{[n]}$ finito.

Oss. 2^a. — Come il teorema 1 è in accordo con i risultati di M. Lavrentieff (cfr. n. 1), così il teorema 2 ora dimostrato si accorda con analoghe conclusioni « negative » contenute in una Memoria di N. Bogoliouboff relativa ai problemi di ordine superiore al primo ⁽¹⁹⁾.

7. Accenniamo infine agli integrali doppi, sempre in forma ordinaria, cioè agli integrali

$$\iint_D f(x, y, z, p, q) dx dy \quad (p = z_x, q = z_y),$$

la cui teoria, com'è noto, è stata da L. Tonelli impostata nel campo delle $z(x, y)$ assolutamente continue (nel senso di L. Tonelli), cioè di quelle particolari superficie quadrabili (secondo Lebesgue) la cui area è esprimibile mediante l'integrale classico.

$$\iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Volendo compiere anche qui un ampliamento della classe delle superficie ammissibili dovremmo, per analogia, prendere in considerazione tutte le superficie quadrabili, vale a dire tutte le $z(x, y)$ continue ed a variazione limitata (secondo L. Tonelli).

Si potrebbe facilmente provare che la semicontinuità (di tipo lagrangiano) in questa classe porta l'indipendenza della $f(x, y, z, p, q)$ dalle variabili p, q . Per non dilungarci oltre ci limiteremo ad un esempio.

Sia $\theta_m(x)$ una successione di funzioni continue e a variazione limitata, uniformemente convergente in $0 \leq x \leq 1$ verso la funzione $y = x$ e sia $\theta'_m(x) = 0$ quasi dappertutto in $(0, 1)$ (cfr. Lemma 1). Detto Q il quadrato $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ definiamo la funzione $z_0(x, y)$ uguale a x in Q e la funzione $z_m(x, y)$ ($m = 1, 2, \dots$) uguale a $\theta_m(x)$ in Q . Se $f(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2$ si ha

$$\iint_Q (p_m^2 + q_m^2) dx dy = 0 < \iint_Q (p_0^2 + q_0^2) dx dy = 1.$$

Questa relazione mostra che l'integrale di Dirichlet, semicontinuo (com'è noto) nell'insieme delle $z(x, y)$ assolutamente continue secondo L. Tonelli, non è invece semicontinuo inferiormente nell'insieme più ampio delle $z(x, y)$ continue ed a variazione limitata secondo L. Tonelli.

(19) Ved. N. BOGOLIUBOFF, *Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations*. « Ann. di Mat. pura ed appl. » (4), 9. pp. 195-241 (1931).

Calcolo delle variazioni. — *Sulla semicontinuità degli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* Nota II^(*) di ROBERTO CONTI, presentata dal Socio G. SANSONE.

1. Abbiamo studiato nella Nota I⁽¹⁾ l'effetto che ha nei riguardi della semicontinuità lagrangiana degli integrali

$$I_C = \int_C f(x, y, y') dx$$

in forma ordinaria, l'ammettere curve C che siano soltanto continue e rettificabili, in luogo delle curve C assolutamente continue (curve « ordinarie » di L. Tonelli).

Qui ci occuperemo dell'effetto che tale allargamento della classe delle C ha rispetto ad un tipo di semicontinuità più debole di quella lagrangiana, che noi diremo appunto « semicontinuità debole », e che, nel campo delle curve C ordinarie, è stato sostanzialmente considerato da L. Tonelli nei Suoi *Fondamenti di calcolo delle variazioni*⁽²⁾.

Il risultato principale di questa ricerca è contenuto nel n. 3 nel quale si dà una condizione sufficiente di semicontinuità debole nel campo delle C continue e rettificabili. Nel n. 5 si mostra poi che i criteri noti di semicontinuità lagrangiana nel campo delle C ordinarie sono anche sufficienti ad assicurare la semicontinuità debole sulle C continue e rettificabili.

2. Raccogliamo qui le definizioni necessarie per il seguito.

Il campo A , la funzione $f(x, y, z)$, gli insiemi di curve Ω e Ω^* sono già stati definiti al n. 3 della Nota I, alla quale rinviamo il Lettore; avvertiamo soltanto che anche qui, come già nella Nota I, *supporremo che la $f(x, y, z)$ sia soltanto continua rispetto a (x, y, z) per $(x, y) \in A$, $|z| < +\infty$.*

Data una successione $\{y_n(x)\}$ di funzioni continue e a variazione limitata:

$$y = y_n(x) \quad , \quad a_n \leq x \leq b_n,$$

uniformemente convergente verso una funzione $y = y_0(x)$ definita per $a_0 \leq x \leq b_0$ ed ivi (continua e) a variazione limitata⁽³⁾, diremo che la $\{y_n(x)\}$ converge verso la $y_0(x)$ in senso forte se è anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} |y'_n(x) - y'_0(x)| dx = 0,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1953.

(1) Questo fascicolo, pp. 149-157.

(2) Cfr. il successivo n. 6.

(3) Diciamo che $y_n(x)$ converge verso $y_0(x)$ uniformemente se (cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, vol. 1^o, Bologna, 1921, p. 76), fissato un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare un intero n_0 tale che per ogni $n > n_0$ la $y_n(x)$ appartenga propriamente all'intorno (ε) della $y_0(x)$; circa il significato di quest'ultima locuzione ved. Nota I.

dove (a'_n, b'_n) è l'intervallo contenente (a_0, b_0) e (a_n, b_n) nel quale si pongono uguali a zero la $y'_n(x)$ e la $y'_0(x)$ dove non esistono finite oppure dove le $y_n(x), y_0(x)$ non sono definite ⁽⁴⁾.

Data una successione di curve

$$C_n: \quad y = y_n(x) \quad , \quad a_n \leq x \leq b_n,$$

dell'insieme Ω , diremo che essa converge in senso forte verso una curva

$$C_0: \quad y = y_0(x) \quad , \quad a_0 \leq x \leq b_0,$$

continua e rettificabile (ma non necessariamente appartenente a Ω) se $\{y_n(x)\}$ converge in senso forte verso $y_0(x)$.

Se C_0 è una curva di Ω [di Ω^*] diremo che I_C è *semicontinuo inferiormente in senso debole* ⁽⁵⁾ su C_0 se, per ogni successione $\{C_n\}$ di curve $C_n \in \Omega$ [$C_n \in \Omega^*$] convergente in senso forte verso, C_0 , è

$$\min \lim I_{C_n} \geq I_{C_0}.$$

Se I_C è semicontinua inferiormente in senso debole su ogni $C_0 \in \Omega$ [$C_0 \in \Omega^*$] diremo semplicemente che I_C è *semicontinuo inferiormente in senso debole in Ω* [in Ω^*].

Nei numeri seguenti daremo una condizione atta ad assicurare la semicontinuità inferiore in senso debole di I_C in Ω .

3. Proviamo il seguente

LEMMA. — Sia

$$C_n: \quad y = y_n(x) \quad , \quad a_n \leq x \leq b_n, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

una successione di curve di Ω convergente in senso forte verso la curva continua e rettificabile

$$C_0: \quad y = y_0(x) \quad , \quad a_0 \leq x \leq b_0.$$

Esistano inoltre tre numeri λ, Λ, ρ , di cui $\Lambda \geq 0, \rho > 0$, tali che si abbia

$$(1) \quad f(x, y, z) > \lambda - \Lambda |z|$$

per $|z| < +\infty$ e per tutti i punti $(x, y) \in A$ aventi dalla C_0 una distanza non superiore a ρ .

(4) Pertanto se $a_n = a_0, b_n = b_0$, per $n = 1, 2, \dots$, la convergenza forte di $y_n(x)$ verso $y_0(x)$ non è altro che la convergenza uniforme di $y_n(x)$ verso $y_0(x)$ in (a_0, b_0) , accompagnata dalla convergenza in media (del 1° ordine) di $\{y'_n(x)\}$ verso $y'_0(x)$ nello stesso intervallo.

(5) Adottiamo questa denominazione per distinguere dalla semicontinuità lagrangiana, per la quale si richiede la sola convergenza uniforme, anziché la convergenza in senso forte.

Allora si ha

$$\min \lim I_{C_n} \geq I_{C_0} \quad \text{se } C_0 \in \Omega^{(6)}$$

$$\lim I_{C_n} = +\infty, \quad \text{se } I_{C_0} = +\infty.$$

La dimostrazione segue, salvo alcune varianti, quella del teorema a p. 364 dei *Fondamenti* più volte citati.

Anzitutto, indicato con E_r l'insieme dei punti di (a_0, b_0) nei quali è

$$|y'_0(x)| \leq r$$

con r intero positivo, si ha

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \text{mis } E_r = b_0 - a_0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E_r} f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx = I_{C_0}.$$

Fissiamo un numero $\sigma > 0$, ad arbitrio.

La $f(x, y, z)$, nell'insieme dei punti (x, y, z) con $|z| \leq 2r$ e con $(x, y) \in A$ ed avente da C_0 distanza non superiore a ρ , è una funzione uniformemente continua; perciò esiste un $\eta > 0$ (dipendente da σ e) che possiamo supporre $< \rho$, tale che se

$$a_0 \leq x \leq b_0, \quad |y - \bar{y}| \leq \eta, \quad |z - \bar{z}| \leq \eta$$

si ha

$$(3) \quad |f(x, y, z) - f(x, \bar{y}, \bar{z})| < \sigma.$$

Diciamo $E_{r,n}$ il sottoinsieme di E_r in cui è

$$(4) \quad |y'_n(x) - y'_0(x)| \leq \eta$$

e poniamo

$$E_{r,n}^{(0)} = E_r - E_{r,n}, \quad E_{r,n}^{(n)} = (a_n, b_n) - E_{r,n}.$$

Posto anche, per brevità

$$f_n = f(x, y_n(x), y'_n(x)), \quad f_0 = f(x, y_0(x), y'_0(x)),$$

scriviamo l'identità

$$(5) \quad I_{C_n} - \int_{E_r} f_n dx = \int_{E_{r,n}} \{f_n - f_0\} dx + \int_{E_{r,n}^{(n)}} f_n dx - \int_{E_{r,n}^{(0)}} f_0 dx,$$

e mostriamo che il 2° membro di questa risulta maggiore di $H\sigma$, con H numero non positivo indipendente da n , purché sia n maggiore di un opportuno intero n_0 ; dalla seconda delle (2) seguirà allora l'asserto.

(6) Oppure, ovviamente, se è $I_{C_0} = -\infty$.

Cominciamo dal 1° integrale del 2° membro della (5) ed osserviamo che, per la convergenza uniforme di $y_n(x)$ verso la $y_0(x)$, esiste un intero n_1 tale che per ogni $n > n_1$ si ha

$$|y_n(x) - y_0(x)| \leq \eta \quad ; \quad x \in E_{r,n},$$

e quindi, per la (3), se $n > n_1$ si avrà

$$(6) \quad \int_{E_{r,n}} \{f_n - f_0\} dx \geq - \int_{E_{r,n}} |f_n - f_0| dx \geq - \sigma \operatorname{mis} E_{r,n} > - \sigma (b_0 - a_0).$$

Passiamo a considerare il 2° degli integrali nel 2° membro della (5). Ancora dalla convergenza uniforme di $\{y_n(x)\}$ e dall'essere $\eta < \rho$ segue per la (1) che, se $n > n_1$, vale quasi dappertutto in (a_n, b_n) la

$$f_n > \lambda - \Lambda |y'_n(x)|$$

e di qui, per $n > n_1$, avremo

$$\begin{aligned} \int_{E_{r,n}^{(n)}} f_n dx &> -|\lambda| \operatorname{mis} E_{r,n}^{(n)} - \Lambda \int_{E_{r,n}^{(n)}} |y'_n(x)| dx \geq \\ &\geq -|\lambda| \operatorname{mis} E_{r,n}^{(n)} - \Lambda \int_{E_r} |y'_n(x) - y'_0(x)| dx - \Lambda \int_{E_{r,n}^{(n)}} |y'_0(x)| dx, \end{aligned}$$

intendendo di porre $y'_n(x) = 0$ nei punti di E_r dove $y'_n(x)$ non esiste finita ed in quelli in cui la $y_n(x)$ non è definita.

Dalla convergenza in senso forte di $y_n(x)$ segue

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_r} |y'_n(x) - y'_0(x)| dx = 0,$$

è quindi intanto esiste un intero $n_2 \geq n_1$ tale che per $n > n_2$ si ha

$$\int_{E_{r,n}^{(n)}} f_n dx > -|\lambda| \operatorname{mis} E_{r,n}^{(n)} - \Lambda \sigma - \Lambda \int_{E_{r,n}^{(n)}} |y'_0(x)| dx.$$

In secondo luogo dalla (7) segue, com'è noto, che $\{y'_n(x)\}$ converge in misura verso $y'_0(x)$ in E_r , e quindi

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{mis} E_{r,n} = \operatorname{mis} E_r;$$

perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{mis} E_{r,n}^{(n)} = b_0 - a_0 - \operatorname{mis} E_r,$$

e per la prima delle (2) esisterà un intero $n_3 \geq n_2$ tale che per ogni $n > n_3$ sia

$$\int_{E_{r,n}^{(n)}} f_n dx > -(|\lambda| + \Lambda) \sigma - \Lambda \int_{E_{r,n}^{(n)}} |y'_0(x)| dx.$$

Infine, per l'assoluta continuità dell'integrale ed ancora in virtù della prima delle (2), esisterà un intero $n_4 \geq n_3$ tale che per ogni $n > n_4$ l'ultimo integrale ora scritto sia $< \sigma$; quindi per ogni $n > n_4$ avremo

$$(9) \quad \int_{E_{r,n}^{(n)}} f_n dx > -(|\lambda| + 2\Lambda)\sigma.$$

Passiamo, in ultimo, al 3° integrale del 2° membro della (5) ed osserviamo che, dall'assoluta continuità di $\int_E f_0 dx$ e dalla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mis } E_{r,n}^{(0)} = 0$$

(che deriva dalla (8)), segue l'esistenza di un intero $n_0 \geq n_4$ tale che per ogni $n > n_0$ si ha

$$(10) \quad - \int_{E_{r,n}^{(0)}} f_0 dx > -\sigma.$$

Dalle (5), (6), (9), (10) si ha infine per ogni $n > n_0$

$$I_{C_n} - \int_{\dot{E}_r} f_0 dx > -(b_0 - a_0 + |\lambda| + 2\Lambda + 1)\sigma$$

come si voleva.

4. Dal Lemma ora provato segue l'annunciato criterio di semicontinuità vale a dire il

TEOREMA. - *Se ad ogni sottoinsieme $G \subset A$, chiuso e limitato, si possono associare due numeri λ, Λ , di cui $\Lambda \geq 0$, tali che sia*

$$f(x, y, z) > \lambda - \Lambda |z| \quad , \quad (x, y) \in G \quad , \quad |z| < +\infty,$$

allora I_C è semicontinuo inferiormente in senso debole in Ω (7).

Basta osservare che se C_0 è una qualunque curva di Ω l'insieme dei punti di A aventi dalla C_0 una distanza non maggiore di ρ (comunque sia fissato il numero positivo ρ) è un insieme chiuso e limitato; quindi, qualunque sia la $C_0 \subset \Omega$, sono verificate le ipotesi del Lemma. Dalla dimostrazione fatta è poi evidente che vale anche il

(7) Un'altra conseguenza del Lemma è la seguente: «Se C_0 è una curva soddisfacente le ipotesi del Lemma ed esistono una successione $\{C_n\}$ di curve di Ω , convergente in senso forte verso C_0 ed un numero $H > 0$ tale che sia

$$|I_{C_n}| < H, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

allora $C_0 \in \Omega$, ossia I_{C_0} esiste finito ».

COROLLARIO I. — Se ad ogni sottoinsieme $G \subset A$, chiuso e limitato, si possono associare due numeri λ, Λ , non negativi entrambi, tali che sia

$$|f(x, y, z)| \leq \lambda + \Lambda |z| \quad , \quad (x, y) \in G \quad , \quad |z| < +\infty ,$$

allora I_C è continuo in senso debole in Ω ⁽⁸⁾.

5. In questo numero vogliamo indicare un caso particolare importante del teorema del numero precedente. Dimostriamo perciò il

LEMMA. — Supponiamo che la $f(x, y, z)$, continua rispetto a (x, y, z) ⁽⁹⁾ sia per ogni $(x, y) \in A$ una funzione convessa della variabile z ⁽¹⁰⁾.

Allora ad ogni sottoinsieme $G \subset A$, chiuso e limitato, si può far corrispondere una coppia di numeri λ, Λ , con $\Lambda \geq 0$, tali che sia

$$(II) \quad f(x, y, z) \geq \lambda - \Lambda |z| \quad , \quad (x, y) \in G \quad , \quad |z| < +\infty .$$

Fissiamo due numeri z_1, z_2 e sia ad esempio $z_1 < z_2$. Sia poi G un arbitrario sottoinsieme chiuso e limitato di A . Posto

$$\lambda_1 = \text{extr. inf. } f(x, y, z) \quad , \quad (x, y) \in G \quad , \quad z_1 \leq z \leq z_2 ,$$

è per ipotesi $\lambda_1 > -\infty$ e si ha

$$(12) \quad f(x, y, z) \geq \lambda_1 \quad , \quad (x, y) \in G \quad , \quad z_1 \leq z \leq z_2 .$$

Posto ancora

$$R(x, y) = \frac{f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1)}{z_2 - z_1} ,$$

ed anche

$$\Lambda = \text{extr. sup. } |R(x, y)| \quad , \quad (x, y) \in G$$

$$\lambda_2 = \text{extr. inf. } f(x, y, z_1) \quad , \quad (x, y) \in G ,$$

si ha, per la convessità della f , se $z \geq z_2$, oppure se $z \leq z_1$:

$$(13) \quad f(x, y, z) \geq f(x, y, z_1) - R(x, y) z_1 + R(x, y) z \geq \lambda_2 - \Lambda |z_1| - \Lambda |z| .$$

Da (12) e (13) segue la (II).

Dal Lemma ora provato si ha subito il

COROLLARIO 2. — Se $f(x, y, z)$ è per ogni $(x, y) \in A$ una funzione convessa della variabile z , allora I_C è semicontinuo inferiormente in senso debole in Ω .

(8) Ossia, per ogni successione $\{C_n\}$ di curve di Ω convergente in senso forte verso una qualunque $C_0 \in \Omega$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{C_n} = I_{C_0}$.

(9) Sarebbe sufficiente ammettere che $f(x, y, z)$ risulti limitata in ogni sottoinsieme limitato e chiuso dell'insieme: $(x, y) \in A, |z| < +\infty$.

(10) Ricordiamo che una funzione $\varphi(x)$ definita in un intervallo (a, b) si dice convessa (secondo J. L. W. V. JENSEN, o, secondo altri, concava verso l'alto) se si ha

$$\varphi(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) \leq \varphi(x_1) + \lambda[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] ,$$

per ogni coppia x_1, x_2 di valori della x e per ogni $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Ciò può enunciarsi anche dicendo: « Condizione sufficiente perchè I_C sia semicontinuo inferiormente in senso debole in Ω è che I_C sia *quasi regolare positivo* » ⁽¹¹⁾.

È noto che l'essere I_C « quasi regolare positivo » non è sufficiente invece ad assicurare la semicontinuità lagrangiana (in Ω e neppure) in Ω^* ⁽¹²⁾.

Si ha pure, dal Corollario 1, il

COROLLARIO 3. - Se è

$$f(x, y, z) = P(x, y) + Q(x, y)z$$

(con $P(x, y)$, $Q(x, y)$ funzioni continue in A) allora I_C è continuo in senso debole in Ω .

È noto, invece, che per assicurare la continuità lagrangiana in Ω^* dell'integrale occorre qualche altra ipotesi, oltre la continuità della $Q(x, y)$ ⁽¹³⁾.

6. Sia $\{C_n\}$ una successione di curve assolutamente continue

$$C_n: \quad y = y_n(x) \quad , \quad a_n \leq x \leq b_n$$

di lunghezza L_n , uniformemente convergente (nel senso già specificato) verso la curva assolutamente continua

$$C_0: \quad y = y_0(x) \quad , \quad a_0 \leq x \leq b_0$$

di lunghezza L_0 . Allora se

$$(') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b'_n} |y'_n(x) - y'_0(x)| dx = 0$$

(dove (a'_n, b'_n) ha il significato già specificato) è anche

$$('') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L_0$$

e inversamente ⁽¹⁴⁾.

Segue di qui che in Ω^* la semicontinuità (e la continuità) in senso debole equivalgono alla semicontinuità (ed alla continuità) « in lunghezza » e pertanto, nell'insieme Ω^* , i risultati del n. 4 sono sostanzialmente noti ⁽¹⁵⁾.

Però l'equivalenza fra i due tipi di convergenza (« forte » e « in lunghezza ») non sussiste più fuori del campo delle curve assolutamente continue, come mostrano semplici esempi.

(11) Secondo la terminologia adottata in L. TONELLI, *Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni, in forma ordinaria*. « Ann. della S.N.S. di Pisa » (2), 3, pp. 401-450 (1934).

(12) Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti*, vol. 1º, p. 391.

(13) Per una condizione sufficiente assai generale cfr. G. DARBO, *Sulle condizioni sufficienti per la continuità di un integrale*. « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », XXII, pp. 134-142 (1953).

(14) Ved. L. TONELLI, *Fondamenti*, vol. 1º, p. 186 e p. 189.

(15) Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti*, vol. 1º, p. 364.

Meccanica. — *Successiva linearizzazione delle ultime equazioni del campo unitario einsteiniano.* Nota^(*) di PAOLO UDESCHINI, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

Nella più recente edizione, apparsa qualche mese fa, del libro *The Meaning of Relativity*⁽¹⁾ Einstein dà una nuova perfezionata formulazione delle equazioni del campo unitario nella teoria relativistica, modificando alcune equazioni della precedente formulazione del 1950, che a sua volta conclude le ricerche iniziate nel 1945.

Riferendomi alla versione einsteiniana del 1950, in alcune Note⁽²⁾ ho dato le equazioni di prima e di seconda approssimazione, mettendo in particolare evidenza le mutue azioni fra i due campi fondamentali: quello gravitazionale e quello elettromagnetico.

In questa Nota metto a confronto i precedenti risultati con quelli che si deducono, nelle stesse approssimazioni, dall'ultima versione einsteiniana della teoria del campo unitario.

In prima approssimazione il campo gravitazionale si separa da quello elettromagnetico, come nella precedente teoria, nel senso che le equazioni del campo unitario si scindono in due gruppi distinti contenenti: l'uno soltanto le funzioni riguardanti il campo gravitazionale, l'altro quelle riguardanti il campo elettromagnetico. Per quanto riguarda la gravitazione le equazioni sono ancora quelle della precedente teoria, modificate risultano invece alcune equazioni relative al campo elettromagnetico.

In seconda approssimazione, come nella precedente teoria, le equazioni del campo unitario non si scindono più in due gruppi distinti e manifesta risulta l'interazione fra i due campi fondamentali: il campo elettromagnetico influisce su quello gravitazionale e viceversa. Le equazioni che danno le parti di secondo ordine del tensore fondamentale (che con la sua parte simmetrica individua il campo gravitazionale e con quella emisimmetrica individua il campo elettromagnetico) sono formate da due gruppi riguardanti separatamente la determinazione delle parti di secondo ordine dei due campi fondamentali, quando siano note dalla prima approssimazione le parti di primo ordine di entrambi i campi.

Per quanto riguarda la determinazione del campo gravitazionale in seconda approssimazione, le equazioni sono formalmente quelle stesse che

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1953.

(1) EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, Princeton (1953).

(2) P. UDESCHINI, *Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein*. Questi « Rendiconti », vol. IX (1950); *Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein*, Note I e II. Questi « Rendiconti », vol. X (1951); *Sulle mutue azioni fra campo gravitazionale e campo elettromagnetico*. Questi « Rendiconti », vol. X (1951).

si ottengono dalla teoria del 1950, quindi tutti i risultati stabiliti nelle mie Note, che a tale teoria si riferiscono, con particolare riguardo all'influenza di un campo elettromagnetico su quello gravitazionale, conservano la loro validità anche nell'ultima versione della teoria unitaria.

Per quanto riguarda la determinazione del campo elettromagnetico, anche in seconda approssimazione, alcune delle nuove equazioni differiscono da quelle stabilite nelle mie Note citate.

Come si è passati dalla prima alla seconda approssimazione, si può estendere il processo di successiva linearizzazione, passando ad una terza approssimazione e così via. Le equazioni risultano di tipo ricorrente.

1. EQUAZIONI DEL CAMPO UNITARIO. - Nella teoria relativistica del campo unitario lo spazio-tempo è un continuo quadridimensionale non riemanniano, la sua geometria è individuata da un tensore doppio non simmetrico $g_{ik} = g_{ik} + g_{ik}$. La parte simmetrica g_{ik} è la sola che interviene nella metrica $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ ⁽³⁾ (x^0 è la coordinata temporale e x^1, x^2, x^3 le tre coordinate spaziali) ed è atta ad individuare il campo gravitazionale. La parte emisimmetrica g_{ik} individua il campo elettromagnetico, perché il tensore coniugato di g_{ik} è il tensore elettromagnetico.

I coefficienti di connessione $\Gamma_{(ik)}^l$ non sono simmetrici rispetto ai due indici i, k (fra parentesi), non costituiscono un tensore, la parte emisimmetrica Γ_{ik}^l costituisce un tensore emisimmetrico. Questi coefficienti di connessione sono definiti in modo che sia nullo il derivato del tensore fondamentale, quando si derivi rispettando l'ordine degli indici, come è indicato nella relazione:

$$(1) \quad g_{ik;l} = g_{ik,l} - g_{is} \Gamma_{(lk)}^s - g_{sk} \Gamma_{(il)}^s = 0 \quad (i, k, l = 0, 1, 2, 3).$$

Con i coefficienti di connessione si costruisce il tensore contratto di curvatura non simmetrico

$$(2) \quad R_{ik} = [\Gamma_{(ik)s}^s - \Gamma_{(is)}^s \Gamma_{(tk)}^s] - [\Gamma_{(is),k}^s - \Gamma_{(ik)}^s \Gamma_{(ts)}^s].$$

Le equazioni date da Einstein per il campo unitario nell'ultima versione sono le seguenti ⁽⁴⁾ (4):

$$(3) \quad \begin{cases} g_{ik;l} = 0 & , & \Gamma_{is}^s = 0 \\ R_{ik} = 0 & , & R_{ik,l} + R_{li,k} + R_{kl,i} = 0. \end{cases}$$

(3) Gli indici assumono d'ordinario i valori 0, 1, 2, 3, la virgola precedente indici è simbolo di derivazione ordinaria, mentre il punto e virgola è simbolo di derivazione tensoriale. Si sottintende il segno di sommatoria quando si satura un indice posto in basso con uno in alto dello stesso nome.

(4) B. FINZI, *Sulle equazioni di campo della teoria relativistica unitaria di Einstein*. Questi « Rendiconti », vol. XIV (1953).

Il quadro delle equazioni (3) differisce da quello dato nel 1950 per la sostituzione dell'ultima delle (3), che esprime l'annullarsi del rotore di R_{ik} , alla relazione $R_{ik} = 0$ della precedente versione.

Le (3) costituiscono un sistema di 82 equazioni in 80 incognite, i 64 coefficienti di connessione e le 16 componenti del tensore fondamentale g_{ik} . Fra queste equazioni Einstein stabilisce alcune identità: due fra le 8 equazioni $\Gamma_i = 0$ e $R_{ik,l} + R_{li,k} + R_{kl,i} = 0$, oltre a quattro identità che generalizzano le note identità di Bianchi.

Dalle prime due relazioni (3) scende l'annullarsi del rotore del tensore elettromagnetico $^{(2)} \epsilon^{ikrs} * g_{rs,k} = 0$, dove $*g^{ik} = \epsilon^{ikrs} g_{rs}$, coniugato di g_{ik} , è il tensore elettromagnetico ed ϵ^{ikrs} è il tensore di Ricci nello spazio-tempo, tensore che ha derivato tensoriale (con indici affetti dallo stesso segno) nullo $^{(5)}$.

Il vettore distribuzione elettrica \mathfrak{J}^a ($a = 0, 1, 2, 3$) (quadrivettore) $\mathfrak{J}^a = \frac{1}{2} \epsilon^{akrs} g_{rs,k} = *g_{rs}^a$ è espresso dalla metà del rotore di g_{rs} o, ciò che è lo stesso, dalla divergenza neutra del tensore elettromagnetico, costruita cioè con la parte simmetrica dei coefficienti di connessione. La divergenza del vettore \mathfrak{J}^a è identicamente nulla conformemente alla legge di conservazione dell'elettricità.

2. EQUAZIONI DI PRIMA APPROSSIMAZIONE. - Scegliendo opportunamente il riferimento spazio-temporale, poniamo in prima approssimazione il tensore fondamentale g_{ik} nella forma: $g_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$, dove $a_{ik} = 1$ per $i = k = 0$, $a_{ik} = -1$ per $i = k = 1, 2, 3$, $a_{ik} = 0$ per $i \neq k$, e il tensore $b_{ik} = b_{ik} + \tilde{b}_{ik}$ è piccolo di prim'ordine rispetto ad a_{ik} . Dalla prima delle (3) si calcolano i coefficienti di connessione $\Gamma_{(ik)}^l$ $^{(6)}$ cosicché la seconda delle (3) diviene:

$$(4) \quad b_{is,s} = 0.$$

Le rimanenti equazioni di campo (3), involgenti il tensore R_{ik} , diventano:

$$(5) \quad \square b_{ik} = 0, \quad \square \epsilon^{arik} b_{ik,r} = 0.$$

dove \square è l'ordinario operatore di d'Alembert e il riferimento è tale che risulti $b_{ir,r} - b_{,i} = 0$, dove $b = b_{ik} a^{ik}$.

(5) M. PASTORI, *Sulle equazioni del campo elettromagnetico nell'ultima teoria di Einstein*. Questi « Rendiconti », vol. XII (1952).

(6) Per la determinazione dei coefficienti di connessione cfr. V. HLAVATY, *The elementary basic principles of the unified theory of relativity*. « Journal of Rational Mech. and An. », vol. II, n. 1 (1953); « Proceedings of the Nat. Acad. of Sciences », vol. 38, n. 3 (1952); *The Einstein connection of the unified theory of relativity* « Proceedings of the Nat. Acad. of Sciences », vol. 38, n. 5 (1952).

Le (5) e le (4) sono le equazioni di prima approssimazione relative al tensore fondamentale. Esse differiscono dalle corrispondenti del 1950 soltanto per l'ultima delle (5), che sostituisce la precedente relazione $\square \hat{b}_{ik} = 0$, e tale differenza si riflette soltanto sul campo elettromagnetico. L'equazione modificata coincide formalmente con quella relativa alla ricerca preliminare di Einstein e Straus del 1946 ⁽⁷⁾. Le equazioni si scindono ancora in due gruppi distinti, riguardanti ciascuno, uno dei due campi fondamentali. Per quanto riguarda il campo gravitazionale, retto dalla prima delle (5), vale quanto detto nelle precedenti Note citate ⁽²⁾, cioè valgono tutti i risultati della relatività generale di prima approssimazione.

Per quanto riguarda il campo elettromagnetico, introducendo il tensore elettromagnetico $*g_{ik}$, quindi in prima approssimazione $*\hat{b}_{ik}$, la (4) e la seconda delle (5) diventano:

$$(6) \quad \varepsilon^{arik} * \hat{b}_{ik,r} = 0, \quad \square \operatorname{div} * \hat{b}_{ik} = 0.$$

La prima delle (6) è l'equazione di Maxwell ed esprime che il tensore elettromagnetico è irrotazionale (come nella formulazione del 1950). La seconda, tenendo presente che nell'approssimazione considerata $\mathfrak{A} = \operatorname{div} * \hat{b}_{ik} = = \frac{1}{2} \varepsilon^{arik} \hat{b}_{ik,r}$, esprime l'annullarsi del d'Alembertiano del vettore quadricorrente \mathfrak{A} .

Dunque le equazioni di prima approssimazione riguardanti il campo elettromagnetico sono quelle maxwelliane di un campo in cui il vettore che dà la distribuzione elettrica è soluzione dell'equazione di d'Alembert. Nella precedente formulazione (del 1950) le equazioni riguardanti il campo elettromagnetico erano quelle maxwelliane di un campo il cui vettore quadricorrente è gradiente di uno scalare soluzione dell'equazione di d'Alembert ⁽⁸⁾.

3. EQUAZIONI DI SECONDA APPROSSIMAZIONE. - In seconda approssimazione poniamo: $g_{ik} = a_{ik} + \hat{b}_{ik} + c_{ik}$ dove a_{ik} è noto, \hat{b}_{ik} è pure supposto noto dalla prima approssimazione, e c_{ik} sono i divari di second'ordine del tensore fondamentale rispetto ai termini di prim'ordine \hat{b}_{ik} . Poniamo ancora $\Gamma'_{(ik)} = L'_{(ik)} + M'_{(ik)}$, dove $L'_{(ik)}$ sono pure supposti noti di prima approssimazione ed $M'_{(ik)}$ sono i divari di second'ordine dei coefficienti di connessione rispetto ai termini di prim'ordine $L'_{(ik)}$ calcolati precedentemente.

(7) EINSTEIN e STRAUS, « Ann. of Math. », vol. 47 (1946). Cfr. anche SCHRÖDINGER, « Proc. R. Irish. Ac. », 51 (1947); 51 (1948); 52 (1948); PAPAPETROU, « Proc. R. Irish. Ac. », 52 (1948). « Phys. Rev. », 73 (1948); TAKENO, IKEDA, ABE, « Progr. Theor. Phys. Osaka », 6 (1951). IKEDA, « Progr. Theor. Phys. Osaka », 7 (1952).

(8) Infatti le equazioni di prima erano le (4) unitamente alle $\square \hat{b}_{ik} = 0$ e da esse scendeva $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$, quindi $\mathfrak{A} = \Phi^a$ con lo scalare Φ soluzione dell'equazione $\square \Phi = 0$, in virtù dell'equazione di conservazione $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$. Nella versione del 1950 dall'essere $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$ e $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ scendeva $\square \mathfrak{A} = 0$. Anche nella nuova versione è $\square \mathfrak{A} = 0$ e $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$. Ma da queste condizioni non discende, in generale, $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$ e conseguentemente $\mathfrak{A} = \Phi^a$.

Poniamo infine $\mathfrak{J}^\alpha = \mathfrak{J}_{(1)}^\alpha + \mathfrak{J}_{(2)}^\alpha$ dove $\mathfrak{J}_{(2)}^\alpha$ è di second'ordine rispetto al termine di prim'ordine $\mathfrak{J}_{(1)}^\alpha$ noto dalla prima approssimazione.

Trascurando i termini d'ordine superiore al secondo, si calcolano dalla prima delle (3) le parti $M_{(ik)}^l$ dei coefficienti di connessione e la seconda delle (3) diviene:

$$(7) \quad c_{is, \underset{\vee}{s}}^s = N_i \text{ con } N_i = b_{\underset{\vee}{ir}, s}^{rs} + b_{\underset{\vee}{ir}, s}^{rs} + b_{\underset{\vee}{is}} \left(b_{\underset{\vee}{r}, r}^{sr} - \frac{1}{2} b_{\underset{\vee}{s}}^{rs} \right).$$

Le componenti del tensore R_{ik} sono:

$$(8) \quad \begin{cases} R_{ik} = \frac{1}{2} \left(c_{is, \underset{\vee}{s}}^s - \frac{1}{2} c_{i, \underset{\vee}{k}} \right)_{, k} + \frac{1}{2} \left(c_{ks, \underset{\vee}{s}}^s - \frac{1}{2} c_{k, \underset{\vee}{i}} \right)_{, i} - \frac{1}{2} c_{ki, \underset{\vee}{s}}^s + \frac{1}{2} B_{ki} \\ R_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2} b_{\underset{\vee}{ik}, s}^s + \frac{1}{2} c_{\underset{\vee}{ik}, s}^s - \frac{1}{2} B_{\underset{\vee}{ik}} \end{cases}$$

dove $c = c_{ik} a^{ik}$ e

$$(9) \quad \begin{cases} B_{ki} = 2 a^{ls} (b_{\underset{\vee}{rs}} L_{\underset{\vee}{li}}^r + b_{\underset{\vee}{ri}} L_{\underset{\vee}{ls}}^r + b_{\underset{\vee}{lr}} L_{\underset{\vee}{ci}}^r)_{, k} - 2 a^{ls} (b_{\underset{\vee}{ri}} L_{\underset{\vee}{lk}}^r + b_{\underset{\vee}{rk}} L_{\underset{\vee}{li}}^r + \\ \quad + b_{\underset{\vee}{lr}} L_{\underset{\vee}{ki}}^r)_{, s} - 2 L_{\underset{\vee}{il}}^s L_{\underset{\vee}{sk}}^t - 2 L_{\underset{\vee}{it}}^s L_{\underset{\vee}{sk}}^t + 2 L_{\underset{\vee}{ik}}^t L_{\underset{\vee}{ls}}^s \\ B_{\underset{\vee}{ik}} = 2 L_{\underset{\vee}{il}}^s L_{\underset{\vee}{sk}}^t + 2 L_{\underset{\vee}{il}}^s L_{\underset{\vee}{sk}}^t - 2 L_{\underset{\vee}{ik}}^t L_{\underset{\vee}{ls}}^s. \end{cases}$$

Grazie a (8) le rimanenti equazioni del campo diventano:

$$(10) \quad \square c_{ik} = B_{ik} \quad , \quad \square \varepsilon^{\alpha rik} c_{\underset{\vee}{ik}, r} = \varepsilon^{\alpha rik} B_{\underset{\vee}{ik}, r}$$

dove il secondo membro della seconda delle (10) ha la seguente forma esplicita:

$$\varepsilon^{\alpha rik} \left[2 b_{\underset{\vee}{i}, s}^{sr} b_{\underset{\vee}{rk}, s}^s + 2 b_{\underset{\vee}{i}, s}^{sr} b_{\underset{\vee}{rk}, s}^s - b_{\underset{\vee}{l}, s}^r b_{\underset{\vee}{rk}, i}^r + \frac{1}{2} b_{\underset{\vee}{l}, s}^r b_{\underset{\vee}{ki}, r}^r + \frac{1}{2} b_{\underset{\vee}{l}, s}^r b_{\underset{\vee}{ki}, r}^r \right].$$

La prima delle (10) assume la forma indicata, specificando il riferimento in modo che risulti $c_{lr, r}^r - c_{l, r} = 0$, ed in entrambe le (10) i secondi membri sono da ritenersi noti dalla prima approssimazione.

Nell'approssimazione considerata le equazioni di campo, atte a determinare le parti di second'ordine $c_{ik} = c_{ik} + c_{\underset{\vee}{ik}}$ del tensore fondamentale, sono dunque le (7) e le (10), esse mostrano come i due campi fondamentali siano intrecciati fra loro, lasciando prevedere come un campo elettromagnetico influisca su quello gravitazionale e viceversa.

La prima delle (10) riguarda la determinazione del campo gravitazionale ed afferma che il d'Alembertiano della parte di second'ordine del tensore g_{ik} , che individua il campo gravitazionale, è funzione conosciuta dei termini di prim'ordine di entrambi i campi. Essa non differisce dalla corrispondente equazione della precedente teoria (può infatti dedursi facilmente prendendo la parte simmetrica della (11) della mia Nota II citata ⁽²⁾), quindi per quanto riguarda la determinazione del campo gravitazionale vale ancora

quanto detto nelle mie Note citate. Ciò dicasi sia riguardo alla velocità della luce nel campo unitario statico, come pure riguardo all'azione del campo elettromagnetico su quello gravitazionale, nonché, in particolare, riguardo allo spostamento delle righe spettrali per effetto gravitazionale di un campo magnetico elementare ⁽⁹⁾.

La seconda delle (10) e la (7) permettono la determinazione delle parti di second'ordine del tensore che individua il campo elettromagnetico, quando siano noti entrambi i campi di primo ordine. La (7) non differisce dalla corrispondente equazione data nelle precedenti Note ⁽²⁾, ne differisce invece la seconda delle (10) che esprime il d'Alembertiano del rotore di c_{ik} (anziché il d'Alembertiano di c_{ik}) come funzione conosciuta delle parti di prim'ordine del tensore fondamentale g_{ik} . Manifestamente quanto detto nelle precedenti Note circa la prima equazione conserva la sua validità, non solo, ma anche tenendo conto della seconda delle (10), conserva la sua validità quanto detto a proposito della mancanza di una nuova influenza di un campo gravitazionale di primo ordine su di un campo elettromagnetico di secondo ordine. Infatti, ritenendo $b_{ik} = 0$ e $c_{ik} = 0$, le equazioni del campo elettromagnetico si separano da quelle del campo gravitazionale. Queste ultime coincidono con quelle precedentemente stabilite, mentre per quanto riguarda il campo elettromagnetico la nuova equazione $\square \varepsilon^{\alpha r ik} c_{ik,r} = 0$ va sostituita alla precedente $\square c_{ik} = 0$.

Osservo che la (4), riguardante la prima approssimazione, e la (7) riguardante la seconda approssimazione, traducono l'annullarsi del vettore Γ_i in prima e seconda approssimazione. Esse esprimono quindi anche che la equazione di Maxwell $\text{rot } *g_{ik} = 0$ è verificata nell'approssimazione considerata ⁽¹⁰⁾.

Dunque le equazioni (6), (7) e la seconda delle (10) riguardanti la determinazione delle parti di primo e second'ordine del tensore elettromagnetico esprimono: I° è verificata, come in generale, l'equazione di Maxwell che vuole il tensore elettromagnetico irrotazionale; II° nell'approssimazione considerata, il vettore distribuzione elettrica ubbidisce alle equazioni $\square \mathfrak{A}_{(1)}^{\alpha} = 0$, $\square \mathfrak{A}_{(2)}^{\alpha} = K^{\alpha}$, dove $2K^{\alpha}$ è il secondo membro della seconda delle (10) ed è una funzione nota del tensore fondamentale di prim'ordine.

(9) P. UDESCHINI, *Spostamento delle righe spettrali per effetto di un campo magnetico elementare nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein*. « Ist. Lomb. », vol. LXXXV (1952).

(10) Si può anche constatare materialmente tale fatto con alcuni calcoli:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ikr\alpha} *g_{ik,r} &= 2g_{\alpha\gamma}^{\gamma} + 2g_{\alpha\gamma}^{\gamma} \Gamma_{(rr)}^{\gamma} = \\ &= 2a^{\frac{1}{2}} \left[b_{\alpha\gamma}^{\gamma} - c_{\alpha\gamma}^{\gamma} + b_{\alpha\gamma}^{\gamma} + b_{\alpha\gamma}^{\gamma} + b_{\alpha\gamma}^{\gamma} + b_{\alpha\gamma}^{\gamma} \left(b_{\alpha\gamma}^{\gamma} - \frac{1}{2} b_{\alpha\gamma}^{\gamma} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

e l'espressione fra parentesi quadra si annulla precisamente in virtù della (4) e della (7).

Meccanica. — *Una particolare soluzione delle equazioni einsteiniane della relatività unitaria.* Nota (*) di EMILIO CLAUSER, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

Si risolvono le equazioni della teoria unitaria di Einstein supponendo che per un osservatore O:

a) il tensore fondamentale (asimmetrico) g_{ik} dipende soltanto da una coordinata geodetica spaziale x_i ;

b) la metrica è statica, e, se x_4 è la coordinata temporale, ha la forma:

$$(I) \quad ds^2 = \gamma(x_i) dx_i^2 - dt^2 = c^2 \gamma dt^2 - [dx_1^2 + \beta(x_i) dx_2^2 + \delta(x_i) dx_3^2] \quad (1);$$

c) il campo elettromagnetico, quando non è nullo, è magnetostatico con vettore \mathbf{H} diretto secondo le geodetiche x_i (2).

Si trovano allora i casi seguenti:

I) spazio-tempo non riemanniano (a metrica non pseudopitagorica) dipendente da H, che risulta costante, e da un parametro, determinabile sperimentalmente, per il quale dl^2 può anche essere euclideo;

II) spazio-tempo riemanniano (quando H è nullo), già assegnato da Levi-Civita quale analogo del potenziale newtoniano in regioni esterne a materia distribuita omogeneamente, in un cilindro indefinito o lungo un asse (3);

III) spazio-tempo pseudoeuclideo con tre sottocasi:

1° $\mathbf{H} = 0$ e metrica in forma pseudopitagorica;

2° $\mathbf{H} = \text{cost.} \neq 0$ e metrica in forma pseudopitagorica;

3° $\mathbf{H} = \text{cost.} \neq 0$ e metrica riferita ad un osservatore in moto traslatorio rettilineo uniformemente accelerato nella direzione di \mathbf{H} rispetto ad un osservatore inerziale \bar{O} (a meno di trasformazioni di Lorentz nella direzione di \mathbf{H} e nelle due ad essa ortogonali). Per \bar{O} il campo è quindi variabile ed il vettore elettrico può anche essere non nullo.

Il sottocaso 1° del caso III) conviene all'assenza totale di materia e di campo elettromagnetico, il caso II) alla presenza di sola materia ed in regioni vuote: entrambi sono noti dalla relatività generale; i sottocasi 2° e 3° del caso III) sembrano convenire alla presenza di solo campo elettromagnetico; il caso I) conviene alla presenza di materia e di campo.

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1953.

(1) c è la velocità della luce nello spazio totalmente vuoto rispetto ad un osservatore inerziale. Per la (1) B. FINZI-M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna (1949), cap. X, par. 7.

(2) Loco cit. in (*), cap. VII, par. 3. H indicherà poi il modulo di \mathbf{H} .

(3) T. LEVI-CIVITA, in questi « Rendiconti », Nota IX, vol. XXVIII, 1919. Essa è poi unica, perché l'ipotesi di Levi Civita $ds^2 = V_0^2 e^{2v} dt^2 - e^{-2v} (d\sigma^2 + r^2 dx_3^2)$ ove V_0 è costante, $d\sigma$ è l'elemento lineare binario della superficie $x_3 = \text{cost.}$, $t = \text{cost.}$ che al pari di v dipende dalla sola r , è meno restrittiva delle a) e b) e compatibile con quelle.

I. LE EQUAZIONI DEL CAMPO UNITARIO. - Nell'odierna formulazione e per spazi vuoti di materia esse sono ⁽⁴⁾:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2) \ R_{ik} = 0; \quad (3) \ R_{ik,l} + R_{kl,i} + R_{li,k} = 0; \quad (4) \ \Gamma_i \equiv \Gamma_{ii}^i = 0 \quad \text{con} \\ (5) \ 2 R_{ik} = 2 \Gamma_{ik}^s, s - (\Gamma_{is}^s k + \Gamma_{ks}^s i) + 2 \Gamma_{ik}^s \Gamma_{st}^t - 2 \Gamma_{it}^s \Gamma_{sk}^t \quad \text{e} \\ (6) \ g_{ik;l} \equiv g_{ik,l} - g_{sk} \Gamma_{il}^s - g_{is} \Gamma_{lk}^s = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3, 4). \end{array} \right.$$

In (I) Γ_{ik}^s sono i coefficienti di connessione e R_{ik} è il tensore contratto di curvatura ⁽⁴⁾. Nell'ipotesi addizionale $g = \|g_{ik}\| < 0$, implicita nell'algoritmo della teoria ^{(4) e (5)}, tutte le componenti di g_{ik} sono nulle meno eventualmente

$$(7) \quad g_{14} = w(x_1) \quad (6).$$

La (6) determina allora univocamente i coefficienti di connessione ⁽⁷⁾; quelli non nulli sono:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \Gamma_{22}^1 = -\beta' \quad ; \quad 2 \Gamma_{33}^1 = -\delta' \quad ; \quad \Gamma_{44}^1 = \gamma \Gamma_{14}^4 + w \Gamma_{14}^1 \quad ; \\ 2 \Gamma_{14}^1 = (w\gamma' - 2\gamma w')(\gamma - w^2)^{-1} \quad ; \quad 2 \Gamma_{12}^2 = \beta' \beta^{-1} \quad ; \quad 2 \Gamma_{24}^2 = -\beta' \beta^{-1} w \quad ; \\ 2 \Gamma_{13}^3 = \delta' \delta^{-1} \quad ; \quad 2 \Gamma_{34}^3 = -\delta' \delta^{-1} w \quad ; \quad 2 \Gamma_{14}^4 = [\log(\gamma - w^2)]'. \end{array} \right.$$

Per la (I) e la (7), essendo $g < 0$, è poi:

$$(8) \quad -g = \beta \delta (\gamma - w^2) > 0, \quad (9) \quad (\gamma - w^2) > 0.$$

La (4) diventa per (II):

$$(10) \quad \Gamma_4 \equiv \Gamma_{14}^1 + \Gamma_{24}^2 + \Gamma_{34}^3 = 0;$$

integrando l'equazione

$$(\mathcal{G}^1_4)' = -[w(\beta\delta)^{1/2}(\gamma - w^2)^{-1/2}]' = 0,$$

(4) A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, 4^a ed., Princeton (1953), Appendix II. Le notazioni sono quelle dei lochi già citati. Inoltre un accento in alto indicherà derivazione ordinaria rispetto ad x_1 .

(5) A. EINSTEIN, ibidem, 3^a ed. (1950), trad. it. Einaudi Editore.

(6) Infatti se ϵ_{ikrs} è il tensore di Ricci nello spazio-tempo, il tensore elettromagnetico F_{ik} si esprime così: $F_{ik} = F_{ki} - g_{ik}^s \frac{1}{2} \epsilon_{ikrs} g_{st}^r$ (P. UDESCHINI, in questi « Rendiconti », vol. IX, 1950). L'unica componente non nulla di F_{ik} è allora, per c), $H_1 = F_{23} = g_{23}^s \epsilon_{s14} g_{14}^1 = \sqrt{-g} g_{14}^1 = \mathcal{G}^1_4$. Si constata l'asserzione esprimendo i g_{ik}^s per i g_{ik}^s .

(7) Se ne facilita la risoluzione spezzando la (6) nella parte simmetrica ed emisimmetrica; il sistema si scinde in sistemi parziali, alcuni dei quali omogenei; tutti risultano ad unica soluzione essendo $g < 0$.

ad essa equivalente ⁽⁸⁾, si ha:

$$(11) \quad w(\beta\delta)^{1/2}(\gamma - w^2)^{-1/2} = \lambda = \text{cost.} \neq 0 \quad \text{per } H \neq 0.$$

Per le (5) e per (II) le (3) sono identità e le (2) diventano:

$$(III) \quad \begin{cases} (12) \quad R_{22} = (\Gamma_{22}^1)' + \Gamma_{22}^1 (-\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4) = 0 \\ (13) \quad R_{33} = (\Gamma_{33}^1)' + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4) = 0 \\ (14) \quad R_{44} = (\Gamma_{44}^1)' + \Gamma_{44}^1 (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{14}^4) + (\Gamma_{14}^1)^2 + (\Gamma_{24}^2)^2 + (\Gamma_{34}^3)^2 = 0 \\ (15) \quad R_{11} = (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4)' + (\Gamma_{12}^2)^2 + (\Gamma_{13}^3)^2 + (\Gamma_{14}^4)^2 = 0. \end{cases}$$

Distinguiamo nell'integrazione di (III) i casi seguenti:

I° caso: almeno uno dei coefficienti β e δ non è costante e questo caso lo distinguiamo in due sottocasi: I_a° $\beta' \delta' \neq 0$, I_b° $\delta' \neq 0$ e $\beta' = 0$ (o viceversa);

II° caso: $g_{14} \equiv 0$ (caso puramente gravitazionale di Levi-Civita);

III° caso: $\beta' = 0$, $\delta' = 0$, distinto nei tre sottocasi citati all'inizio.

2. INTEGRAZIONE DI (III) NEL SOTTOCASO I_a°. - Sottraendo la (13) dalla (12) ed integrando, si ha, essendo $\beta' \delta' \neq 0$,

$$(16) \quad \beta = k_2 \delta^{k_1} \quad \text{con le costanti} \quad (17) \quad k_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad (18) \quad k_2 > 0.$$

Sommando la (13) con la (12) ed integrando, si ha per la (16)

$$(19) \quad \gamma - w^2 = k_3 (k_1 k_2)^{-1} \delta^{1-k_1} (\delta')^{-2}$$

ove per la (9) e per la (18) la costante $k_1^{-1} k_3$ è positiva:

$$(20) \quad k_1^{-1} k_3 > 0.$$

Dalla (11) si ha quindi per la (19), per la (20) e per la (18):

$$(21) \quad w = \varepsilon \lambda k_2^{-1} (k_1^{-1} k_3)^{1/2} \delta^{-k_1} (\delta')^{-1} \quad \text{ove} \quad (22) \quad \varepsilon = \pm 1, \varepsilon \delta' > 0 \quad (9).$$

Dalla (19) e dalla (21) si ha infine:

$$(23) \quad \gamma = k_3 (k_1 k_2^2)^{-1} \delta^{-2k_1} (\delta')^{-2} (\lambda^2 + \delta^{k_1+1}).$$

(8) Infatti dalla (1), essendo $g_{14} \neq 0$, si ha $g^{i4} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) e per la (9) $g^{44} = (\gamma - w^2)^{-1} > 0$, l'identità $\mathfrak{G}_{\nu}^{is}, s = \mathfrak{G}^{is} \Gamma_s$ (lochi cit. in (4) e (5)) diviene per (6) $\mathfrak{G}_{\nu}^{41}, 1 = \mathfrak{G}^{44} \Gamma_4$.

(9) δ' ha sempre uno stesso segno essendo funzione continua per la (13) e non nulla in questo sottocaso.

Integriamo l'equazione lineare (14) tenendo conto delle precedenti. Se

$$(24) \quad \mathfrak{f} = k_1 + 1, \quad (25) \quad \mathfrak{R} = (k_1^2 + k_1 + 1)^{-1} = (\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f} + 1)^{-1} \quad \text{e} \quad (26) \quad \mathfrak{f} \neq 0$$

si ha:

$$(27) \quad \Gamma_{44}^1 = k_3 \lambda^2 [2 k_2^2 \mathfrak{f} (\mathfrak{f} - 1) \mathfrak{R} \delta' \delta^{2\mathfrak{f}-1}]^{-1} + \varepsilon k_4 (\delta' \delta^{\mathfrak{f}-1})^{-1}$$

con k_4 costante arbitraria. Identificando la (27) con la terza di (II) e poi integrando, si ha:

$$(28) \quad \delta' = f(\delta) = \varepsilon k_5 \delta^L (\lambda^2 + k_2 \delta^{\mathfrak{f}})^M$$

con

$$(29) \quad k_5 > 0, \quad L = (2\mathfrak{f})^{-1} (-\mathfrak{f}^2 + 3\mathfrak{f} - 1),$$

$$(30) \quad M = (1 - \mathfrak{f}) (2\mathfrak{f}^2 k_3)^{-1} (2\varepsilon k_2 k_4 + k_3).$$

Infine la (15), per (II), per la (16) e per la (19) e successivamente per la (28), assumendo δ come variabile indipendente, diviene:

$$(31) \quad 2ff'' - 2(f')^2 - (\mathfrak{f}^2 - 3\mathfrak{f} + 1)(f\delta^{-1})^2 - 2(\mathfrak{f} - 1)f'f\delta^{-1} = 0.$$

Esplicitando nella (31) la $f(\delta)$ fornita dalla (28) si ha, per $M \neq 0$, $p\delta^{2\mathfrak{f}} + q\delta^{\mathfrak{f}} + \lambda^4 = 0$ con p e q costanti, che è una relazione incompatibile con le condizioni $\delta' \neq 0$ e $\lambda \neq 0$. Se invece $M = 0$ (il che è sempre possibile disponendo nella (30) di k_4), la (28) soddisfa identicamente alla (31). L'integrale generale della (28) si esprime allora così:

$$(32) \quad \delta = (ax_1 + b)^n \quad \text{con} \quad n = 2\mathfrak{R}\mathfrak{f}, \quad a = \varepsilon k_5 n^{-1}, \quad b = \text{cost.}$$

e la costante a non è nulla per le (25), (26) e (29). Sostituendo la (32) nelle (16), (21) e (23), si ha l'integrale di (III) con le condizioni (26) e $\mathfrak{f} \neq 1$. La condizione (26), $\mathfrak{f} \neq 0$, è infine necessaria poiché, nel caso opposto, $\mathfrak{f} = 0$, partendo dalla (14) e procedendo come dianzi, risulta impossibile soddisfare alla (15) che coincide con la (31) per $\mathfrak{f} = 0$. Dunque il caso I_a^0 , $\beta' \delta' \neq 0$, ha, senso soltanto per $\mathfrak{f} \neq 0$.

Ponendo, come è sempre lecito, $b = 0$ ed uguagliando all'unità le costanti preposte ai dx_i^2 nella (I)⁽¹⁰⁾, si ottiene allora:

$$(IV) \quad \begin{cases} ds^2 = (\lambda^2 + x_1^{2\mathfrak{R}\mathfrak{f}}) x_1^{-2\mathfrak{R}(\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{f} - 1)} dx_4^2 - dt^2 \\ dl^2 = dx_1^2 + x_1^{2\mathfrak{R}\mathfrak{f}(\mathfrak{f} - 1)} dx_2^2 + x_1^{2\mathfrak{R}\mathfrak{f}} dx_3^2 \\ w = g_{14} = \lambda x_1^{-\mathfrak{R}(\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{f} - 1)} \\ \Gamma_{14}^1 = -\mathfrak{f} \Gamma_{34}^3, \quad \Gamma_{24}^2 = (\mathfrak{f} - 1) \Gamma_{34}^3 = -(\mathfrak{f} - 1) \mathfrak{R}\mathfrak{f} \lambda x_1^{-2\mathfrak{R}\mathfrak{f}} \quad \text{con } x_1 > 0. \end{cases}$$

(10) Infatti, si può sempre disporre dell'unità di misura di ciascuna coordinata e del valore iniziale di δ . Risultando allora per la (32) $\delta' = n\delta x_1^{-1}$ e potendo sempre assumere $x_1 > 0$ è $n > 0$ per la (22).

Le linee coordinate del dl^2 sono linee di curvatura, poiché del tensore doppio di Ricci ⁽¹¹⁾ non risultano nulle le sole componenti α_{ii} ($i = 1, 2, 3$). Le curvature principali valgono ⁽¹²⁾:

$$(33) \quad \omega_1 = -(\mathfrak{R}f)^2 (f-1) x_1^{-2}, \quad \omega_2 = -f^{-1} (f-1) \omega_1, \quad \omega_3 = -(f-1) \omega_1.$$

Lo spazio geometrico risulta riemanniano e per $x_1 \rightarrow +\infty$ diviene euclideo; lo spazio-tempo non è riemanniano e per $x_1 \rightarrow +\infty$ diviene riemanniano ⁽¹³⁾. Ciò permette di localizzare sull'asse di singolarità la « causa » del campo unitario. In conclusione la soluzione trovata espressa da (IV) dipende oltre che dall'intensità $|\lambda|$ del campo magnetico anche dalla sola costante essenziale $f \neq 0$, $f \neq +1$. Sarà compito dell'esperienza, attraverso ad esempio alla misura della velocità della luce, data da $c/\sqrt{\gamma}$, il determinarla.

3. INTEGRAZIONE DI (III) NEL SOTTOCASO I_b^0 . - Limitiamoci al sotto-caso $\beta' = 0$ e $\delta' \neq 0$, poiché l'altro, $\beta' \neq 0$ e $\delta' = 0$, equivale al precedente, perché le (II), (III) e la (11) dipendono da β e da δ in modo simmetrico. La (12) nel sotto-caso in esame diviene un'identità; e integrando la (13) si ha (per la (9)):

$$(34) \quad \gamma - w^2 = k_3 \delta (\delta')^{-2} \quad \text{con la costante } k_3 > 0.$$

Dalla (11), per la (4), ponendo $\beta = \text{cost.} = k_2 > 0$ si ha:

$$(35) \quad w = \varepsilon \lambda k_3^{1/2} k_2^{-1/2} (\delta')^{-1} \quad \text{con } \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon \delta' > 0 \quad (14).$$

Infine dalla (34) e dalla (35) si ha:

$$(36) \quad \gamma = k_3 k_2^{-1} (\delta')^{-2} (\lambda^2 + k_2 \delta).$$

Integrando prima la (14) dopo avervi sostituito le precedenti, si ottiene Γ_{44}^1 . Identificando Γ_{44}^1 così trovato con il valore dato dalla terza

(11) Loco cit. in ⁽²⁾, cap V, par. 6.

(12) Loco cit. in ⁽²⁾, cap. VI, par. 6 e cap. VII, par. 5.

(13) Infatti, nello spazio geometrico i coefficienti di connessione risultano coincidenti con i simboli di Christoffel per (II) e per la (1): si ha poi, per la (33), $\omega_i \rightarrow 0$ per $x_1 \rightarrow +\infty$ ($i = 1, 2, 3$). Ciò dimostra la prima parte dell'affermazione. In quanto alla seconda si rilevi che dei coefficienti di connessione alcuni sono quelli dello spazio geometrico; per i rimanenti si ha:

$$\Gamma_{44}^i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \Gamma_{44}^i = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

e per la quarta delle (IV) $\Gamma_{44}^i \rightarrow 0$ per $x_1 \rightarrow +\infty$ ($i = 1, 2, 3$). Con ciò risulta dimostrato che per $x_1 \rightarrow +\infty$ lo spazio-tempo diviene riemanniano.

(Se poi $2f < -3 - \sqrt{17}$ o $2f > -3 + \sqrt{17}$ risulta che $\Gamma_{44}^1 \rightarrow 0$ per $x_1 \rightarrow +\infty$ onde per $x_1 \rightarrow +\infty$ lo spazio-tempo diviene pseudoeuclideo).

(14) Per la (13) ed essendo $\delta' \neq 0$, si conclude come in nota ⁽¹⁰⁾.

delle (II), ed integrando l'equazione che si ottiene, si ha (se k_4 e $k_5 > 0$ sono costanti):

$$(37) \quad \delta' = f(\delta) = \varepsilon k_5 \delta^{1/2} (\lambda^2 + k_2 \delta)^{-\varepsilon k_4 k_3^{-1}}.$$

Rimane ancora la (15) che per (II) e la (37) coincide con la (31) per $f = 1$. Si può allora utilizzare la discussione di 2. Ne segue che la (15) è soddisfatta dalla (37) con $k_4 = 0$ e dunque l'integrale della (37) è ancora la (32) per $\mathfrak{K} = f = 1$. Il sistema (IV) con $\mathfrak{K} = f = 1$ dà quindi la soluzione cercata e pertanto lo spazio geometrico è euclideo (con dl^2 in coordinate cilindriche), ma lo spazio-tempo non è riemanniano. A posteriori possiamo perciò concludere che il sottocaso I_b^0 può farsi rientrare nel sottocaso I_a^0 per $\mathfrak{K} = f = 1$.

4. INTEGRAZIONE DI (III) NEL III° CASO ($\beta = \text{cost.}$, $\delta = \text{cost.}$). - Per (II) la (12) e la (13) diventano identità, la (15), che coincide con la (14), e la (10) diventano:

$$(V) \quad \begin{cases} (38) & 2\gamma'' - (\gamma')^2 \gamma^{-1} = 0 & (4R_{44} = 4\gamma R_{11} = 0) \\ (39) & 2\gamma w' - w\gamma' = 0 & (2\Gamma_4 = 2\Gamma_{14} = 0). \end{cases}$$

Integrando la (38) e poi la (39) si ottiene:

$$(40) \quad \gamma = \text{cost.}, \quad w = w_1 = \text{cost.}$$

oppure

$$(41) \quad \gamma = (x_1 + \gamma_4)^2, \quad w = \mu (x_1 + \gamma_4).$$

Lo spazio-tempo risulta in corrispondenza alla (40) manifestamente pseudoeuclideo, perché i coefficienti di connessione sono tutti nulli. In corrispondenza alla (41) si vede subito che lo spazio-tempo è riemanniano perché la parte emisimmetrica dei coefficienti di connessione è nulla, mentre la parte simmetrica coincide con i simboli di Christoffel tratti dalla metrica. Ma c'è di più: lo spazio-tempo è pseudoeuclideo anche in questo caso, perché la metrica si presenta sotto la forma

$$(42) \quad ds^2 = (x_1 + \gamma_4)^2 dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

per cui il tensore di Riemann è nullo ⁽¹⁵⁾. La forma (42) della metrica mostra che l'osservatore a cui la metrica si riferisce è in moto traslatorio rettilineo uniformemente accelerato rispetto ad un osservatore inerziale che dà alla metrica forma pseudopitagorica ⁽¹⁶⁾. Distinguiamo ora tre sottocasi:

(15) E. CLAUSER, in questi « Rendiconti », vol. XIII (1952).

(16) C. MØLLER, *Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab*. Bind XX, n. 19 (1943).

1° valgono le (40) con $w_1 = 0$; in questo sottocaso la metrica ha forma pseudopitagorica e, per la (11) e per la (9), $H = 0$;

2° valgono ancora le (40), ma $w_1 \neq 0$: la metrica è ancora pseudopitagorica, ma H è una costante non nulla;

3° valgono le (41), la metrica ha la forma (42) non pseudopitagorica, risulta $H = \mu(1 - \mu^2)^{-1/2}$ e per $0 < \mu^2 < 1$ si ha effettivamente il terzo sottocaso, mentre per $\mu = 0$ con un cambiamento di riferimento si ricade nel primo (27).

Aerodinamica. — *Su di un problema di aerodinamica relativo alle ali a delta.* Nota (*) di SILVIO NOCILLA, presentata dal Corrisp. C. FERRARI.

1. INTRODUZIONE. — Lo studio aerodinamico della pressione esercitata da un vento supersonico su di un'ala triangolare a diedro che esso investe con incidenza e deriva può essere ricondotto al problema di determinare due funzioni $u_1(Q)$ e $u_2(Q)$ tali che:

1° siano armoniche in un piano complesso ζ , in cui σ e ϑ rappresentino le coordinate polari;

2° siano nulle sulla circonferenza $\sigma = 1$;

3° siano discontinue attraverso alla spezzata γ costituita da due segmenti uguali AH e BH , di lunghezza σ_0 , ed inclinati rispettivamente di $\pm(\pi/2 - \beta)$ radianti sull'asse reale delle ζ (ved. fig. 1).

4° soddisfino alle seguenti condizioni, valide per $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$:

$$(I) \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{\sigma_p} - \sigma_p \right) \frac{du_i}{d\sigma_a} d\sigma_p = \begin{cases} -2U_\infty/B_\infty \cos \beta & \text{per } i = 1 \\ -2U_\infty/B_\infty \sin \beta & \text{per } i = 2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sigma_p} - \sigma_p \right) \frac{du_i}{d\sigma_b} d\sigma_p = \begin{cases} -2U_\infty/B_\infty \cos \beta & \text{per } i = 1 \\ +2U_\infty/B_\infty \sin \beta & \text{per } i = 2 \end{cases}$$

dove gli indici a e b si riferiscono rispettivamente ai segmenti AH e BH .

(17) Si noti infine che la formulazione anteriore della teoria (5) si ottiene da (I) sostituendo alla (3) l'equazione, più restrittiva, $R_{ik} = 0$. Essa si riduce per (II) all'equazione: $R_{14} = (\Gamma_{14}^1)' + \Gamma_{14}^1 (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) = 0$ che va pertanto aggiunta alla (11) ed a (III). Si constata che la soluzione generale (IV), che associa campo magnetostatico con materia, non vi soddisfa, onde il 1° caso è impossibile; per la (39), lo è invece il III° nel quale vien meno la materia. Una circostanza analoga si presenta nella soluzione magnetostatica a simmetria sferica nella quale, con la formulazione anteriore, lo spazio-tempo non è riemanniano e dipende soltanto da H e non dalla materia (W. B. BONNOR, « Proc. Royal Soc. London », vol. 209, pp. 353-368 (1951)), mentre nella formulazione odierna sussiste anche la l'associazione di materia con il campo magnetostatico (A. PAPAPETROU, « Proc. Royal Irish Acad. », vol. A 52, pp. 69-96, 1948).

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1953.

È da rilevare che le discontinuità di cui al n. 3 costituiscono le incognite principali del problema, dato che la discontinuità della funzione:

$$(2) \quad u(Q) = \alpha_1 u_1(Q) + \alpha_2 u_2(Q)$$

è proporzionale alla pressione cercata ⁽¹⁾.

Il significato dei simboli è il seguente: U_∞ rappresenta la velocità all'infinito del vento supersonico; B_∞ è uguale a $\sqrt{M_\infty^2 - 1}$, dove M_∞ denota il numero di Mach all'infinito; α_1 e α_2 , che supponiamo molto piccoli, rappresentano rispettivamente l'angolo d'incidenza e l'angolo di deriva dell'ala rispetto al vento, mentre β , che supponiamo di ampiezza qualsiasi, ha il significato di angolo diedro dell'ala.

Infine Q rappresenta il generico punto del piano ζ , mentre $d/d\nu$ denota la derivata normale a γ , orientata come indicato in fig. 1.

Dalle equazioni (1) si ricava immediatamente ⁽²⁾:

$$(3) \quad \frac{du_i}{d\nu_a} = \frac{du_i}{d\nu_b} = 0 \quad \text{per } 0 \leq \sigma \leq \sigma_0$$

e cioè sulla spezzata AHB le derivate normali delle funzioni $u_i(Q)$ devono essere nulle. Queste condizioni, insieme alle altre, mostrano che si tratta di un doppio problema misto di Dirichlet-Neumann, da risolversi

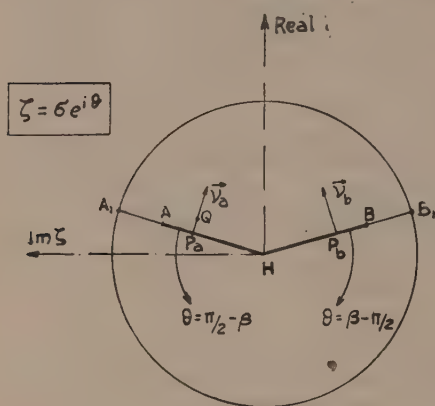


Fig. 1.

nel dominio duplicemente connesso costituito dal cerchio $\sigma = 1$ dal quale si sottragga la spezzata AHB.

2. RIDUZIONE DEL PROBLEMA ALLA SOLUZIONE DI DUE EQUAZIONI INTEGRALI DI PRIMA SPECIE. - Per le funzioni $u_i(Q)$ cerchiamo delle espressioni del tipo:

$$(4) \quad u_i(Q) = \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial \nu_{M_a}} G(Q, M) \varphi_a^{(i)}(\sigma_M) d\sigma_M + \int_0^{\sigma_n} \frac{\partial}{\partial \nu_{M_b}} G(Q, M) \varphi_b^{(i)}(\sigma_M) d\sigma_M$$

dove M denota il generico punto potenziante sulla curva γ , così come in seguito chiameremo P il generico punto potenziato su γ stessa. Inoltre le $\varphi_a^{(i)}$ e $\varphi_b^{(i)}$ sono opportune funzioni di σ , che verranno determinate successivamente, e la funzione:

$$G(Q, M) = -\frac{1}{2} \lg [\sigma_Q^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_Q \sigma_M \cos(\vartheta_Q - \vartheta_M)] + \\ + \frac{1}{2} \lg [1 + \sigma_Q^2 \sigma_M^2 - 2\sigma_Q \sigma_M \cos(\vartheta_Q - \vartheta_M)]$$

(1) Più precisamente se poniamo: $q = 1/2 \rho_\infty U_\infty^2$, con ρ_∞ densità del fluido all'infinito, la pressione Δp è legata alla discontinuità Δu di u dalla relazione:

$$\Delta p/q = (2/U_\infty) \Delta u.$$

(2) D'ora in poi sottintenderemo sempre che l'indice i assuma i valori 1 e 2.

è la funzione di Green per il cerchio di raggio unitario. Il simbolo $\partial/\partial v_M$ denota la derivata normale a γ , fatta rispetto al punto M. Qualunque siano le $\varphi_a^{(i)}$ e $\varphi_b^{(i)}$, in base alle proprietà di $G(Q, M)$ ed a note proprietà dei potenziali risulta che le funzioni $u_i(Q)$ sono armoniche, si annullano per $\sigma = 1$, e sono discontinue attraverso a γ in modo che:

$$(5) \quad \Delta u_i(P_a) = 2\pi\varphi_a^{(i)} \quad ; \quad \Delta u_i(P_b) = 2\pi\varphi_b^{(i)}.$$

Inoltre le loro derivate d/dv_p normali a γ sono continue attraverso a γ .

Per la soluzione effettiva del problema conviene riprendere le equazioni (3), conseguenze immediate delle (1), e trasformarle opportunamente. Considerando ad esempio la prima di esse (le altre si trasformano in modo perfettamente analogo), integrandola rispetto a σ_p tra 0 e σ ($0 \leq \sigma \leq 1$), tenendo conto delle (4), risulta (3):

$$\begin{aligned} \int_0^\sigma \frac{du_i}{dv_a} d\sigma_p &= \int_0^\sigma \left[\frac{d}{dv_p} \int_0^{\sigma_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_{M_a}} G(P, M) \varphi_a^{(i)}(\sigma_M) + \frac{\partial}{\partial v_{M_b}} G(P, M) \varphi_b^{(i)}(\sigma_M) \right\} d\sigma_M \right] d\sigma_p = \\ &= \int_0^{\sigma_0} [H_{aa}(\sigma, \sigma_M) \varphi_a^{(i)}(\sigma_M) + H_{ab}(\sigma, \sigma_M) \varphi_b^{(i)}(\sigma_M)] d\sigma_M \end{aligned}$$

essendosi posto (4):

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial v_{P_a}} \frac{\partial}{\partial v_{M_a}} G(Q, M) d\sigma_Q \right]_{Q \equiv P_a} &= H_{aa}(\sigma, \sigma_M) \\ \left[\int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial v_{P_b}} \frac{\partial}{\partial v_{M_b}} G(Q, M) d\sigma_Q \right]_{Q \equiv P_b} &= H_{bb}(\sigma, \sigma_M) \\ \int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial v_{P_a}} \frac{\partial}{\partial v_{M_b}} G(P, M) d\sigma_p &= H_{ab}(\sigma, \sigma_M) \\ \int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial v_{P_b}} \frac{\partial}{\partial v_{M_a}} G(P, M) d\sigma_p &= H_{ba}(\sigma, \sigma_M) \end{aligned} \right.$$

(3) È da rilevare che l'integrale rispetto a σ_M che compare nell'ultimo membro va inteso come « valore principale secondo Cauchy » dell'integrale stesso. Infatti la funzione $H_{aa}(\sigma, \sigma_M)$ diventa infinita di prim'ordine per $\sigma_M \rightarrow \sigma$ (cfr. formule 8). Tuttavia, sia ora che in seguito, non indicheremo in modo particolare tale valore principale, convenendo che qualora in un integrale la funzione sotto il segno diventi infinita nel modo sopra detto nell'intervallo d'integrazione, si debba automaticamente considerare il valore principale secondo Cauchy.

(4) Alcune di queste posizioni non sono necessarie per la trasformazione che abbiamo ora svolto, mentre intervengono nelle trasformazioni, che sottintendiamo, delle rimanenti condizioni.

Nelle prime due delle (6) si deve intendere che mentre il punto P si muove sulla curva γ , il punto Q lo segue mantenendosi a distanza piccolissima da esso sulla normale condotta per P a γ ; solo dopo effettuata l'integrazione rispetto a σ_Q si può fare tendere a zero la distanza PQ, perché altrimenti gli integrali non avrebbero significato. Le equazioni (3) si trasformano dunque nel seguente sistema di equazioni nelle funzioni incognite $\varphi_a^{(i)}(\sigma)$ e $\varphi_b^{(i)}(\sigma)$:

$$(7) \quad \begin{cases} \int_0^{\sigma_0} [H_{aa}(\sigma, \sigma_M) \varphi_a^{(i)}(\sigma_M) + H_{ab}(\sigma, \sigma_M) \varphi_b^{(i)}(\sigma_M)] d\sigma_M = 0 \\ \int_0^{\sigma_0} [H_{ba}(\sigma, \sigma_M) \varphi_a^{(i)}(\sigma_M) + H_{bb}(\sigma, \sigma_M) \varphi_b^{(i)}(\sigma_M)] d\sigma_M = 0. \end{cases}$$

Effettuando i calcoli indicati nelle (6) si ottiene:

$$(8) \quad \begin{cases} H_{aa}(\sigma, \sigma_M) = H_{bb}(\sigma, \sigma_M) = -\frac{1}{\sigma - \sigma_M} - \frac{1}{\sigma_M(1 - \sigma\sigma_M)} \\ H_{ab}(\sigma, \sigma_M) = H_{ba}(\sigma, \sigma_M) = \int_0^{\sigma} \left[\frac{(\sigma_p^2 + \sigma_M^2) \cos 2\beta + 2\sigma_p \sigma_M}{(\sigma_p^2 + \sigma_M^2 + 2\sigma_p \sigma_M \cos 2\beta)^2} - \frac{(1 + \sigma_p^2 \sigma_M^2) \cos 2\beta + 2\sigma_p \sigma_M}{(1 + \sigma_p^2 \sigma_M^2 + 2\sigma_p \sigma_M \cos 2\beta)^2} \right] d\sigma_p \end{cases}$$

cosicch  alle equazioni (7) si pu  soddisfare ponendo:

$$(9) \quad \varphi_a^{(1)}(\sigma) = \varphi_b^{(1)}(\sigma) = \varphi_1(\sigma) \quad ; \quad \varphi_a^{(2)}(\sigma) = -\varphi_b^{(2)}(\sigma) = \varphi_2(\sigma).$$

Se infine poniamo:

$$(10) \quad H_{aa}(\sigma, \sigma_M) + H_{ab}(\sigma, \sigma_M) = H_1(\sigma, \sigma_M) \quad ; \quad H_{aa}(\sigma, \sigma_M) - H_{ab}(\sigma, \sigma_M) = H_2(\sigma, \sigma_M)$$

le (7) si riducono soltanto pi  alle due seguenti equazioni integrali di prima specie omogenee, valide per $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$:

$$(11) \quad \int_0^{\sigma_0} H_i(\sigma, \sigma_M) \varphi_i(\sigma_M) d\sigma_M = 0.$$

Le equazioni (11) non sono per  sufficienti per risolvere il nostro problema, dato che permettono di determinare le φ_i non univocamente, ma solo a meno di due fattori arbitrari. Per determinare tali fattori integriamo per parti le (11), prendendo per fattore differenziale $du_i/d\sigma$. Tenendo conto delle (9), (10), e (11) si perviene alle seguenti equazioni:

$$(12) \quad \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{1}{\sigma_p^2} + 1 \right) d\sigma_p \int_0^{\sigma_0} H_i(\sigma_p, \sigma_M) \varphi_i(\sigma_M) d\sigma_M = -2 U_{\infty} B_{\infty} \begin{cases} \cos \beta & \text{per } i = 1 \\ \sin \beta & \text{per } i = 2. \end{cases}$$

3. SOLUZIONE PER SERIE DELLE EQUAZIONI INTEGRALI OTTENUTE. —

Cerchiamo di determinare le φ_i mediante sviluppi in serie di potenze di β : per questo è necessario sviluppare in serie di potenze di β anche le H_i . Valendosi delle (8) e (10), dopo alcuni calcoli si ricavano i seguenti sviluppi in serie di sole potenze pari di β :

$$(13) \quad \begin{cases} H_1(\sigma, \sigma_M) = H_1^{(0)}(\sigma, \sigma_M) + \beta^2 H^{(2)}(\sigma, \sigma_M) + \dots \\ H_2(\sigma, \sigma_M) = H_2^{(0)}(\sigma, \sigma_M) + \beta^2 H^{(2)}(\sigma, \sigma_M) + \dots \end{cases}$$

con:

$$(14) \quad \begin{cases} H_1^{(0)}(\sigma, \sigma_M) = -\frac{2\sigma}{\sigma^2 - \sigma_M^2} - \frac{2\sigma}{1 - \sigma^2 \sigma_M^2} \\ H_2^{(0)}(\sigma, \sigma_M) = -\frac{2\sigma_M}{\sigma^2 - \sigma_M^2} - \frac{2/\sigma_M}{1 - \sigma^2 \sigma_M^2} \\ H^{(2)}(\sigma, \sigma_M) = \frac{2\sigma}{(\sigma + \sigma_M)^2} - \frac{4\sigma\sigma_M}{(\sigma + \sigma_M)^3} - \frac{2\sigma}{(1 + \sigma\sigma_M)^2} + \frac{4\sigma}{(1 + \sigma\sigma_M)^3} \end{cases}$$

Data la forma delle H_i , delle equazioni (11) e delle condizioni accessorie (12), appare opportuno cercare per le φ_i degli sviluppi in serie di potenze di β del tipo:

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi_1(\sigma) = \varphi_1^{(0)}(\sigma) + \beta^2 \varphi_1^{(2)}(\sigma) + \dots \\ \varphi_2(\sigma) = \beta \varphi_2^{(1)}(\sigma) + \beta^3 \varphi_2^{(3)}(\sigma) + \dots \end{cases}$$

Se allora sostituiamo nelle (11) questi valori e quelli forniti dalle (13) ed eguagliamo i termini contenenti eguali potenze di β , otteniamo le due seguenti successioni di equazioni integrali, valide tutte per $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$:

$$(16) \quad \begin{cases} \int_0^{\sigma_0} H_1^{(0)}(\sigma, \sigma_M) \varphi_1^{(0)}(\sigma_M) d\sigma_M = 0 \\ \int_0^{\sigma_0} H_1^{(0)}(\sigma, \sigma_M) \varphi_1^{(2)}(\sigma_M) d\sigma_M = - \int_0^{\sigma_0} H^{(2)}(\sigma, \sigma_M) \varphi_1^{(0)}(\sigma_M) d\sigma_M \\ \dots \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \int_0^{\sigma_0} H_2^{(0)}(\sigma, \sigma_M) \varphi_2^{(1)}(\sigma_M) d\sigma_M = 0 \\ \int_0^{\sigma_0} H_2^{(0)}(\sigma, \sigma_M) \varphi_2^{(3)}(\sigma_M) d\sigma_M = \int_0^{\sigma_0} H^{(2)}(\sigma, \sigma_M) \varphi_2^{(1)}(\sigma_M) d\sigma_M \\ \dots \end{cases}$$

Per risolverle effettuiamo il seguente cambiamento di variabile:

$$(18) \quad \tau = \left(\frac{2\sigma}{1+\sigma^2} \right)^2 - \tau_0, \quad \text{con:} \quad \tau_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma_0}{1+\sigma_0^2} \right)^2$$

e poniamo:

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi_1(\sigma) = \Phi_1(\tau) \\ \varphi_2(\sigma) = \Phi_2(\tau) \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1^{(0)}(\sigma) = \Phi_1^{(0)}(\tau) \\ \varphi_2^{(1)}(\sigma) = \Phi_2^{(1)}(\tau) \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1^{(2)}(\sigma) = \Phi_1^{(2)}(\tau) \\ \varphi_2^{(3)}(\sigma) = \Phi_2^{(3)}(\tau) \end{cases} \quad \text{ecc.}$$

Le prime delle (16) e (17) diventano rispettivamente:

$$\int_{-\tau_0}^{\tau_0} \sqrt{\frac{\tau_0 + \tau}{\tau_0 + \tau_M}} \Phi_1^{(0)}(\tau_M) \frac{d\tau_M}{\tau - \tau_M} = 0 \quad ; \quad \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \frac{\tau_0 + \tau}{\tau_0 + \tau_M} \Phi_2^{(1)}(\tau_M) \frac{d\tau_M}{\tau - \tau_M} = 0$$

valide per $-\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0$. Equazioni di questo tipo furono già studiate da parecchi autori; applicando la formula risolutiva di Söhngen⁽⁵⁾ si ha:

$$(20) \quad \Phi_1^{(0)}(\tau) = \frac{C_1^{(0)}}{\sqrt{\tau_0 - \tau}} \quad ; \quad \Phi_2^{(1)}(\tau) = C_2^{(1)} \sqrt{\frac{\tau_0 + \tau}{\tau_0 - \tau}}$$

con $C_1^{(0)}$ e $C_2^{(1)}$ costanti sia rispetto a τ che a β .

Passiamo ora alle seconde delle (16) e (17). Nella nuova variabile τ esse diventano, tenuto conto delle (19) e (20):

$$(21) \quad \begin{cases} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \sqrt{\frac{\tau_0 + \tau}{\tau_0 + \tau_M}} \Phi_1^{(2)}(\tau_M) \frac{d\tau_M}{\tau - \tau_M} = C_1^{(0)} g_1^{(2)}(\tau) \\ \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \frac{\tau_0 + \tau}{\tau_0 + \tau_M} \Phi_2^{(3)}(\tau_M) \frac{d\tau_M}{\tau - \tau_M} = C_2^{(1)} g_2^{(3)}(\tau) \end{cases}$$

con:

$$(22) \quad \begin{cases} g_1^{(2)}(\tau) = \int_0^{\sigma_0} H^{(2)}(\sigma, \sigma_M) \frac{d\sigma_M}{\sqrt{\tau_0 - \tau_M}} \\ g_2^{(3)}(\tau) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma_0} H^{(3)}(\sigma, \sigma_M) \sqrt{\frac{\tau_0 + \tau_M}{\tau_0 - \tau_M}} d\sigma_M \end{cases}$$

Applicando di nuovo la formula di Söhngen, per le funzioni $\Phi_1^{(2)}$ e $\Phi_2^{(3)}$ si ottengono le espressioni seguenti: *

(5) H. SÖHNGEN, *Die Lösungen der Integralgleichung* ..., *Math. Zeitsch. *, 45, 2 (1939).

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_1^{(2)}(\tau) &= \frac{I}{\sqrt{\tau_0 - \tau}} \left[C_1^{(2)} - \frac{C_1^{(0)}}{\pi^2} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} g_1^{(2)}(\tau') \sqrt{\tau_0 - \tau'} \frac{d\tau'}{\tau - \tau'} \right] \\ \Phi_2^{(3)}(\tau) &= \sqrt{\frac{\tau_0 + \tau}{\tau_0 - \tau}} \left[C_2^{(3)} - \frac{C_2^{(1)}}{\pi^2} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} g_2^{(3)}(\tau') \sqrt{\frac{\tau_0 - \tau'}{\tau_0 + \tau'}} \frac{d\tau'}{\tau - \tau'} \right] \end{aligned} \right.$$

con $C_1^{(2)}$ e $C_2^{(3)}$ costanti sia rispetto a τ che a β . Operando in modo perfettamente analogo su tutte le rimanenti equazioni (16) e (17) si possono determinare tutti i termini degli sviluppi in serie delle φ_i .

Occupiamoci ora della determinazione delle costanti $C_1^{(0)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(3)}$ che compaiono nella (20) e (23). Per determinarle riprendiamo le (12) e sostituiamo al posto delle φ_i e delle H_i i loro sviluppi in serie forniti dalle (13) e (15). Eguagliando i termini contenenti eguali potenze di β e ricordando le espressioni di $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(1)}$, $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_2^{(3)}$ fornite dalle (20) e (23) si ottiene:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1^{(0)} &= -\frac{2U_\infty}{B_\infty} \frac{I}{I_1^{(0)}} \\ C_2^{(1)} &= -\frac{2U_\infty}{B_\infty} \frac{I}{I_2^{(1)}} \end{aligned} \right. \quad (25) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1^{(2)} &= \frac{U_\infty}{B_\infty} \frac{I}{I_1^{(0)}} \left\{ 1 - \frac{2}{I_1^{(0)}} \left[\frac{I_1^{(2)}}{\pi^2} - I_1^{(*)} \right] \right\} \\ C_2^{(3)} &= \frac{U_\infty}{B_\infty} \frac{I}{I_2^{(1)}} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{2}{I_2^{(1)}} \left[\frac{I_2^{(3)}}{\pi^2} + I_2^{(*)} \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

dove si è posto:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1^{(0)} &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{I}{\sigma_p^2} + 1 \right) d\sigma_p \int_0^{\sigma_0} H_1^{(0)}(\sigma_p, \sigma_M) \frac{d\sigma_M}{\sqrt{\tau_0 - \tau_M}} \\ I_2^{(1)} &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{I}{\sigma_p^2} + 1 \right) d\sigma_p \int_0^{\sigma_0} H_2^{(0)}(\sigma_p, \sigma_M) \sqrt{\frac{\tau_0 + \tau_M}{\tau_0 - \tau_M}} d\sigma_M \end{aligned} \right.$$

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1^{(2)} &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{I}{\sigma_p^2} + 1 \right) d\sigma_p \int_0^{\sigma_0} H_1^{(0)}(\sigma_p, \sigma_M) \frac{d\sigma_M}{\sqrt{\tau_0 - \tau_M}} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} g_1^{(2)}(\tau') \sqrt{\tau_0 - \tau'} \frac{d\tau'}{\tau_M - \tau'} \\ I_2^{(3)} &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{I}{\sigma_p^2} + 1 \right) d\sigma_p \int_0^{\sigma_0} H_2^{(0)}(\sigma_p, \sigma_M) \sqrt{\frac{\tau_0 + \tau_M}{\tau_0 - \tau_M}} d\sigma_M \int_{-\tau_0}^{\tau_0} g_2^{(3)}(\tau') \sqrt{\frac{\tau_0 - \tau'}{\tau_0 + \tau'}} \frac{d\tau'}{\tau_M - \tau'} \end{aligned} \right.$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1^{(*)} &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{I}{\sigma_p^2} + 1 \right) d\sigma_p \int_M^{\sigma_0} H^{(2)}(\sigma_p, \sigma_M) \frac{d\sigma_M}{\sqrt{\tau_0 - \tau_M}} \\ I_2^{(*)} &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{I}{\sigma_p^2} + 1 \right) d\sigma_p \int_M^{\sigma_0} H^{(2)}(\sigma_p, \sigma_M) \sqrt{\frac{\tau_0 + \tau_M}{\tau_0 - \tau_M}} d\sigma_M \end{aligned} \right.$$

Riassumendo, in virtù delle (2), (5), (9), (15), la pressione $\Delta p/q$ trasmessa dal fluido all'ala in ogni suo punto vale:

$$(29) \quad \frac{\Delta p}{q} = \frac{4\pi\alpha_1}{U_\infty} [\varphi_1^{(0)}(\sigma) + \beta^2 \varphi_1^{(2)}(\sigma) + \dots] \pm \frac{4\pi\alpha_2}{U_\infty} [\beta \varphi_2^{(1)}(\sigma) + \beta^3 \varphi_2^{(3)}(\sigma) + \dots]$$

valendo il segno + per i punti appartenenti al segmento AH e il segno - per i punti appartenenti al segmento BH.

4. CALCOLO DEI TERMINI DELLO SVILUPPO IN SERIE FINO A QUELLI IN β^3 COMPRESI. - Fra le funzioni che compaiono nelle (29) $\varphi_1^{(0)}$ e $\varphi_1^{(2)}$ sono già state calcolate esplicitamente e sono date dalle (20). Viceversa, così come appare dalle (23), per calcolare $\varphi_1^{(2)}$ e $\varphi_2^{(3)}$ è necessario anzitutto valutare le funzioni $g_1^{(2)}$ e $g_2^{(3)}$ definite dalle (22). Per questo osserviamo che ponendo:

$$\mu = \sigma/\lambda \quad R(\sigma) = \sqrt{(\sigma_0^2 - \sigma^2)(1 - \sigma_0^2 \sigma^2)}$$

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}(\sigma, \lambda) &= (1 + \sigma_0^2) \int_0^{\sigma_0} \left(\frac{1}{\mu + \sigma_M} + \frac{\mu}{1 + \mu \sigma_M} \right) \frac{1 + \sigma_M^2}{R(\sigma_M)} d\sigma_M \\ \mathfrak{B}(\sigma, \lambda) &= -(1 + \sigma_0^2) \int_0^{\sigma_0} \left(\frac{1}{\mu + \sigma_M} + \frac{\mu}{1 + \mu \sigma_M} \right) \frac{2\sigma_M}{R(\sigma_M)} d\sigma_M \end{aligned} \right.$$

esse possono esprimersi nel modo seguente:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} g_1^{(2)}(\tau) &= \mathfrak{A}'_\lambda(\sigma, 1) + \mathfrak{A}''_{\lambda\lambda}(\sigma, 1) \\ g_2^{(3)}(\tau) &= \mathfrak{B}'_\lambda(\sigma, 1) + \mathfrak{B}''_{\lambda\lambda}(\sigma, 1) \end{aligned} \right.$$

gli apici indicando derivate rispetto a λ . Effettuando le integrazioni indicate nelle (30), dopo alcuni calcoli si ottiene:

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}(\sigma, \lambda) &= (1 + \sigma_0^2) \mathfrak{J}_1 - (1 + \sigma_0^2) \frac{1 + \mu^2}{2R(\mu)} \lg \left| \frac{R(\mu) - \sigma_0(1 + \mu^2)}{R(\mu) + \sigma_0(1 + \mu^2)} \right| \\ \mathfrak{B}(\sigma, \lambda) &= 4(1 + \sigma_0^2) \mathfrak{J}_2 - (1 + \sigma_0^2) \frac{\mu}{R(\mu)} \lg \left| \frac{R(\mu) - \sigma_0(1 + \mu^2)}{R(\mu) + \sigma_0(1 + \mu^2)} \right| \end{aligned} \right.$$

dove \mathfrak{J}_1 e \mathfrak{J}_2 rappresentano due quantità indipendenti da σ e λ , che quindi non intervengono nel calcolo di $g_1^{(2)}$ e $g_2^{(3)}$, così come appare dalle (31). Sostituendo questi valori nelle (31), ed introducendo per comodità le nuove variabili t ed η e la costante η_0 tali che:

$$\left\{ \begin{aligned} t = T(\sigma) &= \sqrt{\left(\frac{2\sigma_0}{1 + \sigma_0^2} \right)^2 - \left(\frac{2\sigma}{1 + \sigma^2} \right)^2} = \sqrt{\eta_0^2 - \eta^2} = \frac{2R(\sigma)}{(1 + \sigma_0^2)(1 + \sigma^2)} \\ \eta &= \frac{2\sigma}{1 + \sigma^2} = \sqrt{\tau_0^2 + \tau^2} \quad ; \quad \eta_0 = \frac{2\sigma_0}{1 + \sigma_0^2} \end{aligned} \right.$$

si ottengono infine le formule seguenti:

$$(33) \quad g_1^{(2)}(\tau) = -\frac{1}{t^2} \psi_1^{(2)}(t) \quad ; \quad g_2^{(3)}(\tau) = -\frac{\sqrt{\eta_0^2 - t^2}}{t^2} \psi_2^{(3)}(t)$$

dove le funzioni ausiliarie $\psi_1^{(2)}$ e $\psi_2^{(3)}$ valgono:

$$\begin{cases} \psi_1^{(2)}(t) = (\eta_0^2 - t^2) \left\{ \frac{1}{t} \lg \frac{\eta_0 - t}{\eta_0 + t} \left[\frac{3 \eta_0^2 (1 - \eta_0^2)}{t^2} + 3 \eta_0^2 - 1 \right] + 2 \eta_0 \left[\frac{3 (1 - \eta_0^2)}{t^2} + 2 \right] \right\} \\ \psi_2^{(3)}(t) = \frac{\eta_0^2}{t} \lg \frac{\eta_0 - t}{\eta_0 + t} \left[\frac{3 \eta_0^2 (1 - \eta_0^2)}{t^2} + 2 (2 \eta_0^2 - 1) - t^2 \right] + 2 \eta_0 \left[\frac{3 \eta_0^2 (1 - \eta_0^2)}{t^2} + 3 \eta_0^2 - 1 \right]. \end{cases}$$

Le formule ora scritte permettono di esprimere le funzioni $\varphi_1^{(2)}$ e $\varphi_2^{(3)}$ sotto la forma seguente:

$$(35) \quad \begin{cases} \varphi_1^{(2)}(\sigma) = \frac{1}{t} \left[C_1^{(2)} + \frac{C_1^{(0)}}{\pi^2} \Psi_1^{(2)}(t) \right] \\ \varphi_2^{(3)}(\sigma) = \frac{\sqrt{\eta_0^2 - t^2}}{t} \left[C_2^{(3)} + \frac{C_2^{(1)}}{\pi^2} \Psi_2^{(3)}(t) \right] \end{cases}$$

con:

$$(36) \quad \begin{cases} \Psi_1^{(2)}(t) = - \int_{-\tau_0}^{\tau_0} g_1^{(2)}(\tau') \sqrt{\tau_0 - \tau'} \frac{d\tau'}{\tau - \tau'} = 2 \int_0^{\eta_0} \psi_1^{(2)}(t') \frac{dt'}{t^2 - t'^2} \\ \Psi_2^{(3)}(t) = - \int_{-\tau_0}^{\tau_0} g_2^{(3)}(\tau') \sqrt{\frac{\tau_0 - \tau'}{\tau_0 + \tau'}} \frac{d\tau'}{\tau - \tau'} = 2 \int_0^{\eta_0} \psi_2^{(3)}(t') \frac{dt'}{t^2 - t'^2}. \end{cases}$$

Occupiamoci ora degli integrali definiti $I_1^{(0)}, I_2^{(1)}, I_1^{(2)}, I_2^{(3)}, I_1^{(*)}, I_2^{(*)}$ per mezzo dei quali si determinano immediatamente le costanti $C_1^{(0)}, C_2^{(1)}, C_1^{(2)}, C_2^{(3)}$. Cominciando dai primi due, se si effettua l'integrazione rispetto a σ_M indicata nelle (26) si ottiene:

$$I_1^{(0)} = -2\pi \int_{\eta_0}^1 \frac{d\eta_p}{\eta_p \sqrt{(1 - \eta_p^2)(\eta_p^2 - \eta_0^2)}} \quad ; \quad I_2^{(1)} = -2\pi \int_{\eta_0}^1 \frac{d\eta_p}{\eta_p \sqrt{(1 - \eta_p^2)(\eta_p^2 - \eta_0^2)}}$$

Di questi due integrali il primo è ellittico mentre il secondo è elementare. Effettuando le integrazioni indicate si ottiene:

$$I_1^{(0)} = -2\pi \bar{E}'/\eta_0^2 \quad ; \quad I_2^{(1)} = -\pi^2/\eta_0$$

E' essendo l'integrale ellittico completo di seconda specie $\bar{E}'(k')$, il cui modulo vale: $k' = \sqrt{1 - \eta_0^2} = \frac{1 - \sigma_0^2}{1 + \sigma_0^2}$. Di conseguenza dalle (24) si ha:

$$(37) \quad C_1^{(0)} = \frac{U_\infty}{B_\infty} \frac{\eta_0^2}{\pi \bar{E}'} \quad ; \quad C_2^{(1)} = \frac{2U_\infty}{B_\infty} \frac{\eta_0}{\pi^2}.$$

Per valutare le rimanenti costanti osserviamo che se si pone:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} L_1^{(0)}(\sigma_M) &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{1}{\sigma_P^2} + 1 \right) H_1^{(0)}(\sigma_P, \sigma_M) d\sigma_P \\ L_2^{(1)}(\sigma_M) &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{1}{\sigma_P^2} + 1 \right) H_2^{(0)}(\sigma_P, \sigma_M) d\sigma_P \\ L^{(2)}(\sigma_M) &= \int_{\sigma_0}^1 \left(\frac{1}{\sigma_P^2} + 1 \right) H^{(2)}(\sigma_P, \sigma_M) d\sigma_P \end{aligned} \right.$$

tenendo conto delle posizioni (36) ed invertendo l'ordine delle integrazioni rispetto a σ_P e σ_M indicato nelle (27) e (28) si ottiene:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1^{(2)} &= - \int_{\sigma_0}^1 L_1^{(0)}(\sigma_M) \Psi_1^{(2)}(t_M) \frac{d\sigma_M}{t_M} \\ I_2^{(3)} &= - \int_{\sigma_0}^1 L_2^{(1)}(\sigma_M) \Psi_2^{(3)}(t_M) \frac{\sqrt{\eta_0^2 - t_M^2}}{t_M} d\sigma_M \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} I_1^{(*)} &= \int_0^{\sigma_0} L^{(2)}(\sigma_M) \frac{d\sigma_M}{t_M} \\ I_2^{(*)} &= \int_0^{\sigma_0} L^{(2)}(\sigma_M) \frac{\sqrt{\eta_0^2 - t_M^2}}{t_M} d\sigma_M \end{aligned} \right.$$

Gli integrali che compaiono nelle (38) sono elementari: tralasciamo per brevità il loro calcolo esplicito. Viceversa quelli che compaiono nelle (39) richiedono il calcolo preventivo delle funzioni $\Psi_1^{(2)}(t)$ e $\Psi_2^{(3)}(t)$, fornite dalle (36), che converrà effettuare numericamente. Di conseguenza anche tali integrali si calcolano numericamente.

In base a tutto quanto sopra detto, nell'ordine di approssimazione in cui ci siamo posti, la pressione cercata vale:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{q} &= \frac{4 \alpha_1 \eta_0^2}{B_\infty^2 E'} \frac{1}{t} \left\{ 1 + \beta^2 \left[\frac{C_1^{(2)}}{C_1^{(0)}} + \frac{1}{\pi^2} \Psi_1^{(2)}(t) \right] \right\} + \\ &\pm \frac{8 \alpha_2 \eta_0}{\pi B_\infty} \frac{\sqrt{\eta_0^2 - t^2}}{t} \left\{ \beta + \beta^3 \left[\frac{C_2^{(3)}}{C_2^{(1)}} + \frac{1}{\pi^2} \Psi_2^{(3)}(t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Riguardo a questa formula osserviamo che da un esame delle (36) risulta che la funzione $\Psi_1^{(2)}(t)$ è regolare per $0 \leq t < \eta_0$, mentre la funzione $\Psi_2^{(3)}(t)$ è regolare per $0 \leq t < \eta_0$ e singolare per $t = \eta_0$, in modo però che: $\lim_{t \rightarrow \eta_0} \sqrt{\eta_0^2 - t^2} \Psi_2^{(3)}(t) = 0$. Ciò assicura la regolarità della funzione $\Delta p/q$ per $t = \eta_0$, ossia nel punto H. Inoltre da un esame della (39) risulta che le funzioni integrande che servono per calcolare $I_1^{(2)}$, $I_2^{(3)}$, $I_1^{(*)}$, $I_2^{(*)}$ presentano tutte un polo di ordine $1/2$ per $\sigma_M = \sigma_0$, mentre sono regolari per $\sigma_M = 0$, ad eccezione di quella che compare nell'espressione di $I_2^{(3)}$, la quale presenta ivi un polo di ordine minore di uno. In base a ciò è assicurata la convergenza di tutti gli integrali suddetti.

Astronomia. — *Orbita definitiva del pianetino 1196 Sheba.*
Nota ⁽¹⁾ di MARIA POY, presentata dal Socio G. ARPELLINI.

1. Nel 1931 Jackson scoprì a Johannesburg il piccolo pianeta 1196 Sheba, e servendosi di tre osservazioni, fatte tra il 21 maggio 1931 e il 2 luglio dello stesso anno, ne calcolò l'orbita preliminare.

Poiché l'Osservatorio di Roma su Monte Mario si occupa di fotografie e calcoli di piccoli pianeti in relazione con l'Osservatorio di Cincinnati, il prof. Herget di quest'ultimo propose all'Osservatorio di Roma di migliorare questa prima orbita di Jackson data dai seguenti elementi ⁽²⁾.

$$\begin{array}{ll} \tau = 1931 \text{ giugno } 12,00000 & i = 17^{\circ}, 69677 \\ M_0 = 260^{\circ}, 77905 & \varphi = 10^{\circ}, 36212 \\ \omega = 260^{\circ}, 61460 & n = 0^{\circ}, 228139 \\ \Omega = 101^{\circ}, 30141 & a = 2,65259 \end{array}$$

dove τ indica l'epoca in tempo medio di Greenwich (T. U.), M_0 l'anomalia media all'epoca, ω la distanza del perielio dal nodo ascendente dell'orbita planetaria sul piano dell'eclittica 1950, 0; Ω la longitudine del nodo stesso, i l'inclinazione dell'orbita sulla eclittica, φ l'angolo avente per seno l'eccentricità ($e = \sin \varphi$), n il noto medio diurno, ed a il semiasse maggiore dell'orbita valutato in unità astronomiche. A tale scopo, il prof. Herget inviava anche le perturbazioni calcolate con la macchina speciale a *punch-cards*.

2. Il prof. G. Armellini, direttore dell'Osservatorio di Roma, mi incaricò di rispondere al desiderio del prof. Herget, calcolando una nuova orbita migliorata. E a tale scopo anzitutto, servendomi della ricca biblioteca dell'osservatorio astronomico di Monte Mario e di altre indicazioni bibliografiche, gentilmente fornitemi dal prof. Kopff di Heidelberg, ho raccolto tutti i dati delle osservazioni eseguite sul pianetino Sheba, dati che riporto ora nella tabella I.

3. Indicando con X_{\odot} , Y_{\odot} , Z_{\odot} le coordinate cartesiane equatoriali geocentriche del Sole, con P_x , P_y , P_z , Q_x , Q_y , Q_z le componenti dei due vettori unitari \vec{P} e \vec{Q} diretti l'uno secondo l'asse maggiore dell'orbita planetaria verso il perielio, l'altro perpendicolarmente al primo nel piano dell'orbita, ho ridotto tutte le posizioni sopra indicate all'equinozio 1950,0 ed ho riportate le stesse sull'orbita preliminare, servendomi delle note formule (che sostanzial-

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1953.

(1) Cfr. *Union Circular*, vol. 88.

mente si riducono ad una trasformazione di coordinate dall'origine nel Sole, all'origine nella Terra) e cioè:

$$(1) \quad \begin{cases} \rho \cos \delta \cos \alpha = a P_x (\cos E - e) + b Q_x \sin E + X_{\odot} \\ \rho \cos \delta \sin \alpha = a P_y (\cos E - e) + b Q_y \sin E + Y_{\odot} \\ \rho \sin \delta = a P_z (\cos E - e) + b Q_z \sin E + Z_{\odot} \end{cases}$$

dove $\rho, \alpha, \delta, a, b, e, E$, rappresentano ordinatamente la distanza del pianetino della Terra, l'ascensione retta e la declinazione del pianetino stesso, il semiasse maggiore dell'orbita, il semiasse minore, l'eccentricità e l'anomalia eccentrica.

Ho determinato, inoltre, con un primo confronto, il tempo di luce (e cioè il tempo impiegato dalla luce per giungere di volta in volta dal pianeta alla Terra) onde correggere le osservazioni.

Ho poi trasformato le coordinate solari da geocentriche a topocentriche, per tener conto del piccolo effetto di parallasse.

Ciò posto, le perturbazioni inviatemi dal prof. Paul Herget sono date nel metodo di Hansen, e cioè comprendono:

1° perturbazione ΔM dell'anomalia media M ;

2° perturbazione $r v$ del raggio vettore r che dà la distanza del pianetino stesso dal Sole, calcolata sull'orbita osculatrice iniziale per un'anomalia media uguale ad $M + \Delta M$;

3° scostamento ζ perpendicolare al piano dell'orbita osculatrice indicata.

Le (1) divengono allora:

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= [a P_x (\cos E' - e) + b Q_x \sin E' + \zeta R_x] (1 + v) + X_{\odot} \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= [a P_y (\cos E' - e) + b Q_y \sin E' + \zeta R_y] (1 + v) + Y_{\odot} \\ \rho \sin \delta &= [a P_z (\cos E' - e) + b Q_z \sin E' + \zeta R_z] (1 + v) + Z_{\odot} \end{aligned}$$

dove R_x, R_y, R_z sono le componenti del vettore unitario \vec{R} normale al piano dell'orbita dal lato boreale, e dove l'anomalia eccentrica E' è calcolata per l'anomalia media $M + \Delta M$; cioè, come dall'equazione di Keplero: $E' = M + \Delta M + e \sin E'$.

Gli scarti $O - C$, tra i valori osservati delle coordinate del pianeta e quelli da me calcolati con queste formule, sia senza tener conto delle perturbazioni (primo confronto), sia tenendo conto delle perturbazioni (secondo confronto), pur essendo notevolmente ridotti, sono però tali da rendere necessario il miglioramento dell'orbita osculatrice iniziale. A tale scopo mi sono servita del metodo di Eckert e Brouwer⁽²⁾ consigliato dallo stesso Herget, usando, per le opposizioni in cui si ha un esteso periodo di osservazione, una osservazione al principio, una in mezzo ed una alla fine.

(2) Cfr. «Astronomical Journal», vol. 46, p. 125 e vol. 53, p. 15.

TABELLA I.

Data (T. U.)	α_0	δ_0	Eq.	Luogo	Autorità (1)
1931 mag. 21.86165	16 ^h 8 ^m .86	— 20° 33' 6"	1931.0	Johann.	RI 464 = BZ 1931.3 (oss. fotogr.)
1931 mag. 21.86165	16 ^h 8 ^m .86	— 20° 33' 6"	1931.0	"	AN 244 10.
1931 mag. 21.86165	16 ^h 8 ^m .86	— 20° 33' 6"	1931.0	"	UC 86
1931 mag. 21.86166	16 ^h 9 ^m .50 ^s	— 20° 36' 19" 5	1950.0	"	UC 89
1931 mag. 25.95589	16 ^h 5 ^m 53 ^s .55	— 20° 40' 52" 2	1950.0	"	"
1931 giug. 4.74141	15 ^h 56 ^m 31 ^s .38	— 30° 2' 26" 5	1950.0	"	"
1931 giug. 15.78471	15 ^h 46 ^m 55 ^s .58	— 30° 45' 3" 7	1950.0	"	"
1931 lugl. 2.71568	15 ^h 36 ^m 26 ^s .91	— 5° 23' 45" 0	1950.0	"	"
1932 sett. 26.92411	2 ^h 15 ^m .64	— 19° 11' 1	1950.0	"	RI 670
1934 febb. 9.90000	9 ^h 41 ^m .9	+ 31° 6'	1925.0	Algeri	JO 927
1934 febb. 9 ^h 22 ^m 13 ^m 30 ^s	9 ^h 42 ^m 25 ^s .83	+ 31° 4' 3" 8	1934.0	"	JO 18.79
1934 feb. 10.054877	9 ^h 42 ^m 18 ^s .14	+ 31° 5' 3" 6	1934.0	Uccle	RI 928
1934 feb. 10.05488	9 ^h 42 ^m 18 ^s .14	+ 31° 5' 3" 6	1934.0	"	BAB 1 296
1935 magg. 2.05547	14 ^h 31 ^m 22 ^s .91	+ 10° 19' 34" 6	1935.0	"	RI 1163 = BZ 1935 18
1935 magg. 2.06000	14 ^h 31 ^m 8 ^s	+ 10° 22'	1935.0	"	RI 1163 = BZ 1935 18
1937 dic. 24.93000	7 ^h 50 ^m 4 ^s	+ 23° 59'	1925.0	Nice	RI 1694 = BZ 1938 1
1937 dic. 26.94000	7 ^h 48 ^m 6 ^s	+ 24° 17'	1950.0	"	"
1937 dic. 29.90000	7 ^h 45 ^m 42 ^s	+ 24° 42'	1950.0	Turku	RI 1699
1937 dic. 29.90000	7 ^h 45 ^m 7	+ 24° 42'	1950.0	"	AN 267 115
1938 genn. 30 ^d 19 ^h 30 ^m 1 ^s	7 ^h 13 ^m .5	+ 28° 47'	1950.0	Berged.	RI 1705
1938 genn. 6.91419	7 ^h 37 ^m .7	+ 25° 52'	1950.0	Johann.	RI 1762
1938 genn. 6.91419	7 ^h 37 ^m .7	+ 25° 52'	1950.0	"	UC 101
1940 giug. 29.98000	18 ^h 24 ^m .4	— 20° 55'	1950.0	Nice	RI 2191
1940 giug. 30.94000	18 ^h 23 ^m .3	— 21° 3'	1950.0	"	"
1940 lugl. 5.85000	18 ^h 18 ^m .2	— 21° 43'	1950.0	Simeis	RI 2148
1940 lugl. 7.88000	18 ^h 16 ^m .1	— 22° 0'	1950.0	"	"
1948 magg. 6 ^d 20 ^h 52 ^m .5	15 ^h 2 ^m .4	+ 69° 41'	1950.0	"	"
1949 agos. 22.84825	22 ^h 30 ^m 7 ^s .33	+ 34° 38' 24" 4	1950.0	Johann.	Krim. Min. 4 198
1949 agos. 22.84825	22 ^h 30 ^m 7 ^s .33	— 34° 38' 24" 4	1950.0	"	UC 109
					MPC 315

MPC = Minor Planets Circular
 BAB = Bulletin Astronomique Belgique
 JO = Journal des Observatoires
 Krim. Min. = Krimeis. Min.

(1) AN = Astronomische Nachrichten
 UC = Union Circular
 RI = Rechen Institut
 BZ = Beobachtung Zirkular

5. Ho potuto quindi ottenere gli elementi corretti:

$$\begin{array}{ll} \tau = 1931 \text{ giugno } 12.00000 & i = 17^{\circ}.69016 \\ M_0 = 260^{\circ}.86698 & \varphi = 10^{\circ}.35450 \\ \omega = 260^{\circ}.52424 & n = 0^{\circ}.228136 \\ \Omega = 101^{\circ}.31341 & a = 2.65262 \end{array}$$

e le componenti vettoriali:

$$\begin{array}{ll} P_x = + 0.95375 & Q_x = - 0.03970 \\ P_y = + 0.14028 & Q_y = + 0.03547 \\ P_z = - 0.26586 & Q_z = + 0.35118 \end{array}$$

Calcolando le α e δ con questi nuovi elementi e confrontandole poi con le osservazioni, ho ottenuto i seguenti residui (O—C), tra i valori osservati e quelli calcolati:

Data	3° confronto		Data	3° confronto	
	$\alpha_{\text{oss}} - \alpha_{\text{calc}}$	$\delta_{\text{oss}} - \delta_{\text{calc}}$		$\alpha_{\text{oss}} - \alpha_{\text{calc}}$	$\delta_{\text{oss}} - \delta_{\text{calc}}$
<i>1931</i>			<i>1937</i>		
Magg. 21.86165	— 0° .01	0° .00	Dic. 24.93000	— 0° .03	+ 0° .01
Magg. 25.95589	— 0 .02	+ 0 .01	Dic. 26.94000	— 0 .08	+ 0 .01
Giug. 4.74141	— 0 .02	+ 0 .01	Dic. 29.90000	+ 0 .01	+ 0 .01
Giug. 15.78471	— 0 .02	+ 0 .01			
Lugl. 2.71568	— 0 .01	+ 0 .01	<i>1938</i>		
			Genn. 6.91419	+ 0 .04	— 0 .01
<i>1932</i>			Genn. 30.81251	+ 0 .04	0 .00
Sett. 26.92411	— 0 .25	— 0 .08	<i>1940</i>		
			Giug. 29.98000	+ 0 .07	+ 0 .01
<i>1934</i>			Giug. 30.94000	+ 0 .04	0 .00
Febbr. 9.90604	+ 0 .01	— 0 .02	Lugl. 5.85000	+ 0 .04	0 .00
Febbr. 10.084877	+ 0 .01	— 0 .01	Lugl. 7.88000	+ 0 .24	— 0 .01
<i>1935</i>			<i>1949</i>		
Magg. 2.05547	— 0 .01	0 .00	Agos. 22.84825	+ 0 .11	+ 0 .03

6. Come si vede, le osservazioni risultano assai meglio rappresentate su questa nuova orbita, ad eccezione di quella del 1932, di cui non abbiamo tenuto conto nel miglioramento, poiché forse erranea, e di quella del 7 luglio 1940, che evidentemente è inesatta, poiché presenta uno scarto notevolmente maggiore delle altre tre appartenenti alle stesse opposizioni.

Mi è grato porgere i più vivi ringraziamenti al prof. G. Armellini per avermi affidato l'incarico del prof. Herget ed anche alla dott.ssa T. Fortini per le gentili indicazioni relative al pianeta in oggetto.

Astronomia (Astrofisica). — *Un caso interessante di equipartizione di energia* ^(*). Nota ^(**) di MARIO GIROLAMO FRACASTORO, presentata dal Socio G. ABETTI.

Rivedendo nella letteratura alcuni articoli concernenti il problema delle *Novae*, abbiamo trovato una Nota classica di Ambarzumian e Kosirev ⁽¹⁾ nella quale si calcola la massa dell'involucro proiettato dalla stessa nella fase esplosiva del fenomeno. Questo valore viene determinato per due diverse vie: nella prima si fa l'ipotesi che l'involucro sia costituito di idrogeno o di elio o di una loro mescolanza e che la stella, prima dell'esplosione, sia una normale di tipo spettrale F; facendo alcune considerazioni circa il valore della profondità ottica dell'involucro nelle varie fasi dell'esplosione, la massa dell'involucro stesso risulta $m = 2,6 \times 10^{27}$ grammi, cioè circa un milionesimo di quella solare. Il secondo procedimento consiste nel determinare l'epoca in cui l'emissione propria dell'He II (λ 4686) raggiunge il massimo d'intensità. In questo caso, attraverso considerazioni non troppo complesse di spettroscopia e di fisica teorica, e sempre supponendo che la stella prima dell'esplosione sia una nana della sequenza principale, si trova per la massa dell'involucro $m = 6,5 \times 10^{28}$ grammi, cioè un valore circa 25 volte maggiore del precedente.

Gli Autori si dimostrano soddisfatti del grado di accordo fra i due valori e ne concludono che la massa dell'involucro emesso da una *Nova* normale deve essere dell'ordine di 10^{-5} volte quella del sole.

Altri metodi sono stati adottati da altri Autori e applicati a casi specifici ⁽²⁾; tuttavia ci sembra interessante di osservare che, senza introdurre relativamente alla stella nello stadio di *Praenova* alcuna ipotesi più restrittiva di quelle ammesse dagli altri Autori, si può giungere al valore della massa dell'involucro attraverso le seguenti considerazioni elementari.

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio di Arcetri-Firenze (Centro di studio per l'Astrofisica del C.N.R.).

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 settembre 1953.

(1) « Zeitschrift f. Astrophysik », Bd. 7, p. 320 (1933).

(2) *Harvard Tercentenary papers*, Nr. 2, 1936.

L'energia liberatasi dall'interno della stella è spesa in parte per produrre energia radiante, in parte per sollevare la massa dell'involucro al di sopra del livello fotosferico. Si fa l'ipotesi che *l'ordine di grandezza dei due diversi tipi di energia sia uguale* e che si sia quindi in presenza di un caso di equipartizione, abbastanza frequente in diversi processi fisici.

La massa m dell'involucro espulso deve essere molto piccola rispetto alla massa totale M della stella, dato che nello stato di *Postnova* la stella ritorna allo splendore iniziale. Questo involucro si porta ad una distanza molto grande (pari a $500 r_{\odot}$ per $V_{\text{esp}} = 1000 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1}$ in 10 anni), praticamente infinita; si avrà quindi una variazione nell'energia potenziale pari a

$$\Delta \Omega = + G \frac{Mm}{r}$$

dove G è la costante di gravitazione ed r il raggio della stella.

D'altra parte l'energia radiante liberata in più dalla stella durante tutto l'intervallo di tempo che va dall'esplosione fino al ritorno alla luminosità primitiva ammonta, per esempio nel caso della *Nova DQ Herculis* 1934, a circa 5×10^{44} erg. Nell'ipotesi suddetta che si abbia una equipartizione di energia, si potrà porre la variazione di energia potenziale $\Delta \Omega$ uguale all'energia W irradiata nello spazio, e cioè:

$$G \frac{Mm}{r} = W = 5 \times 10^{44} \text{ erg.}$$

Esprimendo tutto in unità CGS e ponendo $r = 7 \times 10^{10} \text{ cm} = r_{\odot}$; $M = 2 \times 10^{33} \text{ g} = M_{\odot}$ e finalmente $G = 7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot \text{sec}^{-2} \cdot \text{g}^{-1}$, si ottiene subito,

$$m = 2,5 \times 10^{20} \text{ g}$$

che è un valore circa doppio di quello calcolato, sempre per la *Nova Herculis*, da Whipple e Payne-Gaposchkin ⁽³⁾.

In generale W si può dedurre approssimativamente ammettendo che la *Nova* normale passi da una grandezza assoluta $+5^m$ ad una grandezza assoluta -7^m al massimo di splendore e che in media sia di grandezza assoluta 0^m cioè irradii 100 volte più del sole. Si assume anche che il fenomeno duri 10 anni, cioè $5,3 \times 10^6$ minuti. Ricordando allora il valore della costante solare $2 \text{ cal. cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$ e fatti i calcoli, risulta $W = 1,2 \times 10^{44}$ erg, valore un po' più basso di quello assunto per la *Nova Herculis*, che è una *Nova* di tipo lento con una erogazione di energia più prolungata. Di conseguenza il valore normale di m risulterebbe per questa via pari a circa 6×10^{28} grammi cioè praticamente identico a quello trovato col secondo procedimento di Ambarzumian e Kosirev.

Se poi nella (a) poniamo, invece dei parametri conosciuti per il Sole, quelli presunti per una nana bianca ⁽⁴⁾, allora otteniamo $m = 1,0 \times 10^{28}$ nel caso

(3) *Harvard Circulars*, Nr. 413, 1936.

(4) Ved. per esempio H. SIEDENTOPF, *Grundriss der Astrophysik*, p. 95.

della *Nova Herculis*, e corrispondentemente $m = 2,5 \times 10^{27}$ g per una *Nova* normale.

Naturalmente, poiché il nostro procedimento è basato esclusivamente sull'ipotesi che vi sia equipartizione di energia, non se ne può dedurre se la *Praenova* sia una nana bianca o una stella della sequenza principale. Tuttavia, anche per il fatto che nel caso di una *Supernova* la maggiore massa dell'involucro risulta col nostro metodo immediatamente, poiché l'erogazione di energia raggiante è corrispondentemente molto maggiore, ci è sembrato interessante di far presente questo procedimento per dedurre l'ordine di grandezza dell'involucro emesso da una *Nova*, quando ne sia conosciuta la curva di luce.

Astronomia. — *Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio di Monte Mario e confronto con i risultati ottenuti precedentemente da altri osservatori.* Nota ⁽¹⁾ di TERESA FORTINI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

1. Il prof. Silva ⁽²⁾, discutendo (insieme a precedenti osservazioni di osservatori diversi) alcune osservazioni di latitudine eseguite in primo verticale dal compianto prof. A. Di Legge all'inizio del 1900 a M. Mario, presso la Torre del Primo Meridiano d'Italia, aveva assegnato per il punto fondamentale F di M. Mario la latitudine (riferita al polo medio):

$$\varphi_F = 41^\circ 55' 25'', 51.$$

Dopo il trasferimento definitivo della Specola Romana sulla vetta di Monte Mario presso il punto fondamentale anzidetto, facendo seguito alla attività in corso da circa un secolo presso l'Osservatorio del Campidoglio ⁽³⁾ per mettere in luce eventuali variazioni secolari della verticale, il prof. Cimino ⁽⁴⁾ ha eseguito nel 1939, mediante il metodo di Talcott e servendosi di stelle scelte dal General Catalogue del Boss, una determinazione di latitudine del pilastro dello strumento dei passaggi di Bamberg situato nel giardino dell'Osservatorio.

Il valore da lui trovato e riportato al punto fondamentale medesimo, mediante un piccolo collegamento trigonometrico ⁽⁴⁾ (data la breve distanza) è il seguente:

$$\varphi_F = 41^\circ 55' 25'', 11 \pm 0'', 017$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1953.

(1) Cfr. G. SILVA, *Verbali della 40ª Riunione plenaria della R. Commissione Geod. Ital.*, 1940, pp. 45-50.

(2) Cfr. M. CRENN, *Osservazioni sopra le variazioni della latitudine del Campidoglio*. « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », serie VI, vol. I (1925).

(3) Cfr. M. CIMINO, *Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Roma su M. Mario*. « Rendiconti dell'Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I (1939).

(4) Cfr. M. CIMINO, *Collegamento trigonometrico degli strumenti dei passaggi del R. Osserv. di Roma col punto fondamentale di M. Mario*. « Memorie dell'Acc. d'Italia », ser. VII, vol. IV, fasc. 6 (1942).

che, essendo sempre riferito al polo medio, è di circa $0'',4$ inferiore a quello assegnato dal prof. Silva.

2. Il piccolo divario riscontrato poteva attribuirsi o ad uno spostamento locale della verticale, o con più probabilità, almeno in parte, al sistema di declinazioni adottato.

Una nuova determinazione di latitudine ⁽⁵⁾ eseguita nel 1943 dal Cimino stesso in primo verticale, mediante il metodo di Struwe, fornisce i due risultati (questa volta riferiti al polo istantaneo all'epoca 1943,27):

$$\varphi_F = 41^\circ 55' 25'',64 \pm 0'',015$$

(con declinazioni ricavate dal Dritter Fundamentalkatalog (F. K. 3.) e

$$\varphi_F = 41^\circ 55' 25'',48 \pm 0'',014$$

(con declinazioni ricavate dal Gen. Cat. del Boss).

Questa mia nuova determinazione di latitudine in meridiano mediante il metodo di Talcott, che viene a far seguito ad una distanza di circa 10 anni all'attività di cui ho parlato, dà per il centro della cupola del Bamberg la latitudine

$$\varphi_B = 41^\circ 55' 19'',44 \pm 0'',03$$

riferita al polo istantaneo (1953,67).

Aggiungendo la quantità $+6'',27$ si ottiene la latitudine del punto fondamentale F, riferita sempre al polo istantaneo alla stessa epoca

$$\varphi_F = 41^\circ 55' 25'',71 \pm 0'',03.$$

Sebbene non possa ancora stabilirsi la riduzione al polo medio (non conoscendosi la polodia), è evidente che tale valore è in buon accordo con quelli ricavati dal Cimino dalle osservazioni in primo verticale (sistema F.K. 3.) ed abbastanza vicino anche al valore medio assegnato dal Silva. Un giudizio definitivo potrà essere dato dopo la riduzione al polo medio.

3. Indicando con δ_S la declinazione di una stella a sud dello Zenit e con δ_N la declinazione di una stella a nord, come è noto, la relazione basilare del metodo di Talcott è la seguente:

$$(1) \quad \varphi = \frac{\delta_S + \delta_N}{2} + \frac{(m_S - m_N)}{2} R + \frac{r_S - r_N}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2} d + C_p$$

dove il primo termine è la semisomma delle declinazioni apparenti dei due astri osservati; il secondo termine la semidifferenza delle distanze zenitali, misurata mediante un micrometro di precisione il cui passo angolare è indi-

(5) Cfr. M. CIMINO, *Nuova determinazione della latitudine dell'Oss. Astronomico di Roma su M. Mario, eseguita in primo verticale.* « Rendiconti dell'Acc. Nazionale dei Lincei », ser. VIII, vol. I.

cato con R e le cui letture con m_s e m_N ; il terzo termine è la semidifferenza per le correzioni della rifrazione; il quarto termine è la semidifferenza delle posizioni l_1 e l_2 del centro della livella Talcottiana, prima e dopo il rovesciamento, moltiplicata per il valore angolare d di una divisione della livella. Tale termine serve a correggere una eventuale piccola rotazione dell'asse dello strumento, che può verificarsi durante il rovesciamento del cannocchiale.

A questi, quando come generalmente avviene, alcune puntate vengono fatte fuori del meridiano, va aggiunto il termine di correzione C_p per tenere conto della curvatura del parallelo.

4. Per la descrizione dello strumento dei passaggi da me adoperato, che è un invertibile Bamberg modello grande ($\phi = 88$ mm. $F = 950$ mm.) a cannocchiale spezzato, posto nel giardino dell'Osservatorio, rimando senz'altro alla Nota già citata del prof. Cimino ⁽⁴⁾.

Qui ricordo solamente che per le osservazioni ho usato un oculare di circa 100 ingrandimenti e che avendo osservato ad una temperatura media di 21° - 22° , ho usato per il valore angolare del passo della vite micrometrica, quello determinato dal Cimino alla stessa temperatura e cioè:

$$R = 56'',708.$$

I fili orari del micrometro sono distribuiti in tre fascetti di cinque fili ciascuno. Le osservazioni di ogni stella sono state fatte mediante 5 bisezioni: tre al quarto, ottavo e dodicesimo filo e due a metà degli intervalli tra il primo e il secondo e il secondo e terzo fascetto. La distanza tra i fili laterali e i punti medi degli intervalli dal centro è risultata di $19^s,75$ e $12^s,1$ rispettivamente.

Per la divisione della livella talcottiana ho adottato il valore angolare:

$$d = 1'' 209 \pm 0'',0011$$

che è quello trovato più volte da altri osservatori e più recentemente dal Gialanella ⁽⁶⁾ al Campidoglio.

Ho avuto cura, nel rovesciamento, di non cambiare il fuoco dello strumento, come pure ho procurato che per ogni coppia il numero delle osservazioni iniziate con l'oculare ad est eguagliasse il numero delle osservazioni iniziate con l'oculare ad ovest. Inoltre ho scelto le stelle in modo che la somma delle distanze zenitali a sud dello zenith fosse uguale alla somma delle distanze di quelle a nord, giacché in tal modo, nelle medie delle latitudini, si riduce al minimo l'influenza del termine di rifrazione, come pure viene eliminato un eventuale errore del valore di un giro della vite micrometrica.

⁽⁶⁾ Cfr. L. GIALANELLA, *Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio*. «Contributi Scientifici del R. Osserv. di Roma» (nuova serie), n. 45 (1934).

5. Ho ricavato le coppie dal Catalogo dell'Istituto di Astronomia Teorica dell'Accademia di Scienze dell'U.S.S.R.

Tale catalogo contiene circa 2000 stelle scelte per il programma di osservazione di latitudine col metodo di Talcott, tutte appartenenti all'F. K. 3. o al General Catalogue del Boss e riferite all'F. K. 3. mediante le tabelle di riduzione compilate dal Kopff⁽⁷⁾. Le posizioni stellari sono date al 1950, e insieme ai termini per la precessione sono dati i moti propri in declinazione come pure le costanti stellari, necessarie per la riduzione delle posizioni a luoghi apparenti, e le loro variazioni annuali.

Le riduzioni a posizioni apparenti per l'istante di osservazione sono state fatte tenendo conto dei termini lunari a breve periodo. Ho eseguito tutti i calcoli due volte, in collaborazione con il calcolatore Ing. R. Flamini, dell'Osservatorio di Roma.

6. Qui appresso nella tabella I sono riportate per ogni stella delle diverse coppie il numero del General Catalogue del Boss, la grandezza apparente e le posizioni al 1953.

TABELLA I.

n. G.C.	m.	$\alpha_{(1953)}$	$\delta_{(1953)}$	N. Coppia	n. G.C.	m.	$\alpha_{(1953)}$	$\delta_{(1953)}$
1335	5,8	17 ^h 19 ^m 18,4	46° 17' 9",91	7	1510	6,1	19 ^h 13 ^m 35,2	30° 26' 35",36
1340	4,5	17 22 4,6	37 11 16,91		1518	4,0	19 10 1,0	53 16 51,77
1369	5,7	17 43 0,3	53 49 14,76	8	1545	5,3	19 35 9,2	42 18 31,44
1390	4,5	17 56 42,2	30 11 31,42		1558	6,0	19 42 10,8	41 39 33,51
1416	5,0	18 10 8,0	31 23 32,41	9	1608	5,1	20 4 53,2	23 28 40,12
1442	5,4	18 32 32,7	52 18 56,00		1622	6,2	20 12 35,9	60 29 46,91
1449	5,6	18 37 8,0	62 29 0,18	10	1643	5,8	20 23 35,8	21 15 19,27
1464	5,3	18 50 15,9	21 22 1,91		1648	4,3	20 28 47,7	62 50 8,64
1471	4,5	18 52 51,5	36 50 16,72	11	1672	5,4	20 40 45,6	50 10 13,94
1491	5,1	19 0 6,5	46 52 2,23		1677	2,6	20 44 18,5	33 47 35,75
1494	5,4	19 3 51,8	53 19 25,82					
1510	6,1	19 13 35,2	30 26 35,36					

Nella Tabella II sono riportate per ogni coppia le diverse osservazioni indicando per ognuna la data, la posizione dell'oculare durante l'osservazione della prima stella di ogni coppia, la semisomma delle declinazioni apparenti delle due stelle, la semidifferenza delle letture al micrometro e le correzioni per la livella, la rifrazione e la correzione per la curvatura del parallelo⁽⁸⁾ ed infine la latitudine φ_B osservata.

(7) A. KOPFF, *Tafeln zur Reduktion des Systems des General Catalogue auf das System des F. K. 3.*

(8) I termini per le correzioni della rifrazione e la curvatura del parallelo sono stati ricavati dall'ALBRECHT, *Formeln und Hilfstafeln*, Leipzig 1908, pp. 67-70.

TABELLA II.

N. Coppia	Data 1953	O.	δ_m (app.)	$\Delta l_{micr.}$	C_l	C_r	C_p	φ_B
1	20 VIII 25 »	W W	41° 44' 21",98 22 ,30	+ 10' 55",86 56 ,71	+ 0",78 + 0 ,81	+ 0",19 »	+ 0",10 »	41°,5 18",9 20 ,1
2	14 VIII 18 » 19 » 24 »	W W W E	42 0 31 ,86 32 ,64 32 ,80 33 ,32	- 5 11 ,96 13 ,13 13 ,19 13 ,97	0 ,00 - 0 ,06 + 0 ,24 - 0 ,60	- 0 ,09 » » »	+ 0 ,11 » » »	19 ,9 19 ,4 19 ,8 18 ,7
3	14 VIII 18 » 20 » 24 » 25 » 28 » 29 » 14 IX	E E W W W E E W	41 51 24 ,27 25 ,19 25 ,58 26 ,11 26 ,24 26 ,76 26 ,95 28 ,75	+ 3 55 ,04 53 ,84 53 ,58 53 ,22 52 ,82 53 ,38 52 ,43 50 ,13	+ 0 ,06 - 0 ,09 0 ,00 + 0 ,30 + 0 ,60 + 0 ,06 + 0 ,06 + 0 ,12	+ 0 ,07 » » » » » » »	+ 0 ,11 » » » » » » »	19 ,5 19 ,1 19 ,3 19 ,8 19 ,8 20 ,2 19 ,5 19 ,18
4	14 VIII 18 » 19 » 20 » 24 » 28 » 29 » 8 IX 9 » 12 » 21 »	W W W E E W W W W E E	41 55 41 ,66 42 ,62 42 ,82 43 ,01 43 ,59 44 ,26 44 ,46 45 ,74 45 ,84 46 ,22 47 ,16	- 22 ,44 23 ,93 23 ,44 23 ,90 24 ,56 24 ,02 24 ,78 27 ,02 26 ,25 27 ,42 27 ,38	+ 0 ,15 0 ,00 - 0 ,06 - 0 ,06 - 0 ,27 - 0 ,30 - 0 ,30 0 ,00 0 ,03 0 ,00 + 0 ,09	- 0 ,01 » » » » » » » » » »	+ 0 ,13 » » » » » » » » » »	19 ,4 18 ,8 19 ,4 19 ,1 18 ,8 20 ,0 19 ,5 18 ,8 19 ,7 18 ,9 19 ,9
5	19 VIII 24 » 25 » 29 » 8 IX 12 »	E W W E E W	41 51 22 ,47 23 ,38 23 ,54 24 ,37 25 ,89 26 ,46	+ 3 56 ,42 55 ,18 54 ,99 54 ,61 52 ,06 51 ,99	+ 0 ,60 + 1 ,08 + 0 ,60 0 ,00 + 0 ,45 - 0 ,06	+ 0 ,07 » » » » »	+ 0 ,10 » » » » »	19 ,6 19 ,8 19 ,3 19 ,1 18 ,5 18 ,5
6	18 VIII 19 » 24 » 25 » 28 » 29 » 8 IX 9 » 12 »	W W E E W W W W E	41 53 13 ,72 13 ,98 14 ,93 15 ,10 15 ,72 15 ,96 17 ,57 17 ,70 18 ,17	+ 2 5 ,07 4 ,67 4 ,60 4 ,62 4 ,08 3 ,49 2 ,00 1 ,72 1 ,18	+ 0 ,24 + 0 ,57 - 0 ,63 - 0 ,09 + 0 ,12 0 ,00 0 ,00 + 0 ,06 - 0 ,06	+ 0 ,03 » » » » » » » »	+ 0 ,11 » » » » » » » »	19 ,1 19 ,3 19 ,0 19 ,7 20 ,0 19 ,5 19 ,7 19 ,6 19 ,4
7	24 VIII 25 » 28 » 9 IX 12 » 14 »	W W E E W W	41 51 58 ,16 58 ,33 58 ,97 52 1 ,04 1 ,52 1 ,87	+ 3 21 ,74 21 ,90 19 ,61 17 ,24 17 ,42 19 ,40	+ 0 ,06 - 1 ,47 0 ,00 + 1 ,14 0 ,36 - 2 ,25	+ 0 ,06 » » » » »	+ 0 ,11 » » » » »	20 ,1 18 ,9 18 ,7 19 ,5 19 ,4 19 ,1
8	24 VIII 29 »	E W	41 59 18 ,33 19 ,49	- 4 0 ,29 0 ,71	+ 0 ,42 + 0 ,07	- 0 ,07 »	+ 0 ,10 »	18 ,4 18 ,8

Segue TABELLA II.

N. coppia	Data 1953	O.	δ_m (app)	Δl micr.	C_l	C_r	C_p	φ_B
8	9 IX	W	41° 59' 21",61	-4' 2",79	+ 0",42	- 0",07	+ 0",10	41°,55 19",27
	12 »	E	22 ,16	3 ,73	+ 0 ,12	»	»	18 ,58
	17 »	E	23 ,06	3 ,71	- 0 ,27	»	»	19 ,11
9	29 VIII	W	41 59 31 ,05	-4 12 ,06	+ 0 ,12	- 0 ,08	+ 0 ,11	19 ,14
	12 IX	E	33 ,97	13 ,49	- 0 ,15	»	»	20 ,36
	14 »	E	34 ,40	14 ,18	0 ,00	»	»	20 ,25
	17 »	W	37 ,99	15 ,88	+ 0 ,19	»	»	19 ,33
	21 »	W	35 ,57	15 ,28	0 ,00	»	»	20 ,32
10	29 VIII	W	42 3 1 ,96	-7 41 ,09	- 1 ,20	- 0 ,15	+ 0 ,17	19 ,69
	12 IX	E	3 5 ,02	44 ,96	- 0 ,60	»	»	19 ,48
	14 IX	E	5 ,22	45 ,82	0 ,00	»	»	19 ,42
	21 »	W	6 ,86	47 ,17	+ 0 ,15	»	»	19 ,86
11	8 IX	W	41 59 16 ,65	-3 57 ,40	0 ,00	- 0 ,06	+ 0 ,13	19 ,32
	12 »	W	17 ,44	58 ,38	0 ,00	»	»	19 ,13
	17 »	E	18 ,64	57 ,89	- 0 ,60	»	»	20 ,22
	21 »	E	19 ,43	59 ,83	+ 0 ,60	»	»	20 ,27

Si hanno quindi per le singole coppie i valori di φ dati dalla Tabella seguente dove N indica il numero delle coppie, n il numero delle misure eseguite, τ la data media a cui si riferiscono e ε l'errore medio della media

TABELLA III.

N. Coppia	n	τ	φ_B	ε	N. Coppia	n	τ	φ_B	ε
			41°,55'					41°,55'	
1	2	1953,65	19",51	0",60	7	6	1953,66	19",34	0",20
2	4	1953,64	19 ,51	0 ,27	8	5	1953,70	18 ,87	0 ,15
3	8	1953,66	19 ,57	0 ,13	9	5	1953,71	19 ,88	0 ,27
4	11	1953,67	19 ,35	0 ,14	10	4	1953,71	19 ,62	0 ,10
5	6	1953,66	19 ,18	0 ,21	11	4	1953,71	19 ,73	0 ,30
6	9	1953,66	19 ,53	0 ,10					

7. Eseguendo le medie ponderate si ha, come abbiamo già visto, per la latitudine del pilastro del Bamberg:

$$\varphi_B = 41^\circ 55' 19'',44 \pm 0'',03$$

da cui otteniamo per la latitudine del punto fondamentale (Torre del Primo Meridiano d'Italia):

$$\varphi_F = 41^\circ 55' 25'',71 \pm 0'',03$$

riferite sempre al polo istantaneo 1953,67.

Fisica-matematica (Elettrotecnica). — *Impedenza dei conduttori cilindrici pieni e cavi alle correnti ad impulso* ^(*). Nota ^(**) di DINO ZANOBETTI, presentata dal Socio Q. MAJORANA.

1. In una Nota precedente ⁽¹⁾ ho ricavato i valori istantanei della densità di corrente e della intensità di corrente in un conduttore cilindrico pieno e cavo sottoposto bruscamente ad un campo elettrico sinusoidale agente in direzione dell'asse.

Scopo di quella Nota era di mettere in evidenza quantitativa la componente transitoria per rendere ragione della maggiore impedenza — intesa come rapporto tra i valori istantanei della d.d.p. e della corrente — offerta dai conduttori nei primissimi istanti successivi alla applicazione del c. e.

Il problema acquista una rilevante importanza quando il valore dell'impedenza in tali primissimi istanti debba essere noto con grande precisione: è questo il caso, già allora citato, degli shunt adoperati per la misura delle correnti ad impulso.

Poiché si tratta di d.d.p. impulsive riconducibili a somme di termini esponenziali, in luogo di scomporre il c. e. impresso in una somma di termini sinusoidali ed applicare le relazioni allora trovate, risulta più semplice impostare direttamente il problema della ricerca della impedenza opposta ad un c. e. impresso della forma

$$(1) \quad e(t) = E(e^{-\beta t} - e^{-\eta t}), \quad \beta \neq \eta.$$

2. Consideriamo ancora un conduttore cilindrico di sezione circolare di raggio a , conducibilità γ , permeabilità μ , circondato da un dielettrico di permeabilità μ' . Il conduttore di ritorno sia ancora un cilindro coassiale col primo, di conducibilità elettrica infinita, di raggio interno $a' > a$; di esso non occorre considerare il raggio esterno.

L'applicazione del teorema d'inversione alla (11) della Nota precedente che qui riscriviamo in forma leggermente diversa

$$(2) \quad G^*(r, s) = \gamma e^*(s) \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a) - h \alpha a J_1(\alpha a)},$$

$$\alpha^2 = -\mu \gamma s, \quad h = \frac{\mu'}{\mu} \ln \frac{a'}{a}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad s > 0,$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Elettrotecnica e delle Comunicazioni Elettriche dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1953.

(1) Sul periodo transiente dello « skin effect », questi « Rendiconti » (VIII), XIV, 791, (1953).

porta a scrivere nel caso in esame

$$(3) \quad G(r, t) = \frac{\gamma E}{2\pi j} \int_{\epsilon-j\infty}^{\epsilon+j\infty} \exp st \frac{q-p}{(z+p)(z+q)} \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a) - h\beta a J_1(\beta a)} dz$$

$$\beta^2 = -\mu\gamma z \quad , \quad z > 0.$$

Si può anche qui osservare che l'integrando è una funzione univoca di z e che è possibile ricondurre l'integrale alla somma dei residui dell'integrando ai poli.

Si hanno poli semplici per

$$a) \quad z = -p \quad \text{ossia} \quad \beta = (\gamma\mu p)^{1/2} = k_1$$

$$b) \quad z = -q \quad \text{ossia} \quad \beta = (\gamma\mu q)^{1/2} = k_2$$

$$c) \quad \beta = \delta_n \quad \text{ossia} \quad z = -\frac{\delta_n^2}{\mu\gamma} \quad \text{dove con } \delta_n \text{ si indicano al solito le radici di}$$

$$(4) \quad J_0(\delta a) = h\delta a J_1(\delta a).$$

Risulta semplicemente

$$(5) \quad G(r, t) = \gamma E \left\{ \frac{J_0(k_1 r) \exp p t}{J_0(k_1 a) - h k_1 a J_1(k_1 a)} - \frac{J_0(k_2 r) \exp q t}{J_0(k_2 a) - h k_2 a J_1(k_2 a)} + \right.$$

$$\left. + 2\mu\gamma h (q-p) \sum_n \frac{\delta_n^2}{(k_1^2 - \delta_n^2)(k_2^2 - \delta_n^2)} \frac{J_0(\delta_n r) \exp -\frac{\delta_n^2}{\mu\gamma} t}{(1 + h^2 \delta_n^2 a^2) J_0(\delta_n a)} \right\}$$

e per la intensità di corrente

$$(6) \quad i(t) = 2\pi \int_0^a G(r, t) r dr =$$

$$= 2\pi\gamma a^2 E \left\{ \frac{J_1(k_1 a) \exp p t}{a k_1 J_0(k_1 a) - h k_1^2 a^2 J_1(k_1 a)} - \frac{J_1(k_2 a) \exp q t}{a k_2 J_0(k_2 a) - h k_2^2 a^2 J_1(k_2 a)} + \right.$$

$$\left. + 2\mu\gamma \frac{q-p}{a^2} \sum_n \frac{\exp -\frac{\delta_n^2}{\mu\gamma} t}{(k_1^2 - \delta_n^2)(k_2^2 - \delta_n^2)(1 + h^2 \delta_n^2 a^2)} \right\}.$$

3. In realtà nella tecnica della misura delle correnti ad impulso si adottano shunt costituiti da conduttori cilindrici cavi.

La (18) della Nota precedente, in cui si fa un semplice cambiamento di notazioni

$$(7) \quad G^*(r, s) = \gamma e^*(s) \frac{J_0(ax) - Y_1(xb) Y_0(ax)}{J_0(xa) - Y_1(xb) Y_0(xa) + hxa [J_1(xa) - Y_1(xb) Y_1(xa)]}$$

$$\alpha^2 = -\mu\gamma s \quad , \quad Y_1(x) = \frac{J_1(x)}{Y_1(x)} \quad , \quad b \leq r \leq a \quad , \quad s > 0;$$

può ancora essere trasformata facendo uso del teorema d'inversione e di quello dei residui.

I poli sono, oltre ai due del caso precedente, quelli che risultano dalla sostituzione $\beta = \lambda_n$ dove con λ_n si indicano le radici dell'equazione

$$(8) \quad [J_0(\lambda a) - h\lambda a J_1(\lambda a)] Y_1(\lambda b) = [Y_0(\lambda a) - h\lambda a Y_1(\lambda a)] J_1(\lambda b).$$

Il calcolo dei residui è relativamente laborioso: nel fare la derivata del denominatore dell'integrando occorre tenere a mente la (8), ricordare la formula di ricorrenza delle funzioni cilindriche

$$x C'_n(x) = -n C_n(x) + x C_{n-1}(x)$$

e che

$$J_n(x) Y'_n(x) - Y_n(x) J'_n(x) = 2/\pi x.$$

Risulta:

$$(9) \quad G(r, t) = \gamma E \left\{ \frac{J_0(k_1 r) - \Psi_1(k_1 b) Y_0(k_1 r)}{J_0(k_1 a) - h k_1 a J_1(k_1 a) - \Psi_1(k_1 b) [Y_0(k_1 a) - h k_1 a Y_1(k_1 a)]} \exp p t - \right. \\ \left. - \frac{J_0(k_2 r) - \Psi_1(k_2 b) Y_0(k_2 r)}{J_0(k_2 a) - h k_2 a J_1(k_2 a) - \Psi_1(k_2 b) [Y_0(k_2 a) - h k_2 a Y_1(k_2 a)]} \exp q t + \right. \\ \left. + \pi \mu \gamma (q - p) \sum_n^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n b)}{(k_1^2 - \lambda_n^2)(k_2^2 - \lambda_n^2)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{[Y_0(\lambda_n a) - h \lambda_n a Y_1(\lambda_n a)] J_0(\lambda_n r) - [J_0(\lambda_n a) - h \lambda_n a J_1(\lambda_n a)] Y_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n b) (1 + h^2 \lambda_n^2 a^2) - [J_0(\lambda_n a) - h \lambda_n a J_1(\lambda_n a)]^2} \exp \frac{\lambda_n^2}{\mu \gamma} t \right\}.$$

ed infine:

$$(10) \quad i(t) = 2 \pi \gamma a^2 E \left\{ \frac{[J_1(k_1 a) - \Psi_1(k_1 b) Y_1(k_1 a)] \exp p t}{k_1 a \{J_0(k_1 a) - h k_1 a J_1(k_1 a) - \Psi_1(k_1 b) [Y_0(k_1 a) - h k_1 a Y_1(k_1 a)]\}} + \right. \\ \left. - \frac{[J_1(k_2 a) - \Psi_1(k_2 b) Y_1(k_2 a)] \exp q t}{k_2 a \{J_0(k_2 a) - h k_2 a J_1(k_2 a) - \Psi_1(k_2 b) [Y_0(k_2 a) - h k_2 a Y_1(k_2 a)]\}} + \right. \\ \left. + 2 \frac{k_2^2 - k_1^2}{a^2} \sum_n^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n b)}{[J_0(\lambda_n a) - h \lambda_n a J_1(\lambda_n a)]^2 + (1 + h^2 \lambda_n^2 a^2) J_1^2(\lambda_n b)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{\exp \frac{\lambda_n^2}{\mu \gamma} t}{(k_1^2 - \lambda_n^2)(k_2^2 - \lambda_n^2)} \right\}.$$

Mi riservo di svolgere in altra sede la valutazione numerica dell'impedenza degli shunt attualmente in uso per la misura delle correnti ad impulso.

Ringrazio vivamente il sig. G. Santi che si è assunto il faticoso compito di rivedere e controllare tutti gli sviluppi del calcolo.

Mineralogia. — *I minerali del gruppo dell'Ortler-VII-Microclino della pegmatite di Val Martello e sua solubilità* (*). Nota (**) di ANNA MARIA TOMBA, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

La pegmatite granitica della Val Martello è nota da molto tempo, dato che forma una massa lenticolare irregolare notevolmente vasta, affiorante in prossimità del fondo valle. Durante i rilevamenti condotti nella zona nel 1933 il prof. C. Andreatta ha avuto occasione di raccogliere numerosi campioni contenenti cristalli di notevoli dimensioni di feldispati, di mica e di tormalina. I cristalli feldispatici raggiungono dimensioni di vari decimetri di diametro.

In questa Nota espongo i risultati dello studio dei grossi individui di microclino. Essi risultano bianco-grigiastri, di lucentezza vitrea, madreperlacea su (001), con sfaldature nette secondo i piani caratteristici, talora riempite da lamelline di sericite, da granuli di quarzo e da ossidi di ferro. Il *peso specifico*, media di 10 determinazioni (di cui 5 con il metodo del picnometro e 5 con quello dei liquidi pesanti, usando una soluzione di Thoulet) è risultato 2,682.

Al microscopio i frammenti cristallini si presentano quasi incolori, con fitte sfaldature e con la evidentissima nota geminazione secondo la legge dell'albite e del pericline associate. Con miscele opportune di olio di cedro ed essenza di garofano, usando luce gialla monocromatica, ho determinato gli *indici di rifrazione*, i cui valori medi sono i seguenti:

$$\alpha = 1,518 \pm 0,002$$

$$\beta = 1,522 \pm 0,002 \quad \gamma - \alpha = 0,007$$

$$\gamma = 1,525 \pm 0,002$$

L'angolo di estinzione su (001) è risultato di 15° e quello su (010) di 5° , il primo ed il secondo valore rappresentanti la media di 10 determinazioni. La dispersione è debole con $\rho > \nu$.

Circa la determinazione del $2V$, importantissima per la specificazione del microclino, notai che è molto delicata. La bibliografia, infatti, non è concorde nei valori. Mentre K. Chudoba⁽¹⁾ e A. N. Winchell⁽²⁾ danno $2V = 83^\circ \pm 2$, A. F. Rogers-P. F. Kerr⁽³⁾ riportano $2V$ variabile da 77° a 84° .

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1953.

(1) K. CHUDOBA, *Die Feldspäte und ihre praktische Bestimmung*, Stuttgart, 1932.

(2) A. N. WINCHELL, *Elements of optical Mineralogy*, New York, 1948.

(3) A. F. ROGERS-P. F. KERR, *Optical Mineralogy*, New York and London, 1942.

D'altra parte, nei miei frammenti cristallini osservai subito un vasto campo di oscurità a nicols incrociati, per cui riusciva difficile cogliere con precisione il punto di maggiore profondità di esso. Operai, quindi, su due magnifiche sezioni sottili, opportunamente orientate, tagliate normalmente l'una rispetto all'altra. Con l'aiuto del T.U. determinai, su due cristalli di entrambe, appartenenti a due diverse serie di lamelle di geminazione, il valore di $2V$. Su ciascuno dei 4 cristalli esaminati eseguii, con la massima cura e precisione possibile, 10 proiezioni degli elementi dell'indicatrice. Ottenni in tutte le 40 determinazioni dei valori abbastanza concordi e soddisfacenti del valore di $2V$, che fu sempre calcolato. Il valore medio risultò:

$$-2V = 81^\circ \pm 2.$$

Concresciuti con i cristalli di microclino, in modo da formare la tipica associazione pertitica (vedi figura), sono dei plagioclasti, geminati secondo la legge dell'albite, che appaiono sotto forma di listerelle allungate a mo'

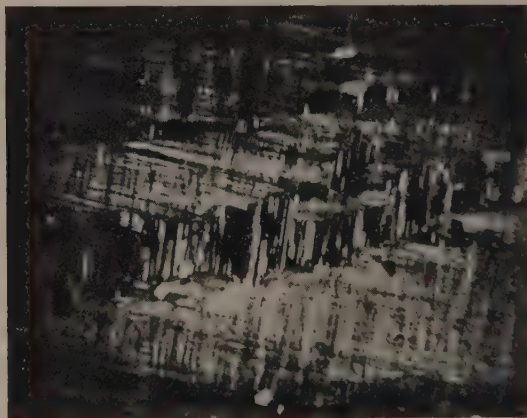


Fig. 1.

di fibrille. Gli individui cristallini molto spesso sono scivolati l'uno sull'altro. La loro lunghezza va da mm. 0,1 fino a poco più di mm. 1. La proiezione stereografica, frutto di attenta osservazione microscopica con l'aiuto del T.U., è stata compiuta su 2 individui, appartenenti alle 2 serie, e la determinazione degli assi dell'indicatrice è stata fatta per ogni asse 10 volte, in modo da cogliere l'*optimum* con la media dei valori. La legge di geminazione albite è apparsa evidente. 10 determinazioni ho pure eseguito per conoscere il valore dell'angolo massimo di estinzione simmetrica in zona normale a (010) uguale a $17^\circ \pm 2$. Su 10 cristalli, scelti tra i grandi ed i piccoli, ho cercato anche il valore di $2V$, compiendo su ciascun individuo 3 determinazioni. La media di tali valori è risultata $+2V = 71^\circ \pm 2$.

Questo valore convalida quello dell'angolo massimo di estinzione simmetrica suddetto, che risulta negativo. Si può concludere con sicurezza che si tratta di albite quasi pura. La proiezione stereografica, eseguita anche su 2 cristalli, contigui all'albite, appartenenti pure essi alle 2 diverse serie, ha dimostrato l'isorientazione del microclino.

Entro le incrinature di sfaldatura esistono inclusioni varie: finissimi cristallini squamosi di sericite, con le tipiche proprietà ottiche, granuletti di quarzo, pigmentazioni di ossidi di ferro e di minerali argillosi.

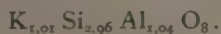
Ho scelto con la massima cura possibile i frammenti più puri. Ho poi eseguito completamente 5 analisi, in tempi diversi, usando polveri provenienti da porzioni diverse, mescolando profondamente, al fine di ottenere per i vari ossidi dei valori corrispondenti il più possibile ai valori della pertite. Sono risultati i seguenti:

	%	Quozienti molecolari	Albite	Anortite	Feldispato potassico
SiO ₂	64,15	1,0681	0,1548	0,0174	0,8959
Al ₂ O ₃	19,56	0,1919	0,0258	0,0087	0,1574
MnO	ass.				
Fe ₂ O ₃	0,11				
MgO	0,04				
CaO	0,49	0,0087		0,0087	
K ₂ O	14,43	0,1532			0,1532
Na ₂ O	1,60	0,0258	0,0258		
H ₂ O ⁺	0,10				
H ₂ O ⁻	0,03				
<hr/>					
	100,51				

Nella tabella seguente riporto il numero degli atomi metallici ed i rapporti tra i quozienti atomici, posta la somma dei cationi Si₃ + Al = 4, secondo la formula teorica K Si₃AlO₈:

Si	0,8959	2,9606
Al	0,3148	1,0403
K	0,3064	1,0125

La formula chimica del microclino studiato risulta quindi:



Gli indici dei metalli si presentano con valori soddisfacenti.

Le percentuali dei singoli composti della pertite risultano così ripartiti:

albite	14,13 %
anortite	2,86 %
microclino	83,01 %

Al fine di conoscere il potere solvente dell'acqua sui vari ioni, costituenti l'edificio spaziale del feldispato potassico, ho eseguito un'esperienza di solubilità. Ho lavato gr. 5 di minerale, polverizzato non molto finemente, entro un filtro a pori finissimi, con acqua distillata per la durata di 15 giorni. Quindi ho determinato quantitativamente i componenti passati in soluzione. Nella tabella riporto i pesi percentuali rispetto alla sostanza usata di questi componenti, espressi in ossidi, cioè la solubilità assoluta, ed il rapporto percentuale, cioè la solubilità relativa:

		%
SiO ₂	0,089	0,139
Trivalenti	0,060	0,304
MgO	n. d.	—
CaO	0,009	1,793
K ₂ O	4,923	34,114
Na ₂ O	0,473	29,542
residuo indissolto . .	94,446	

Per controllo ho determinato la percentuale di tutti gli ossidi sul residuo secco del minerale dilavato, dopo averlo tenuto per un giorno in istufa a 110°.

I risultati si riassumono così:

	% nel minerale	% nel filtrato	% nel residuo
SiO ₂	64,13	0,09	64,08
Trivalenti	19,66	0,06	19,55
MgO	0,04	—	0,05
CaO	0,49	0,01	0,48
K ₂ O	14,43	4,92	9,49
Na ₂ O	1,60	0,47	1,14

Risulta confermata ed evidente la prevedibile forte solubilità dei cationi alcalini, notevolmente maggiore quella del K rispetto a quella del Na.

Zoologia. — *Osservazioni sulla sessualità nel polichete « Hydroides norvegica »* ^(*). Nota ^(**) di FULVIO RANZOLI, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Lo studio della riproduzione dei Policheti ha permesso di rilevare negli ultimi anni come un gran numero di dati, oramai acquisiti, necessitino ancora completamento e coordinazione, mentre tutta una serie di problemi del più alto interesse attende ancora di venire risolta. Infatti, oltre ai complessi fenomeni di epitochia e di moltiplicazione schizogonica, che sovente si affiancano o si sostituiscono alla riproduzione sessuale, si conosce un certo numero di casi di ermafroditismo, considerati eccezionali per un gruppo ritenuto, finora, composto principalmente di animali gonocoristi ⁽¹⁾. In generale, però, tanto i casi di ermafroditismo, quanto quelli, più numerosi, di presunto gonocorismo non sono stati sottoposti ad uno studio sufficientemente approfondito.

Recenti osservazioni, dovute al Bacci, hanno dimostrato che in vari gruppi zoologici, tra cui i Molluschi, esistono casi di inversione sessuale, in cui il passaggio dalla fase maschile a quella femminile si attua così speditamente da rimanere facilmente inosservato, perché è assai raro incontrare cellule germinali dei due sessi in uno stesso esemplare. Questo *falso gonocorismo*, che maschera una condizione di ermafroditismo non contemporaneo ⁽²⁾, è un fenomeno che, alla luce delle più accurate e moderne ricerche, sembra essere molto diffuso; si ha motivo, fra l'altro, di supporre che esso possa verificarsi anche in specie di Policheti, che finora furono ritenute nettamente e completamente a sessi separati.

(*) Le presenti ricerche, elaborate nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Modena diretto dal prof. Enrico Vannini, sono state effettuate presso il Centro di Studio per la Biologia del C.N.R. (Stazione Zoologica di Napoli), usufruendo di una borsa di studio bimestrale nel luglio-agosto 1952. Ringrazio il prof. G. Colonnetti, presidente del C.N.R. e il prof. G. Montalenti, direttore del Centro di studio, per l'assegnazione della borsa; il prof. R. Dohrn, direttore della Stazione Zoologica, e il personale direttivo della medesima per l'ospitalità concessami.

(**) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1953.

(1) G. BACCI, *Osservazioni sulla sessualità dei Vereimorfi (Anellidi Policheti)*. « Boll. di Zool. », vol. 17, p. 55 (1950); E. VANNINI, *Studi sulla sessualità e sui poteri rigenerativi nel polichete ermafrodita « Salmacina incrustans »* (Clap.). — I. *Osservazioni sul ciclo riproduttivo sessuale e asessuale*. « Pubbl. della Staz. Zool. di Napoli », vol. 22, p. 211 (1950); B. TERIO, *L'ermafroditismo nei Tomopteridi*. « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », vol. 27, p. 470 (1951).

(2) G. BACCI, *L'inversione del sesso ed il ciclo stagionale della gonade in « Patella coerulea »* L. « Pubbl. della Staz. Zool. di Napoli », vol. 21, p. 183 (1947); G. BACCI, *Ricerche su « Asterina gibbosa »*. — II. *L'ermafroditismo in una popolazione di Plymouth*. « Arch. Zool. It. », vol. 34, p. 49 (1949).

Tra i Serpulidi, come in altri Policheti sedentari, si riscontrano casi di ermafroditismo in cui coesistono, per lungo tempo, gameti maschili e femminili; tale condizione è ben nota per i generi *Salmacina* e *Spirorbis*. La generalità degli altri Serpulidi è stata però considerata sicuramente gonocorista. Le recenti osservazioni sul falso gonocorismo inducono, tuttavia, a rivedere quest'ultima affermazione.

Volendo accertare l'andamento dei fenomeni sessuali in un Serpulide finora ritenuto gonocorista, che fosse presente in un gran numero di esemplari e facilmente ottenibile, si trovò che la specie *Hydroides norvegica* (Gunnerus) era molto adatta allo scopo: essa infatti vive in tubi calcarei, del diametro di 1-3 mm e lunghi qualche centimetro, riuniti spesso a formare estese colonie a piccola profondità, presso la costa, nel Golfo di Napoli. L'animale, provvisto di opercolo, presenta normalmente un numero fisso di 7 segmenti toracici ed uno variabile da 20 ad oltre 75 di addominali: di questi, il primo ed alcuni degli ultimi non maturano gameti, mentre gli altri ne sono letteralmente rigonfi all'epoca della riproduzione, che si protrae da aprile ad agosto⁽³⁾. Gli spermatozoi conferiscono all'addome dei maschi un colore bianco latteo, mentre le uova sono ben visibili come sferule rosso mattone o bianche, se non del tutto mature; è quindi facile riconoscere il sesso ed il numero di segmenti, maturi o immaturi, che compongono l'addome di un *Hydroides*.

Nell'agosto del 1952 fu esaminato un primo lotto di circa 250 esemplari presi a caso, che, tenendo conto del numero di segmenti addominali, furono suddivisi in classi con intervallo di dieci metameri. Queste indagini non condussero però a risultati apprezzabili, perché la prevalenza dei maschi negli *Hydroides* di minori dimensioni e delle femmine in quelli più lunghi non risultò significativa; d'altra parte neppure l'osservazione diretta degli stessi animali rivelò nulla di nuovo.

Si pensò allora che, se si fossero verificati fenomeni di inversione sessuale, questi sarebbero stati più facilmente riconoscibili in primavera, alla ripresa dell'attività riproduttiva, dopo la stasi dei mesi invernali, come, ad esempio, accade in *Patella*⁽⁴⁾. A tale scopo le ricerche furono riprese nella prima decade del maggio 1953, con l'esame, condotto con gli stessi criteri, su un egual numero di esemplari. Questa volta i risultati furono più incoraggianti e tali da far credere all'opportunità di proseguire la ricerca. Infatti, mentre il rapporto sessi alle varie dimensioni dell'animale, pur continuando a non essere indicativo, ripeteva con qualche variante quanto già s'era verificato l'estate precedente, l'osservazione diretta rivelò alcuni fatti di notevole interesse.

⁽³⁾ S. LO BIANCO, *Notizie biologiche riguardanti specialmente il periodo di maturità sessuale degli animali del Golfo di Napoli*. « Mitt. Zool. Stat. Neapel », Bd. 19, p. 513 (1909).

⁽⁴⁾ G. BACCI, op. cit. (1947); G. BACCI, *Alcuni problemi dell'ermafroditismo negli Invertebrati*. « Boll. di Zool. », vol. 17 (Supplemento), p. 193 (1950).

TABELLA I.

Frequenze delle varie classi di individui (maschili, femminili, « vuoti », « ermafroditi »).

Epoche di raccolta	NUMERO DEI SEGMENTI ADDOMINALI																TOTALE			
	20-30				31-40				41-50				51-60				61-70			
	♂	♀	V	♂ ₊	♂	♀	V	♂ ₊	♂	♀	V	♂ ₊	♂	♀	V	♂ ₊	♂	♀	V	♂ ₊
giugno 1952	13	6	—	—	43	47	—	—	57	46	—	—	17	23	—	—	1	3	—	—
luglio 1953	9	6	1	—	21	12	13	2	48	61	7	6	25	22	3	9	5	5	—	—

In un piccolo numero di esemplari, di dimensioni tali da poter sicuramente escludere che si tratti di immaturi, sono completamente assenti i gonociti e i metameri appaiono vuoti; in altri sono contemporaneamente presenti, nello stesso individuo, uova più o meno mature e spermatozoi, distribuiti senza ordine apparente lungo tutto il corpo dell'animale e talvolta nello stesso metamero, ma in regioni distinte. Inoltre, mentre quelli « vuoti » sono più frequenti tra gli esemplari più piccoli e diminuiscono gradualmente con l'aumentare del numero dei segmenti, per gli « ermafroditi » si verifica l'opposto.

L'esame più approfondito, condotto su preparati istologici, conferma che negli esemplari in questione si trovano prodotti sessuali di ambo i sessi. A piccolo ingrandimento si vedono infatti (fig. 1) metameri o emimetameri

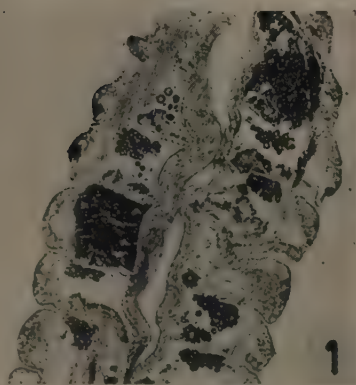


Fig. 1. - Sezione di *Hydroides* in corso di inversione sessuale: si vedono due metameri con spermatogenesi, altri con ovogenesi o vuoti. Spessore 5µ; emallume-eosina; 64 X.

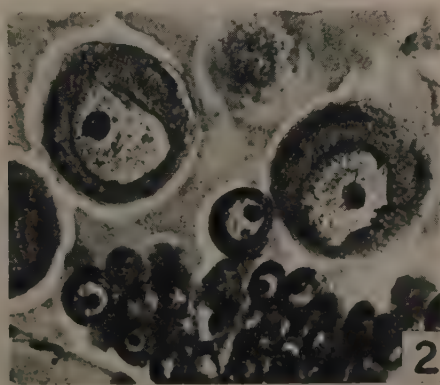


Fig. 2. Sezione di *Hydroides* in corso di inversione sessuale: ovogenesi in un metamero completamente femminizzato. Spessore 5µ; emallume-eosina; 628 X.

con ovociti in vari stadi del II periodo accrescitivo ed altri ricchi di cellule in spermatogenesi, distribuiti lungo il corpo dell'*Hydroides* senza accenno di polarità. Confrontando poi, a maggiore ingrandimento, gli ovociti di femmine normali con quelli di esemplari «ermafroditi» (fig. 2), si può notare la completa corrispondenza tra questi e quelli, per quanto riguarda l'aspetto, la forma, le particolarità strutturali e di accrescimento.

Se si confrontano le parti maschili di esemplari «ermafroditi» (fig. 3) con quelle di maschi normali (fig. 4) si possono rilevare principalmente due fatti degni di nota. Anzitutto, pur essendo presente anche nei primi una serie completa di cellule germinali perfettamente regolari, si trovano pure elementi in degenerazione picnotica a tutti gli stadi, dagli spermatociti agli

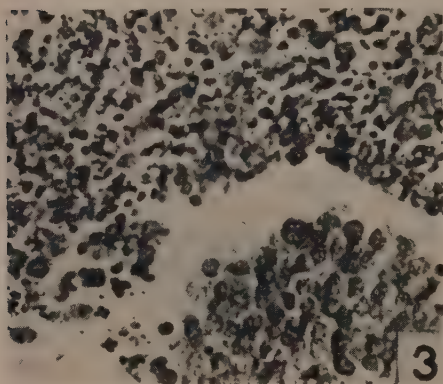


Fig. 3. - Sezione di *Hydroides* in corso di inversione sessuale: si vedono, accanto agli elementi della linea germinale maschile, alcuni ovociti. Spessore 5 μ ; emallume-eosina; 628 \times .

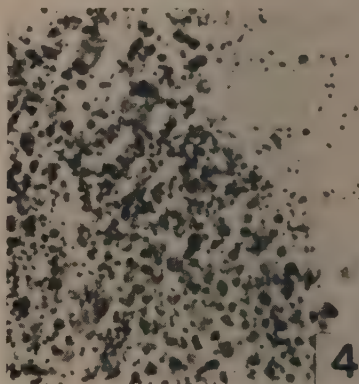


Fig. 4. - Sezione di *Hydroides* di sesso maschile: spermatogenesi normale. Spessore 5 μ ; emallume-eosina; 628 \times .

spermatidi. In secondo luogo, nei medesimi sacchetti celomatici si vede distintamente un certo numero di piccoli ovociti, che non hanno ancora iniziato il II periodo di accrescimento; essi si distinguono molto bene dagli spermatociti con cui sono frammisti, per le maggiori dimensioni del corpo cellulare, l'aspetto vescicoloso del nucleo e la presenza di un grosso nucleolo.

Una incompatibilità fra elementi germinali maschili e femminili sembra essere dimostrata dai fenomeni di degenerazione di spermatociti e spermatidi accanto al normale sviluppo degli ovociti, ora descritto. Non si tratta quindi, nel nostro caso, di un ermafroditismo proterandrico nel quale è possibile la coesistenza prolungata degli elementi eterologhi, ma di un caso di inversione o, secondo la terminologia del Bacci⁽⁵⁾, di *ermafroditismo proterandrico a maturazione distinta*, in cui avverrebbe, in tempi diversi per i

⁵ G. BACCI, *Ermafroditismo e intersessualità nei Gasteropodi e Lamellibranchi*. «Atualità Zoologiche» (suppl. Arch. Zool. It.), vol. 7, p. 57 (1951).

vari metameri, una graduale femminizzazione delle gonadi, accompagnata dalla distruzione degli elementi germinali maschili ancora presenti. Non essendo sufficientemente indicativi i rapporti numerici tra maschi e femmine ed essendo, inoltre, basso il numero di animali trovati con il processo di inversione in atto, si può supporre, almeno per ora, che essa si attui solamente in un piccolo numero di maschi, alla ripresa primaverile dell'attività sessuale; l'assenza di tali individui in altri mesi potrebbe essere la conferma che non si tratti di un fenomeno puramente casuale, ma piuttosto legato al ciclo annuale biologico e riproduttivo di *Hydroides*.

In conseguenza resta confermata l'ipotesi di lavoro di una condizione di labilità sessuale anche in *Hydroides*, che si inquadra con il fatto, già noto, dell'esistenza di specie ermafrodite nel gruppo dei Serpulimorfi. Le presenti ricerche saranno quindi continuate con l'intento di chiarire la portata dei fenomeni descritti.

Zoologia. — *La fisiologia dell'accoppiamento in «Haploembia Solieri»* Ramb. («*Embioptera Oligotomidae*»). Nota ^(*) di RENZO STEFANI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Allo scopo di chiarire la vera o apparente contraddizione esistente tra i dati dei diversi Autori, riguardo alla presenza e alla posizione dell'organo copulatore maschile negli Embiotteri, che risulta pure dal confronto degli studi del Grassi ⁽¹⁾ con i reperti da me pubblicati nella mia precedente Nota in questi «Rendiconti» ⁽²⁾, ho voluto esaminare la stessa specie (*Haploembia Solieri* Ramb.) su cui il Grassi fece le sue brillanti ricerche a Catania, ristudiare l'apparato copulatore, sia del maschio che della femmina, e osservare, con particolare tecnica che permetta l'esame delle sue varie fasi, l'accoppiamento che finora non era mai stato descritto per questa specie né per nessuna altra della famiglia *Oligotomidae*. Con queste osservazioni ho potuto mettere in chiaro la questione.

Innanzitutto è necessario passare in rassegna i dati precedenti: Il primo che studiò l'anatomia interna ed esterna dell'apparato genitale negli Embiotteri fu il Grassi nel 1893, il quale descrisse «un pene lungo, conico, percorso da un canale interno, che sorge dalla nona sternite, si prolunga sulla decima e sporge per un certo tratto al di dietro di questa» ⁽³⁾. Con lui accordarono

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1953.

(1) B. GRASSI e A. SANDIAS, *Contribuzione allo studio delle Embidine*. «Atti Acc. Gioen. Catania» (4), III, p. 59 (1894).

(2) R. STEFANI, *Un particolare modo di accoppiamento negli Insetti Embiotteri*. «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. XIV, p. 544 (1953).

(3) È conveniente notare qui come il disegno dell'estremità posteriore del maschio pubblicato nella tavola IV (metà destra) fig. 6 a del già citato lavoro del Grassi, sia intenzionalmente schematizzato, trattandosi di uno studio di anatomia generale più che di tasso-

altri Autori (Krauss, Verhoeff, Friederichs, ecc.), i quali descrissero un pene più o meno sviluppato negli Embiotteri. Mukerji, seguito da altri, sostiene invece ⁽⁴⁾ a p. 269 del suo lavoro: «The ejaculatory duct opens between the external chitinous parts of the genitalia and not, as is generally believed, through the median plate or the aedeagus in other insects», e a p. 261: «In the absence of a true aedeagus or intromittant organ, the complex appendages of the terminal abdominal segment serve to keep the aperture of the vas deferens closely applied to that of the oviduct during copulation».

Tale contraddizione è soltanto apparente. Le due interpretazioni sono basate sulla generalizzazione dei reperti trovati su due diverse specie. Sia il Grassi che il Mukerji descrissero bene quanto videro, ma il primo esaminò la *Haploembia Solieri* Ramb. della famiglia *Oligotomidae*, il secondo la *Embia minor* Muk. della famiglia *Embiidae*.

Della famiglia *Embiidae*, ho descritto ⁽²⁾ la fisiologia dell'accoppiamento nella specie *Cleomia Guareschii* Stef. ⁽⁵⁾. Ho seguito successivamente l'accoppiamento nelle altre specie italiane e precisamente: la *Embia tyrrhenica* Stef., la *Embia nuragica* Stef. e la *Embia Ramburi* Rims.-Kors. ed ho constatato in generale la stessa modalità nell'accoppiamento con formazione dello spermatofragma. Dell'unica specie della famiglia *Oligotomidae* finora nota per l'Italia, la *Haploembia Solieri* Ramb., dò qui sotto la descrizione dell'atto copulativo mettendo in evidenza la funzionalità delle varie parti dei terminalia e rivedendo con terminologia moderna la anatomia interna ed esterna dell'apparato genitale maschile, già studiata dal Grassi nel citato lavoro.

APPARATO GENITALE MASCHILE E FEMMINILE

Nell'apparato genitale maschile, per quanto riguarda gli organi interni, notiamo innanzitutto i due testicoli costituiti ognuno da cinque lobuli che si ricollegano posteriormente con le due vescicole seminali, riunentisi in una comune camera eiaculatrice in cui sboccano pure, lateralmente e direttamente, due paia di ghiandole accessorie tubulari, più un altro paio di piccole ghiandole lobiformi, che possono passare facilmente inosservate, poste nella parte più distale del complesso. Topograficamente la camera eiaculatrice è situata in corrispondenza del IX urosterno e poggia dorsalmente sulla cavità da esso formata. Dorsalmente

nomia e come, malauguratamente, nella stessa figura ci sia un errore nelle didascalie, dovuto con ogni probabilità ad una svista del disegnatore. Questa figura diede filo da torcere ai sistematici, tanto che il Friederichs nel 1906, basandosi su di essa, istituì una nuova specie (!) denominandola *Embia (Dityle) Grassii* Fried. (Zugleich konnte ich feststellen dass die von Grassi als *Embia Solieri* beschriebene sizilianische *Embia* mit Rambur's *Solieri* nicht identisch ist. Ein Vergleich unserer Fig. 4 mit der entsprechenden von Grassi stellt dies auf den ersten Blick ausser Zweifel. Es wird daher eine Umtaufe nötig, und ich benenne die genannte *Embia* von Sizilien nach ihrem ersten Autor: *Embia Grassii*). Il fatto fu invece rettamente interpretato dal Krauss e lo stesso Friederichs nel 1923 ebbe a ricredersi (cfr. lavori citati).

⁴ S. MUKERJI. *On the Morphology and Bionomics of «Embia Minor» n. sp. with special reference etc.* «Rec. Indian Mus.», vol. XXIX, IV Calcutta (1927).

⁵ R. STEFANI. *Nuovi Embiotteri della Sardegna*. «Boll. Soc. Entom. It.», vol. LXXXIII, nn. 7-8 (1953).

ad essa camera sta il tubo rettale. Dalla camera eiaculatrice si diparte, in direzione caudale, un unico *ductus eiaculatorius* che percorre tutto il processo del IX urosterno (*Hypandrium*) e sbocca dorsalmente alla sua estremità (fig. 1).

Per quanto riguarda i genitali esterni, nel decimo urotergo le due emitergite destra e sinistra non sono completamente separate ma fuse assieme e prive alla base di qualsiasi membrana intermedia. Ognuna di esse possiede un processo caudale: il processo della emitergite destra (punta destra del Grassi) affusolato regolarmente, è più lungo del corrispondente sinistro e termina all'estremità con un minuscolo acuto uncino, ripiegato ventralmente a mo' di piccolo arpione. L'emitergite destra porta ancora un secondo processo alla sua base mediana che viene a trovarsi tra le due emitergiti. Tale processo corrisponde alla lamina sopranale del processo mediano delle *Embiidinae* e non ha nessuna particolare funzione nell'accoppiamento. Esso appare come una semplice lamina, leggermente sclerificata, fusa alla superficie dorsale della papilla sopranale, grossa papilla che occupa tutto lo spazio tra le due emitergiti. Bisogna notare qui come il processo della emitergite destra possieda alla sua base e dorsalmente una zona trasversa membranosa che gli permette di articolarsi sulla emitergite basale sollevandosi dorsalmente e abbassandosi ventralmente, mercé forti muscoli adduttori e abduttori che si trovano nell'interno. Il processo dell'emitergite sinistra (punta sinistra del Grassi) invece è un po' più corto di quello destro, altamente sclerotizzato in tutte

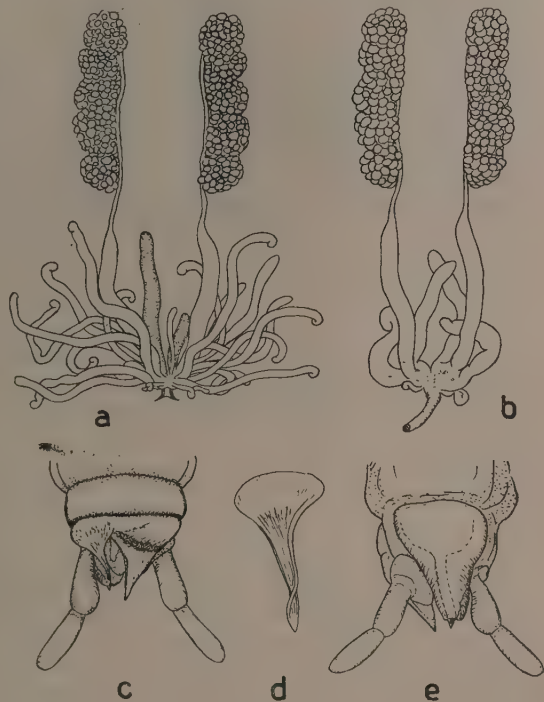


Fig. 1.

- a. - Organi genitali maschili di *Cleomia Guareschi* Stef. da Cagliari (Sardegna).
 b. - Organi genitali maschili di *Haploembia Solieri* Ramb. da Catania (Sicilia).
 c. - Estremo addome del maschio di *Hapl. Solieri* visto dal dorso.
 d. - Appendice della emitergite sinistra ingrandita, dello stesso.
 e. - Estremo addome del maschio di *Haploembia Solieri* visto dal ventre, con tratteggiata la posizione interna del canale eiaculatore.
 (In c e in e, le parti membranose sono punteggiate, le parti sclerotizzate in bianco).

le sue parti e quindi immobile e inarticolabile sull'emitergite e fin dalla sua base molto ristretto, stiliforme. Inizialmente a corpo un po' depresso, esso, nel suo terzo distale, ruota sul suo asse a sinistra, quasi di 180°, in modo da terminare nella sua estremità in forma di lamina suborizzontale a punta di coltello, con margini ribordati, non taglienti. La parte distale del processo va ad appoggiarsi su di una incavatura dell'estremità caudale dell'*Hypandrium* (pene sec. Grassi) direttamente al disopra dello sbocco del canale eiaculatore da cui sporge un po' posteriormente con la punta. L'*Hypandrium* o nono urosterno, tozzo e convesso, si prolunga caudalmente a sinistra con un processo lungo, conico, robusto che si porta tra i due cerci, poggiandosi su quello sinistro in corrispondenza della insenatura interna di questo. L'estremità di tale processo è mozzata. Esaminato dal dorso, esso appare costituito nella sua porzione superiore da una superficie membranosa che anteriormente si ricollega alla mem-

brana dell'emittergite sinistra e posteriormente ai bordi sporgenti e sclerotizzati della superficie inferiore concaviforme. All'estremità, abbiamo detto, esiste una slabbratura in cui sbocca il dotto eiaculatore. Un po' più a sinistra il margine sclerificato si risvolta alquanto e forma un leggero ingrossamento esterno, degradando poi lentamente verso la sua parte anteriore. Tale ingrossamento chitinoso è forse omologabile al cercobasipodite sinistro, isolato e particolarmente sclerificato nel genere *Embia* e *Cleomia* oppure potrebbe essere un relitto del X urosterno (?). L'articolo basale del cerco sinistro si presenta privo di qualsiasi echinulazione con la sua parte interna soltanto un po' sinuata per dar posto all'appendice dell'*Hypandrium*. Il resto dell'estremità addominale è occupato dal cercobasipodite destro, membranoso. L'apertura anale si apre quindi tra la papilla sopranale, il cercobasipodite destro e il processo dell'*Hypandrium* a sinistra. Non esiste un decimo urosterno morfologicamente distinto come del resto neanche in *Embia* e *Cleomia*. Non troviamo inoltre né papilla paranale, né papilla paragenitale, né vestibolo perigenitale che esistono in *Cleomia* e in *Embia*.

Per quanto riguarda l'apparato genitale femminile esterno, la piastra subgenitale è costituita dall'ottavo urosterno che non si distingue esternamente dagli urosterni contigui se non per possedere al suo margine posteriore l'apertura vulvare. Questa si presenta a fessura che in istato di riposo non si nota perché va ad infossarsi leggermente tra le pieghe della membrana intersegmentale tra l'ottavo e il nono urosterno. Attraverso questa rima si entra nella camera vulvare situata dorsalmente alla piastra subgenitale, come nelle ♀♀ dei generi *Embia* e *Cleomia*. Nella parete vaginale dorsale sbocca il dotto della spermatoteca. Tale sbocco, che appare nel genere *Embia* come un poro minuto, si presenta invece nella *Haploembia Solieri* come una fessura semilunare con la concavità rivolta caudalmente. Più cranialmente, la parete membranosa presenta delle rugosità trasversali e quindi dalla vagina si dipartono i due ovidotti.

ACCOPPIAMENTO

Come nella *Cleomia Guareschii* Stef. l'accoppiamento avviene soltanto nei cunicoli seri-ci in quanto il ♂ ha bisogno di ottenere una resistenza da parte dell'addome femminile, resistenza opposta dalla parete tubulare contro cui viene sospinto l'addome della femmina⁽⁶⁾. Il ♂ comincia con il titillare il capo della ♀ con le antenne e fa qualche tentativo di ghermirlo con le mandibole. Un leggero morso è sufficiente a scatenare il riflesso copulatorio per cui esso si rivoltava subito e ponendosi col proprio addome prono al disotto del torace della ♀ inizia a tastare il ventre con il processo della emittergite destra che, come abbiamo visto, può abdersi nel piano verticale. Il maschio esegue tale atto rinculando ed esplorando tutti gli spazi intersegmentali del ventre femminile finché arriva con la punta destra tra l'ottavo e il nono urosterno. Trovata qui l'entrata, inarca di più l'appendice che viene introdotta e va ad arpionare col suo uncino terminale la parete vaginale dorsale in corrispondenza delle pieghe trasverse. Con due o tre rapidi movimenti susseguenti, esso tira a sé la parete. Oltre a questa funzione, l'appendice ha pure lo scopo di agganciarsi al corpo della ♀ per tenerlo più saldamente unito a quello del maschio e, primo fra tutti, quello di aprire l'apertura vulvare sollevando la piastra subgenitale.

Contemporaneamente la punta dell'appendice dell'emittergite sinistra, laminare, viene a trovarsi di fronte e a contatto con l'apertura del dotto della spermatoteca che è venuta a portarsi alquanto più caudalmente rispetto alla sua posizione primitiva di riposo. Tale punta entra quindi nel primo tratto del dotto e lo mantiene beante quanto più vi penetra, in grazia della rotazione sul suo asse. Il pene che le si trova appoggiato immediatamente al disotto e che rimane sempre nella stessa posizione rispetto all'appendice sinistra, in quanto né l'uno né l'altra possiedono articolazioni, viene così a trovarsi nel dotto della spermatoteca mantenuto beante dalla punta sinistra che, per dir così, gli fa strada. Molto probabilmente l'introduzione e la perfetta adesione vengono agevolati da movimenti delle pareti muscolari del dotto

(6) Fuori dei cunicoli l'accoppiamento non avviene in quanto di fronte ai tentativi del ♂, l'addome della pur consenziente compagna scivola.

che vanno a combaciare con le pareti del pene e inoltre dal processo destro che mantiene in sito tutta la parete vaginale. L'apertura anale del maschio intanto è completamente otturata per l'abbassamento della papilla sopranale compressa dal processo dorsale.

L'accoppiamento dura soltanto 20-40 secondi, talvolta di più, durante i quali il ♂ inietta lo sperma nella spermateca femminile mediante una ventina di pulsazioni del dotto eiaculatore, pulsazioni notabili pure all'esterno perché accompagnate da un leggero movimento di contrazione dell'estremo addome. Molto probabilmente è concomitante una azione di suzione da parte della spermateca. Il cerco sinistro non esercita nessuna funzione di aggancio come descritto il *Cleomia* ma rimane completamente estraneo all'atto copulativo. Di qui l'assenza sulla sua parte interna di echinulazioni o di spine o di uncini per abbracci o agganciamenti. La concavità che esso presenta nella sua parte interna serve quindi solo per dare spazio al pene.

Avvenuto il coito, il ♂ si distacca con la massima facilità, riposando per alcuni minuti, quindi ha luogo per lo più un successivo accoppiamento, nella stessa maniera del primo, cui ne possono seguire degli altri. La copula si può ripetere anche dopo molti giorni: furono visti due individui accoppiarsi ancora dopo 7 giorni dal primo accoppiamento quando nel frattempo la ♀ aveva già deposto almeno 5 uova. Il ♂ non muore subito, ma rimane vivente per parecchio tempo, molto spesso anche un mese, durante il quale è molto probabile si nutra, io però non l'ho potuto constatare.

Circa l'interpretazione degli scleriti addominali in un piano generale, i pareri dei vari Autori sono estremamente discordi. Io non vi accennerò neanche né cercherò di darne qui una interpretazione personale, in quanto il gruppo degli Embiotteri non si presenta tanto omogeneo come si credeva quando le specie si ritenevano poche ed erano mal conosciute. Confrontando il genere *Cleomia* (e il genere *Embia* che si comporta ugualmente) con il genere *Haploembia* possiamo fare le seguenti constatazioni riguardo l'anatomia e la fisiologia comparate dell'apparato copulatorio:

L'*Hypandrium* che nel genere neotropico *Clothoda*, considerato il più primitivo dell'ordine, è simmetricamente situato nella parte mediana tra i due cerci, in *Cleomia* e in *Embia* si sposta a destra col suo processo caudale, a sinistra in *Haploembia*. Nel primo caso il processo è corto e porta all'estremità la papilla paragenitale, dorsalmente alla quale sbocca il gonoporo maschile che, essendo situato internamente nel vestibolo paragenitale, fa capo ad un canale eiaculatore ridottissimo⁽⁷⁾. Nel caso dell'*Haploembia* invece il processo caudale si prolunga di più, non porta papilla paragenitale all'estremità ma direttamente lo sbocco del canale eiaculatore che percorrendo internamente tutto il processo, risulta assai lungo. Tale processo, che ha l'unico scopo di entrare nella camera vaginale e con la sua parte estrema addirittura nel dotto della spermateca durante l'atto copulatorio, può pertanto considerarsi un pene vero e proprio, come denominato originariamente dal Grassi.

In *Haploembia* per la presenza del pene che assicura una penetrazione e un contatto più intimo tra le due aperture genitali, non esiste formazione dello spermatofragma descritto per *Cleomia* ed esistente pure in *Embia*. Il primo articolo del cerco sinistro che in *Clothoda* è semplicemente subcilindrico, assume una forma del tutto particolare in *Embia* e in *Cleomia*, in rapporto alla funzione cui è deputato, che è quella di abbracciare l'addome della femmina e tenerla rinserrata durante il coito, onde non permettere uno strappo o un distacco dello spermatofragma unente i due gonopori.

Organi coadiuvanti a tale funzione sono quindi il cercobasipodite sinistro formante una piastra sempre ben sviluppata fornita di uncini e processi e l'emitergite sinistra col suo processo caudale. Nel genere *Haploembia* l'abbraccio non avviene, quindi cade la particolare

7) Ho potuto constatare mediante confronti con le figure riportate e con le descrizioni, che i trattatisti i quali descrissero un pene per le specie della fam. *Embiidae* da me controllate, presero per tale organo la papilla paranale. Così il Krauss il Friederichs in: H. A. KRAUSS, *Monographie der Embien*. «Zoologica», Hft. 60, Bd. 23 1911; K. FRIEDERICHS, *Zur Biologie der Embiiden*. «Mitt. Zool. Mus.», Berlin III 1906; K. FRIEDERICHS, *Oekologische Beobachtungen u. Embiidinen*. «Cap. Zool.», II (1923).

struttura degli organi deputati a tale scopo: il cerco rimane inattivo durante la copula quindi non è morfologicamente differenziato se non per la leggera incavatura già descritta. Il cercobasipodite non esiste come tale, l'emitergite sinistra non coadiuva col suo processo l'azione di agganciamento della ♀ da parte del cerco sinistro, ma svolge azione ausiliaria dell'organo copulatore propriamente detto. Il processo dorsale mediano non ha la funzione che possiede in *Cleomia* ma soltanto quella ausiliaria analoga al lembo inferiore del processo in questo genere, che è quella di rinchiudere con la papilla sopranale l'apertura del tubo rettale. L'emitergite destra mantiene invece costante la sua funzione. Le modifiche fondamentali esistono quindi soltanto nell'emirite sinistro.

Nella ♀ la piastra subgenitale non possiede particolari differenziamenti. Nel genere *Cleomia* alla formazione dello spermatofragma sono deputate particolari ghiandole tubulari che in *Haploembia* mancano.

Da questo prospetto sulla anatomia e sulla fisiologia comparate degli organi direttamente e indirettamente interessati all'atto copulativo, possiamo concludere ammettendo senz'altro che i due tipi descritti non sono potuti derivare l'uno dall'altro ma entrambi corrispondono a due aspetti funzionali sviluppatisi in due direzioni diverse e derivanti da un tipo meno specializzato e più primitivo che, tra le forme viventi, si potrebbe ricondurre al genere *Clothoda*. Di questo però non conosciamo ancora la fisiologia dell'accoppiamento né la funzionalità degli elementi, sia pur semplici, dell'estremo addome. Non abbiamo neppure alcun altro esempio di accoppiamento descritto nelle altre due importanti famiglie dell'ordine: le *Anisembiidae* e le *Oligembiidae*, che pur presentano strutture differenti nei terminalia.

Appare quindi evidente come sia avventata qualsiasi generalizzazione di questo o di quel tipo e come siano ancora prematuri gli accostamenti con questo o quel gruppo di insetti per cercar di stabilire delle presunte parentele in base a tali caratteri.

Fisiologia. — *Alcune determinazioni della densità dell'encefalo nell'uomo* (*). Nota (**) di TORQUATO GUALTIEROTTI, presentata dal Socio R. MARGARIA.

La massa effettiva dell'encefalo ha un valore molto basso per essere l'encefalo immerso in un liquido che ha presso a poco la stessa densità. Margaria (*) ha recentemente messo in evidenza l'importanza fisiologica di questo fatto in riferimento sia alla forza con la quale il cervello grava sulla base del cranio (peso effettivo del cervello), sia alla forza alla quale il cervello viene sottoposto nelle accelerazioni.

La massa effettiva del cervello *in situ* può essere calcolata quando si conosca il peso specifico del cervello e del liquido cerebrospinale, oppure

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1953.

(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei », XIV, 188-193 (1953).

può essere misurata direttamente pesando il cervello immerso in un liquido che abbia lo stesso peso specifico del liquor.

Dati sul peso specifico del cervello sono molto scarsi e basati su determinazioni non recenti. Chiarugi ⁽²⁾ attribuirebbe un valore medio di 1,036, mentre il Fulton ⁽³⁾ pone un valore di 1,040. Margaria dalla composizione chimica del cervello aveva suggerito un valore presumibile di 1,048.

Queste differenze non sono di scarsa importanza in rapporto alla funzione di protezione descritta sopra, poiché corrispondono ad un peso effettivo del cervello *in situ* che varia da 37 a 49.

Mi parve perciò non priva di interesse la determinazione esatta del peso specifico del cervello normale.

L'encefalo veniva pesato con una bilancia analitica prima in aria, poi, per mezzo di una bilancia di Archimede sensibile a 0,1 g in un liquido fisiologico avente un peso specifico 1,006, corrispondente al minimo valore del liquor. Il peso specifico del cervello veniva quindi calcolato per mezzo della seguente formula (p_c = peso specifico dell'encefalo; p_l = peso specifico del fluido; P_1 = peso del cervello in aria; P_2 = peso del cervello nel fluido):

$$p_c = p_l \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

Con questo metodo due principali possibilità di errore esistono; la prima è che il peso eseguito in aria venga alterato dalla evaporazione dalla superficie cerebrale: dato però che il peso dei cervelli umani adulti considerati oscillava da un minimo di 1100 a un massimo di 1390 g, l'effetto dell'evaporazione non modifica in misura apprezzabile il peso totale. Prove eseguite hanno dimostrato che entro 10 minuti la variazione di peso dovuta ad essiccamento è inferiore allo 0,05 %. Nei cervelli dei prematuri, il più piccolo dei quali pesava 95 g, la perdita di peso in 10 minuti è stata dell'ordine di 0,18 g e quindi anche in questo caso l'errore non supera il 0,1 %.

La seconda possibilità di errore consiste nella eventuale presenza di aria nelle cavità endocraniche durante la pesata del fluido e questa avrebbe potuto alterare notevolmente il risultato: perciò i cervelli in esame erano previamente sezionati in larghi blocchi in modo da non lasciare cavità chiuse, ed inoltre i blocchi stessi venivano smossi mentre erano immersi nel liquido per liberare eventuali bolle d'aria che avrebbero potuto entrare nelle manipolazioni dell'estrazione.

Per il peso sia in aria che nel liquido il cervello era raccolto in un canestro di metallo a maglie fitte, della cui spinta specifica l'immersione del fluido veniva tenuto conto nel calcolo del peso del cervello.

Il peso specifico del liquido fisiologico usato per le determinazioni in immersione veniva determinato mediante la bilancia idrostatica di Archimede, calcolando il rapporto tra la spinta di un corpo solido nel liquido stesso e nell'acqua distillata.

(2) *Trattato di Anatomia dell'uomo*, vol. IV, p. 71 (1931).

(3) J. F., «Textbook of Physiology», Philadelphia, p. 910 (1949).

TABELLA I.

N. età	ore dopo morte	causa morte	peso in aria	peso in liquido	ρ_c
1° prem. ♀	24		95 gr.	3,1 gr.	1,039
2° prem. ♀	24		135 gr.	4 gr.	1,036
3° 18 ♀	48		1286 gr.	32 gr.	1,031
4° 19 ♀	36		1294 gr.	33 gr.	1,032
5° 21 ♀	24	avvelen. CO	1076 gr.	31 gr.	1,035
6° 21 ♂	24	annegamento	1230 gr.	36 gr.	1,036
7° 31 ♂	36	peritonite	1232 gr.	35 gr.	1,035
8° 32 ♀	36	sepsi	1120 gr.	32 gr.	1,035
9° 41 ♂	36	infarto card.	1280 gr.	37 gr.	1,035
10° 42 ♀	48		1100 gr.	32 gr.	1,035
11° 45 ♂	48	trombosi coron.	1316 gr.	38 gr.	1,035
12° 48 ♂	24	polmonite	1380 gr.	37 gr.	1,033
13° 48 ♂	36	ferita torace	1365 gr.	41 gr.	1,036
14° 50 ♂	24	infarto card.	1391 gr.	38 gr.	1,034
15° 53 ♂	36	epatite acuta	1239 gr.	37 gr.	1,036
16° 57 ♂	24	peritonite	1390 gr.	47 gr.	1,041
17° 59 ♀	24	peritonite	1139 gr.	31 gr.	1,034
18° 61 ♀	48	setticemia	1189 gr.	35 gr.	1,036
19° 67 ♀	24	trauma addomin.	1107 gr.	32 gr.	1,035

Media = 1,0345 \pm 0,000,13Dev. stand (σ) = 0,002,14Dev. media (σ_m) = 0,000,13

Questi valori si riferiscono ai cervelli di adulti (casi dal 3° al 19°).

I risultati ottenuti su un gruppo di 19 cervelli sono riportati nella tabella I. I dati raccolti indicano che:

1° il peso specifico dell'encefalo nell'adulto risulta essere in media dall'esame dei 117 casi considerati 1,0345. Le deviazioni standard (σ) risulta essere 0,002,14, mentre la deviazione standard della media (σ_m) è 0,000,13. La variabilità del carattere risulta dunque scarsissima, e l'attendibilità del valore medio statisticamente sicura almeno fino alla 3^a cifra decimale.

2° poiché il peso specifico del cervello non varia che entro limiti strettissimi, non sembra ci sia alcun rapporto tra questo valore e altre variabili riferentesi al singolo caso in esame, quale la causa della morte, il sesso, l'età, la grandezza dell'encefalo, ecc.;

3° poiché il peso specifico rimane costante col variare del peso assoluto del cervello, risulta che il peso del cervello immerso nel liquido cefalorachidiano varia proporzionalmente alla sua massa: si ha così un minimo di g 3,1 nel più piccolo prematuro e un massimo di g 47 in un uomo di 57 anni, con un valore medio per l'adulto di 35,5 g;

4° data la fondamentale costanza della densità del cervello, non si può stabilire un rapporto tra questo valore e gruppi particolari di individui o di malattie.

Ringrazio il prof. Cazzaniga direttore dell'Istituto di Medicina Legale dell'Università di Milano per avermi cortesemente fornito il materiale di ricerca.

Fisiologia. — *Gli effetti delle crisi convulsive da elettroshock (ES) sulla secrezione istaminica del piccolo stomaco di Pawlow-Bickel^(*).*

Nota ^(*) di GAETANO LIVREA ^(**), presentata dal Socio G. AMANTEA.

In due precedenti lavori ⁽¹⁻²⁾, apparsi altrove, abbiamo riferito estesamente di alcuni possibili effetti indotti dalle crisi convulsive da elettroshock (ES) sulla secrezione del piccolo stomaco di Pawlow-Bickel.

Per comodità dei lettori, che s'interessano a questo problema, precisiamo che, studiando il comportamento delle ghiandole gastriche in conseguenza delle crisi, abbiamo potuto stabilire: 1° che le crisi convulsive provocate a 8-10 h di distanza dall'assunzione di cibo, se ripetute per un sufficiente numero di giorni, determinano una lenta, ma progressiva e duratura diminuzione dell'intensità del lavoro secretorio delle ghiandole interessante tutte e tre le fasi dell'attività secretoria, ma soprattutto la fase gastrica ed intestinale, e 2° che la crisi provocata nel corso della fase cefalica, di prevalente natura vagale, determina sempre un immediato arresto della secrezione, di varia durata, tra 10' e 20', e poi un'imponente depressione dell'attività secretoria della restante fase, seguita da un tentativo di compenso nel successivo periodo chimico della secrezione.

^(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

^(**) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1953.

^{***} Con la collaborazione, per la parte sperimentale, degli allievi interni Ferruccio De Stefano e Gennaro Maffei.

(1) G. LIVREA, «Quaderni della Nutrizione», **IX**, 473 (1950).

(2) G. LIVREA, «Ibidem», **IX** (1951).

Negli anzidetti lavori abbiamo anche discusso dettagliatamente il meccanismo di tali effetti, concludendo che allo stato dei fatti non era possibile stabilire se alla loro origine vi fosse un meccanismo esclusivamente nervoso o anche in parte umorale.

Tenuto conto che le vie vettrici degli impulsi secretogeni decorrono sicuramente nei vasi ed ammessa la natura inibitrice dell'influenza esercitata dal simpatico sulle cellule peptiche ed oxintiche, nel caso del meccanismo nervoso abbiamo allora avanzato l'ipotesi che gli effetti gastrosecretori delle crisi convulsive potessero essere l'espressione o di un eccitamento delle formazioni encefaliche, che presiedono alle reazioni simpatiche, o di una inibizione di quelle che presiedono alle reazioni parasimpatiche.

Avanzando, invece, l'ipotesi della compartecipazione di un meccanismo eventualmente umorale, abbiamo inteso alludere al complesso delle modificazioni della composizione chimica del sangue, concomitanti e conseguenti alle crisi, modificazioni che si potrebbero risolvere in un'inibizione diretta e indiretta della secrezione.

Un aiuto alla delucidazione del meccanismo degli anzidetti risultati poteva forse esser fornito dallo studio degli effetti delle crisi sulla secrezione gastrica da istamina.

Tale secrezione è ritenuta dalla quasi totalità degli Autori come espressione di un'azione dell'istamina sulle strutture della mucosa gastrica, forse direttamente sulle cellule ghiandolari, e quindi del tutto indipendente dal sistema nervoso. Sta di fatto che l'istamina determina secrezione in uno stomaco a vaghi recisi e degenerati ^(3 4), in un piccolo stomaco privato di ogni innervazione estrinseca secondo la tecnica di Bickel ⁽⁶⁾, in un piccolo stomaco trapiantato sotto cute secondo la tecnica di Ivy e Farrel ^(7 8) e in un piccolo stomaco trapiantato sotto cute dopo essere stato privato degli strati muscolari e del plesso di Auerbach ⁽⁹⁾. Ora, se la crisi convulsiva agisce sulla secrezione gastrica col prevalente tramite del sistema nervoso centrale, essa non dovrebbe influire, o poco, su una secrezione che si verifica indipendentemente da quello. Viceversa, se la crisi agisce anche per via umorale, non è improbabile una sua ripercussione anche sulla secrezione istaminica.

Ecco la ragione per la quale ci è apparso interessante accertare quali fossero gli effetti delle crisi convulsive su tale secrezione.

A tale scopo abbiamo condotto un'adeguata serie di indagini sperimentali su un giovane cane di sesso maschile, in perfette condizioni generali,

(3) L. POPIELSKI, « Pflüg. Arch. ges. Physiol. », 178, 214 (1920).

(4) R. W. KEETON, F. C. KOCH, A. B. LUCKHARDT, « Amer. J. Physiol. », 51, 454 (1920).

(5) W. KOSKOWSKI, « C. R. Acad. Sci. Paris », 174, 247 (1922).

(6) A. C. IVY, A. J. JAVOIS, « Amer. J. Physiol. », 71, 604 (1924-25).

(7) A. C. IVY, J. J. FARREL, « Ibidem », 74, 639 (1925).

(8) E. KLEIN, E. ARNHEIM, « Arch. Surg. », 25, 433 (1932).

(9) E. KLEIN, « Arch. Surg. », 25, 442 (1932).

dal peso di circa Kg. 10, portatore da circa un anno di piccolo stomaco preparato con la tecnica di Pawlow-Bickel.

Ovviamente abbiamo stabilito dapprima quale fosse la risposta gastro-secretoria normale dell'animale allo stimolo istaminico e a tale uopo abbiamo condotto 12 osservazioni basali.

Ognuna di queste s'è svolta in condizioni di perfetta tranquillità, in quanto che, da una parte, l'animale era stato attrezzato, come già si è detto, da circa un anno col piccolo stomaco e quindi era perfettamente allenato alla contenzione sull'apparecchio di Cyon e a esperimenti del genere, e, dall'altra, è stata nostra cura evitargli ogni disagio ed ogni possibile eccitamento da stimoli esterni.

Ciascun esperimento è stato iniziato a circa 18-20 ore dal pasto precedente. Il succo gastrico è stato raccolto mediante un adeguato catetere di gomma introdotto nel piccolo stomaco e mantenuto *in situ* mercè un imbuto di vetro a collo corto pescante in un cilindretto graduato a 1/10 di ml, sospeso mediante cinghia ai fianchi dell'animale. Ci assicuravamo così una rapida, accurata e controllabile raccolta di succo puro, a mano a mano che veniva formato.

Prima di praticare l'iniezione d'istamina, abbiamo drenato per diversi minuti la scarsa e talvolta quasi assente secrezione da digiuno. Praticata l'iniezione sottocutanea di cloridrato d'istamina, abbiamo iniziata la raccolta in serie dei campioni di succo, uno ogni 30 minuti, fino all'esaurimento della secrezione istaminica, indicato dall'approssimativo ritorno al livello di secrezione dello stomaco digiunante.

In ogni campione di succo e, quando è stato possibile, anche nel succo da digiuno, abbiamo determinato la concentrazione dell'HCl libero e combinato con NaOH N/50 (usando come indicatori rispettivamente il reagente di Topfer e la fenoltaleina) nonché la concentrazione di pepsina con la modificazione di Nierenstein e Schiff del metodo di Mett.

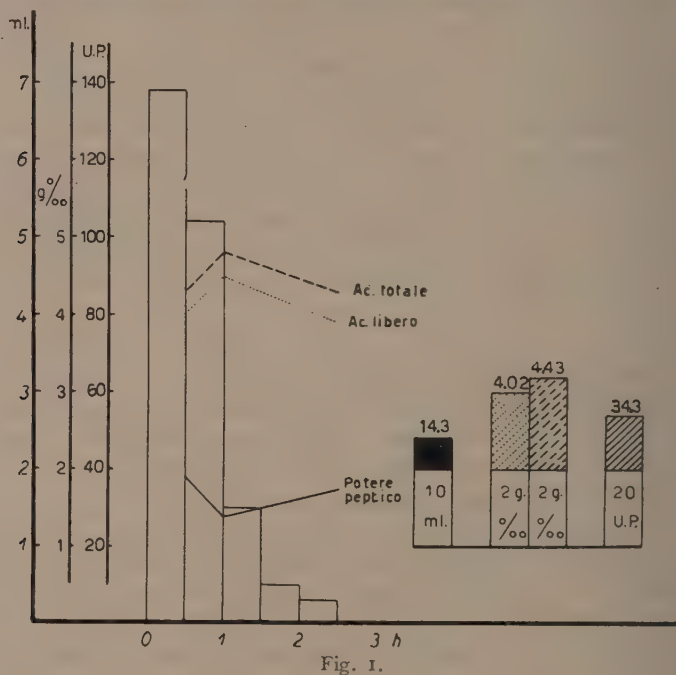
La pressoché assoluta uniformità, con la quale sono decorsi tutti gli esperimenti, ha reso particolarmente sicuri i seguenti rilievi:

a) il tempo di latenza, cioè il periodo di tempo che intercorre tra l'iniezione d'istamina e l'avvio della secrezione è stato in media di 4'25"; b) la durata della secrezione è stata in media di 136'; c) la velocità è aumentata ed ha raggiunto il massimo in media nei primi 30'; d) il volume di succo secreto in 2 ore è stato in media di ml 14.3; e) all'aumentata velocità di secrezione ha corrisposto un aumento dell'HCl libero e combinato, il quale ha raggiunto un valore massimo coincidente a un di presso con la massima velocità di secrezione e poi ha teso a restare intorno a questo massimo per tutta la durata della secrezione. Il valore massimo di HCl libero è stato in media di gr. 4.56 ‰ e quello dell'HCl combinato in media di gr. 4.87 ‰; f) il potere peptico globale medio si è aggirato intorno a 35 unità peptiche e non è stato mai decisamente inferiore a quello della secrezione da digiuno previamente stabilito; g) nel corso della secrezione, dopo la

prima ora, la quantità di pepsina è aumentata costantemente, sia pure di poco ⁽¹⁰⁾.

La figura 1 sintetizza l'anzidetto comportamento gastrosecretorio normale medio da istamina del piccolo stomaco di Pawlow.

Una volta in possesso di questi dati di base siamo passati a precisare l'effetto su di essi della crisi convulsiva. Gli esperimenti *ad hoc* sono stati condotti nelle stesse condizioni dei precedenti, salvo che 1° abbiamo pro-



vocato la crisi convulsiva, con la solita modalità già descritta, al termine della prima mezz'ora di secrezione, cioè press'a poco intorno all'acme della

(10) In un altro lavoro entreremo di proposito nella disputa se l'istamina, accanto alle cellule parietali, secernenti acqua, HCl e forse gli altri costituenti inorganici del succo gastrico, stimoli (Bucher ed Ivy; Bucher, Ivy e Gray) ⁽¹¹⁾ o meno, o, addirittura, inibisce Babkin ⁽¹²⁾; Miss Alley ⁽¹³⁾, le cellule principali o peptiche. Qui facciamo soltanto notare che i reperti della presente ricerca (ved. fig. 1) e di altre, dimostrando che la quantità di pepsina del succo da istamina non è mai decisamente inferiore a quella della secrezione a digiuno e tende ad aumentare in modo costante dopo la prima ora di secrezione, non suffragano la concezione di Babkin, secondo il quale il potere digestivo del succo da istamina sarebbe da considerare come la conseguenza di un mero lavaggio meccanico, il cosiddetto « washing out » dei granuli zimogeni dei tubuli ghiandolari, nei quali i granuli si accumulerebbero anche nello stato di quiescenza delle ghiandole.

(11) G. R. BUCHER, A. C. IVY, J. GRAY, « Amer. J. Physiol. », 132, 654 e 698 (1941).

(12) B. P. BABKIN, « Secretary Mechanism of the digestive Glands », P. B. Hoeber, New York, 1950.

(13) A. ALLEY, citata da BABKIN.

attività secretoria da istamina, e, 2° immediatamente prima della provocazione della crisi, abbiamo sospeso l'animale all'asse dell'apparecchio di Cyon, onde poter controllare lo svolgimento della crisi e, come abbiamo già detto altrove⁽²⁾, evitare che questa ostacolasse lo studio del comportamento della secrezione o, comunque, disturbasse il procedimento di raccolta del succo.

Riteniamo utile riportare fedelmente i protocolli di alcune esperienze. Da essi emergono non solo le modalità di decorso dell'esperienza stessa, ma anche, e nella loro interezza, gli effetti della crisi convulsiva sulla secrezione istaminica, e ciò soprattutto in considerazione del fatto che pure questa volta abbiamo osservato pressoché assoluta uniformità nel decorso degli esperimenti, specie dopo il secondo.

Protocollo del 14 maggio 1951 relativo al 1° esperimento intorno agli effetti della crisi convulsiva da ES sulla secrezione istaminica.

- ore 9.02 - l'animale è posto sull'apparecchio.
 » 9.04 - viene praticata l'iniezione sottocutanea di 1 mg d'istamina.
 » 9.08 - s'inizia la secrezione. *Tempo di latenza della secrezione istaminica = 4'.*
 » 9.34 - l'animale viene preparato per lo shock elettrico.
 » 9.36 - sono stati secreti 7.2 ml di succo. Si pratica l'ES, 100 V x 0.1 sec. La crisi si dispiega con le caratteristiche abituali: perdita del sensorio, spasmo tonico di tutta la muscolatura con iperestensione degli arti, minzione, salivazione con saliva viscosa, contrazioni tonico-cloniche, accenno a movimenti di fuga al termine dell'attacco, qualche mugolio di rabbia e movimenti di aggressione. Alle 9.39 circa l'animale viene riposto nella posizione abituale. È notevole il fatto che è mancata completamente l'abituale fenomenologia postaccessuale di eccitamento, cioè l'iperestesia sensitivo-sensoriale, l'aggressività, la paura, la rabbia, ecc. L'animale non si agita; non è sofferente; riconosce le persone.
 » 9.41 - la secrezione riprende
 » 9.55 - succo secreto 1.1 ml
 » 10.10 - » » 1.8 »
 » 10.25 - » » 1.4 »
 » 10.40 - » » 0.7 »
 » 10.55 - » » 0.2 »
 » 11.10 - » » 0.4 »
 » 11.25 - » » 0.2 »

Tempo in minuti della secrezione istaminica	ACIDIMETRIA		Potere peptico in unità peptiche
	HCl libero in g. ‰	Acidità totale in g ‰ di HCl	
0-30'	4.27	4.56	25.92
30'-60'	4.38	4.67	9.58
60'-90'	4.23	4.52	16.30

Protocollo del 17 maggio 1951 relativo al 4° esperimento.

- Ore 9.10 - L'animale è posto sull'apparecchio.
- » 9.12 - viene praticata l'iniezione di 1 mg d'istamina.
- » 9.20 - s'inizia la secrezione. *Tempo di latenza della secrezione istaminica* = 8'.
- » 9.50 - sono stati secreti 8 ml di succo. Si prepara l'animale per lo shock.
- » 9.51 - si pratica l'ES con la solita modalità. La crisi non decorre diversamente dal solito. Quasi al suo termine, incomincia scarsa salivazione mucosa, che aumenta nei minuti successivi. Tale tipo di salivazione dura circa 4' ed è seguita da abbondante salivazione sierosa, tanto da poterne raccogliere in circa 5' oltre 20 ml. In questo momento, a 10' dallo shock, l'animale è colto da una crisi di furore imponente, durante la quale riprende a fluire abbondantissima la saliva mucosa.
- » 10.05 - succo secreto 0.1 ml
- » 10.20 - » » 0.3 ml
- » 10.35 - » » 0.1 ml
- » 10.50 - » » 0.1 ml. In quest'ora la suddetta crisi si è ripetuta 6 volte con gli stessi caratteri ed abbiamo temuto di perdere l'animale. Ogni crisi era accompagnata da perdita di urine, gradatamente meno abbondante. La secrezione gastrica si è praticamente arrestata.

Tempo in minuti della secrezione istaminica	ACIDIMETRIA		Potere peptico in unità peptiche
	HCl libero in g ‰	Acidità totale in g ‰ di HCl	
0-30'	4.41	4.86	40
30'-60'	4.0	4.31	—
60'-90'	—	—	25

Tali effetti si possono così riassumere: *a)* aumento del tempo medio di latenza, il quale da 4'25" passa, dopo la seconda crisi, a 9' circa; *b)* arresto della secrezione durante e subito dopo la crisi, in media per 7'; *c)* riduzione della quantità totale di succo, per cui dal valore di 14 ml in due ore si passa a 9.36 ml. È da notare che tale riduzione si fa esclusivamente a spese della quantità di succo secreto nei 90' consecutivi alla crisi convulsiva, per cui mentre in condizioni basali il valore medio è di ml. 7.13, per effetto della crisi si passa al valore medio di 1.9 ml; *d)* alla notevolmente diminuita velocità di secrezione consecutiva alla crisi, ha corrisposto soltanto una lieve diminuzione del tasso dell'HCl libero e combinato, corrispondente in media rispettivamente a gr 3.56 e gr 3.90 ‰; *e)* il potere peptico è sceso intorno alle 20 unità peptiche.

Le figure 2 e 3 sintetizzano gli anzidetti risultati.

Concludendo, la crisi convulsiva da ES e le condizioni da essa create nell'organismo determinano un arresto e poi una notevole diminuzione dell'attività delle ghiandole, che sotto l'azione dello stimolo istaminico producono acqua, acido e pepsina.

Il meccanismo di questa parziale inibizione non è chiaro.

Abbiamo osservato in un passato lavoro ⁽²⁾ e rivisto nei protocolli di questo che, in conseguenza della crisi da ES, l'animale manifesta integrate reazioni di difesa nelle quali abbondano i segni di diffusa attività simpatica.

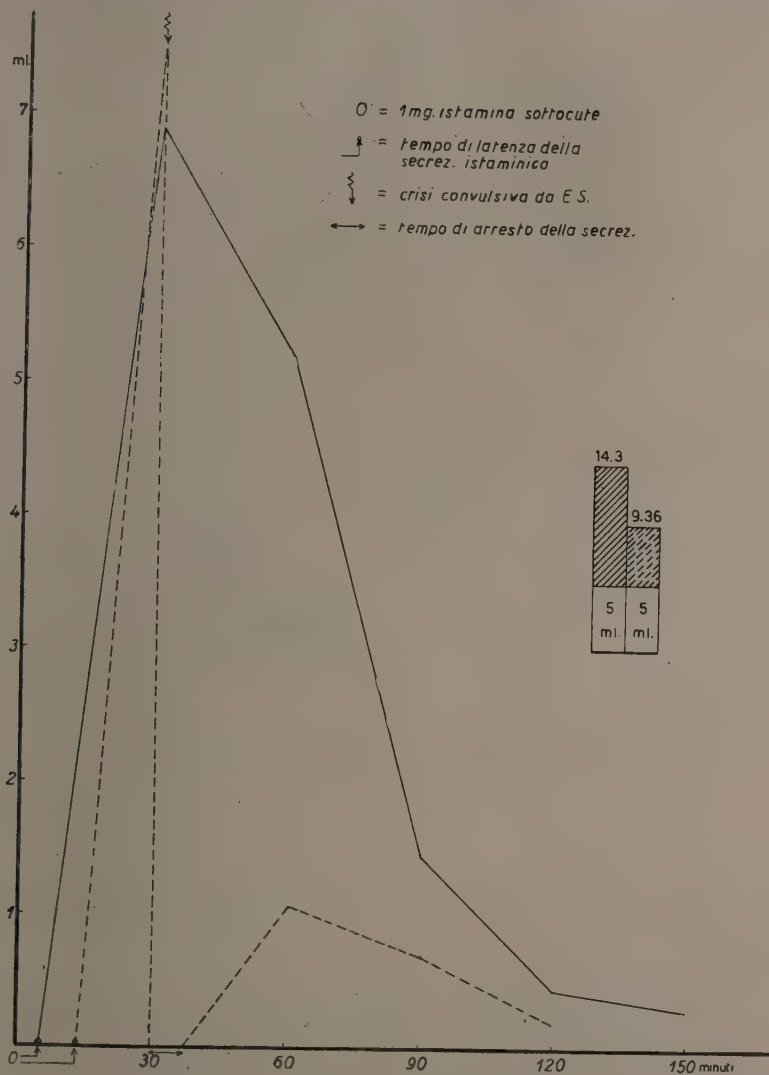


Fig. 2.

Si altera cioè l'equilibrato stato di tono dei centri vegetativi intrassiali e prevale il tono dei centri simpatici.

Se ammettiamo l'asserita influenza inibitrice del simpatico sulle ghiandole gastriche, verrebbe fatto di pensare che la predominanza dell'azione simpatica eserciti un'inibizione anche sulla secrezione da istamina.

Ma tale ipotesi deve essere avanzata con molta riserva, perché non è suffragata dai reperti della Brown ⁽¹⁴⁾, secondo la quale non si avrebbe una dimostrabile modificazione dell'attività gastrosecretoria da istamina, misurata però sulla base della sola acidità, né con l'esclusione permanente delle fibre pregangliari, mediante rimozione della catena simpatica, né di quelle postgangliari, mediante rimozione dei gangli celiaci.

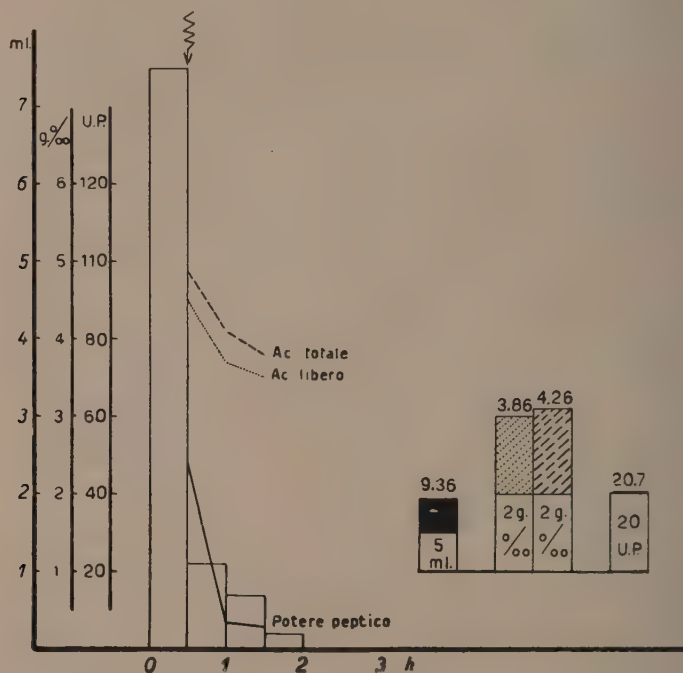


Fig. 3.

Dopo questi reperti sembra difficile pensare che la condizione opposta, cioè la predominanza della azione simpatica, possa apprezzabilmente inibire la secrezione da istamina.

Se veramente il punto d'azione dell'istamina sulle ghiandole gastriche è al di là delle terminazioni nervose dei neuroni postgangliari parasimpatici e simpatici, ed è indipendente da questi, l'azione inibitrice svolta dalla crisi convulsiva da ES sulla secrezione istaminica del piccolo stomaco di Pawlow dovrebbe svilupparsi per via umorale e potrebbe rappresentare un rimarchevole esempio dell'influenza di una condizione umorale, conseguente alla crisi convulsiva da ES, su uno stimolo umorale, quello istaminico, o sulla reattività del ricettore dello stesso.

(14) M. R. BROWN, « Amer. J. Physiol. », 105, 399 (1933).

Che la crisi convulsiva da ES sia capace di determinare profonde modificazioni nella composizione del sangue sembrerebbe dimostrato. È noto difatti che Delay e Soulairac ⁽¹⁵⁾ descrivono una molto complessa « crisi umorale dell'epilessia elettrica », della quale, per quanto riguarda il sangue, farebbero parte l'iperglicemia, l'iperlipidemia, l'iperprotidemia, l'ipercalcemia, l'ipernatremia, l'ipopotassiemia, l'acidosi, l'ipercloremia, l'iperfosforemia. Secondo Delmas-Marsalet almeno parte di tale sindrome è da porre nel conto della semplice convulsione, cioè del lavoro muscolare ad essa connesso. Difatti è risaputo dalle ricerche di Dill, Talbott ed Edwards che il lavoro muscolare determina ipercalcemia, ipopotassiemia, acidosi, iperprotidemia, iperfosforemia, ecc. Ma, secondo Delay, il fatto che i disordini neurovegetativi e l'iperglicemia continuino a manifestarsi dopo la semplice elettroassenza, costituisce la prova che un altro fattore, il diencefalo, interviene nel determinismo della sindrome.

Comunque sia, per quanto lo studio degli effetti delle modificazioni della composizione del sangue sull'attività delle ghiandole gastriche rappresenti tuttora un campo inesplorato, non è improbabile che alcune delle modificazioni sanguigne indotte dalla crisi convulsiva da ES, determinino una condizione delle cellule secernenti per cui queste non sono capaci di rispondere con l'abituale intensità allo stimolo istaminico.

A sostegno di quest'ipotesi stanno gli esperimenti di Brown e Vineberg ⁽¹⁶⁾ dai quali emerge che, nel cane, l'aumento del CO₂ e l'abbassamento del pH del plasma diminuiscono il volume e l'acidità del succo da istamina e quelli di Margaria e Talenti ⁽¹⁷⁾, dai quali appare che « un esercizio muscolare breve e violento, implicante un forte debito di ossigeno, determina un abbassamento del pH fino a 0.23 ». Ora per effetto delle crisi convulsive da ES si ha certamente, tra l'altro, dapprima acidosi per ritenzione di CO₂ e poi un abbassamento del pH per il ripetersi degli sforzi muscolari brevi e violenti connessi con le crisi di agitazione.

Tutto quanto abbiamo detto sin qui, si può riassumere utilmente come segue:

1° la crisi convulsiva da ES arresta e deprime la secrezione gastrica da istamina;

2° se, come si ammette, tale secrezione è del tutto indipendente dal sistema nervoso ed è, invece, espressione di un'azione dell'amina sulle strutture della mucosa gastrica, forse direttamente sulle cellule ghiandolari, allora l'azione inibitrice svolta dalla crisi convulsiva da ES sulla secrezione istaminica del piccolo stomaco di Pawlow si dovrebbe sviluppare per via umorale, nel senso che, per effetto della crisi, si creerebbe una condizione umorale per la quale le cellule secernenti non sarebbero più capaci di rispondere con l'abituale intensità allo stimolo istaminico;

15) J. DELAY, *Méthodes biologiques en clinique psychiatrique*, Masson, Paris, 1950.

16) J. S. L. BROWN, A. VINEBERG, « J. Physiol. », 75, 345 (1932).

17) R. MARGARIA e C. TALENTI, « Arch. di Fisiol. », 32, 165 (1933).

3° la condizione umorale sufficiente, consecutiva alla crisi, potrebbe essere rappresentata dall'aumento del CO_2 e dall'abbassamento del pH del sangue, i quali, come si sa, diminuiscono il volume e l'acidità del succo da istamina;

4° i risultati di queste ricerche, nel mentre consentirebbero di limitare al determinismo umorale il campo delle ipotesi da noi formulate sul meccanismo di produzione delle modificazioni gastrosecretorie immediatamente successive alla crisi convulsiva da ES, rappresenterebbero pure un notevole esempio dell'influenza di una condizione umorale, nella fattispecie conseguente all'eccitamento massivo dei centri encefalici, su uno stimolo umorale, cioè quello istaminico, o sulla reattività del ricettore a questo stimolo.

Microbiologia. — *Ossigeno e lisi in ghiacciaia*^(*). Nota^(**) di
GIORGIO CAVALLO e GIUSEPPE FALCONE, presentata dal Corrisp.
L. CALIFANO.

L'intensità degli effetti delle radiazioni sulle cellule dipende dalla tensione dell'ossigeno presente.

In diversi organismi vegetali ed animali è stata infatti dimostrata netta diminuzione delle aberrazioni cromosomiche provocate da irradiazioni ionizzanti in assenza di ossigeno o in ambiente che lo contenga in concentrazioni inferiori al 20 %. (Thoday e Reed⁽¹⁾; Giles e coll.^(2, 3, 4); Baker e Sgourakis⁽⁵⁾; Hayden e Smith⁽⁶⁾).

Anche il numero di rotture cromosomiche, indotte a mezzo dei raggi Roentgen in semi di granturco, è influenzato dalla tensione di O_2 , anzi è direttamente proporzionale alla concentrazione di questo gas (Schwarz⁽⁷⁾). Risultati analoghi sono stati ottenuti da King e Coll.⁽⁸⁾ e da Glass e Plaine⁽⁹⁾.

Recentemente è stato dimostrato che l' O_2 di per sé induce aberrazioni cromosomiche dello stesso tipo di quelle causate dalle radiazioni ionizzanti. Conger e Fairchild⁽¹⁰⁾ hanno, infatti, trovato che esponendo per un'ora pol-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della Università di Napoli.

(**) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1953.

(1) J. M. THODAY, J. REED, « Nature », 160, 608 (1947).

(2) N. H. GILES, H. P. ROLEY, « Proc. Nat. Acad. Sci. », 35, 640 (1949).

(3) N. H. GILES, H. P. ROLEY, « Proc. Nat. Acad. Sc. », 36, 337 (1950).

(4) N. H. GILES, A. V. BEATTY, « Science », 112, 643 (1950).

(5) W. K. BAKER, E. SGOURAKIS, « Proc. Nat. Acad. Sc. », 36, 176 (1950).

(6) B. HAYDEN, L. SMITH, « Genetics », 34, 26 (1949).

(7) D. SCHWARZ, « Proc. Nat. Acad. Sc. », 38, 490 (1952).

(8) E. D. KING, H. A. SCHNEIDERMAN, K. SUX, « Proc. Nat. Acad. Sc. », 38, 34

(1952).

(9) B. GLASS, H. L. PLAINE, « Proc. Nat. Acad. Sc. », 38, 697 (1952).

(10) A. D. CONGER, L. M. FAIRCHILD, « Proc. Nat. Acad. Sc. », 38, 289 (1952).

line di *Tradescantia paludosa* in ambiente contenente il 100% di O_2 si ottengono rotture cromosomiche della stessa intensità di quelle causate da una irradiazione Roentgen di 1200 r; invece per una tensione di ossigeno del 65% i risultati corrispondono all'incirca a quelli ottenuti con 350 r; mentre per concentrazioni del 20% i cromosomi non vengono in alcun modo influenzati. Questa identità di effetti provocata da O_2 e dai raggi X deve evidentemente avere a base un comune meccanismo d'azione.

Questo meccanismo potrebbe essere rappresentato in entrambi i casi dall'azione di radicali, quali l'OH e l' HO_2 , che si formano nell'acqua sia per effetto di radiazioni ionizzanti (azione indiretta delle irradiazioni) che del solo ossigeno (Conger).

Mentre, però, come si è detto, nei cromosomi l'ossigeno ha effetto corrispondente a quello dell'irradiazione, non pare che per le mutazioni batteriche esso sia egualmente efficace, secondo i risultati di Wyss e Coll.⁽¹¹⁾ che non hanno ottenuto alcun mutante per azione dell'ossigeno, fatto gorgogliare per un'ora nel mezzo di cultura, prima della semina batterica.

Né con l'ossigeno, come dimostrano le presenti ricerche, si ottiene induzione batteriofagica di germi lisogeni

che, invece, si ha con le irradiazioni ionizzanti nel noto fenomeno di Lwoff.

Su questo fenomeno però ha grande importanza l'aereazione.

Welsch e Cavallo⁽¹²⁾, infatti, hanno dimostrato che brodoculture di *M. pyogenes* lisogeno, sottoposte a induzione da raggi U. V., si lisano precocemente.

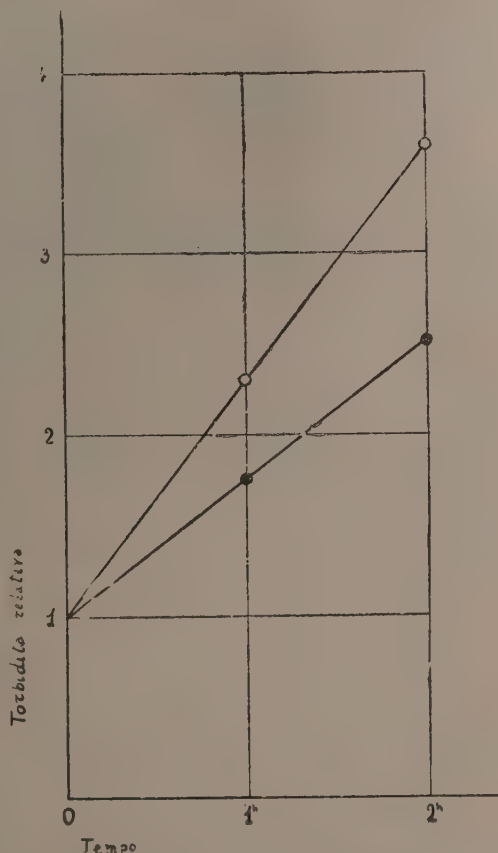


Fig. 1. — Brodoculture di *M. pyogenes* lisogeno, sottoposte all'azione dell'ossigeno (valori di torbidità relativa).

- cultura di controllo.
- cultura ossigenata.

(11) O. WYSS, F. HAAS, J. B. CLARK, W. S. STONE, « J. Bact. », 56, 51 (1948).

(12) M. WELSCH, G. CAVALLO, « C. R. Soc. Biol. », 145, 1421 (1951).

mente e con alto rendimento in bacteriofago se mantenute a 37° C. in continua agitazione, laddove, se i germi irradiati sono posti in tubi da saggio, si moltiplicano molto lentamente e non subiscono il fenomeno dell'induzione lisogenica. Se però, la ossigenazione della cultura non determina

l'induzione, essa provoca quel tipo di lisi messo recentemente in evidenza da Cavallo e Cantelmo⁽¹³⁾ ed indicato come « lisi in ghiacciaia ».

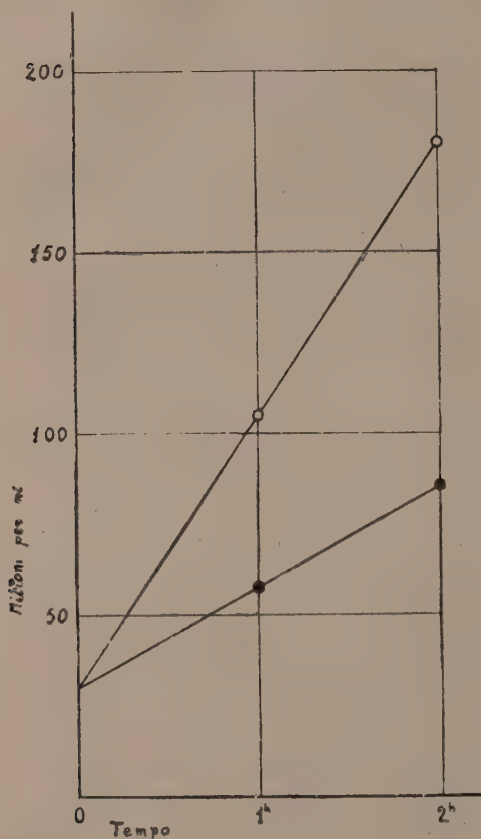


Fig. 2. - Brodocolture di *M. pyogenes* lisogeno, sottoposte all'azione dell'ossigeno (numero di cellule viventi).

- cultura di controllo.
- cultura ossigenata.

PARTE SPERIMENTALE. - Il ceppo di *Micrococcus pyogenes* lisogeno impiegato è stato il 129, coltivato nel seguente mezzo di cultura: estratto di carne gr. 3, peptone gr. 15; NaCl gr. 0,2; K_2HPO_4 gr. 0,2; acqua distillata fino ad 1 litro; pH portato a 7,2 con NaOH.

In culture di 3 ore, all'inizio della fase esponenziale di crescita, si è fatta gorgogliare una corrente di O_2 , filtrata per candela ed a pressione costante.

Si sono eseguite prove con tempi diversi di ossigenazione (30'-60'-90'-120') e per temperature diverse (20°, 30°-37° C.).

Terminato il gorgogliamento, le culture sono state tenute in termostato a 37° C., in modo da raggiungere un periodo complessivo di 6 ore, compreso il tempo di ossigenazione.

A tempi diversi, da queste brodocolture, si sono prelevati e trasportati in ghiacciaia cam-

pioni, sui quali, dopo 12-24-48 ore di permanenza a 0° C, sono state eseguite misure di torbidità e numerazioni di cellule viventi e di unità bacteriofagiche.

Ad identico trattamento sono state sottoposte brodocolture di *M. pyogenes aureus* non lisogeno (ceppo B).

(13) G. CAVALLO, P. CANTELMO, «C. R. Soc. Biol.», 146, 1419 (1951).

Per la misura della torbidità è stato usato il nefelometro di Pulfrich-Zeiss, secondo la tecnica di Welsch ^(14, 15). Tutti i valori di torbidità sono espressi in funzione della torbidità iniziale, posta eguale a 1.

Per la numerazione dei germi viventi è stato usato il metodo del doppio strato di Gratia, modificato ⁽¹⁶⁾. Il campione preso in esame è stato anzitutto diluito in serie (progressione geometrica-ragione 0,1) in brodo. Si è introdotto quindi ml. 0,5 della diluizione scelta in un tubo contenente ml. 2,5 di agar brodo (1,5 ml. brodo + 1 ml. agar al 2%) mantenuto liquido in bagno termoregolato a 50°C. Infine il contenuto di questo tubo è stato trasferito in una capsula di Petri, contenente uno strato di agar.

Le colonie sono state contate dopo 18-24 ore.

Lo stesso metodo di Gratia è stato adoperato per la numerazione delle « *tâches vierges* », il ceppo sensibile di *M. pyogenes* essendo il 126.

Il gorgogliamento di O₂ determina un certo rallentamento della velocità di crescita batterica, dimostrabile tanto dal comportamento dei valori di torbidità che da quello del numero delle cellule viventi, evidentemente per la bassa tensione che così raggiunge il CO₂ nel mezzo ambiente.

Sia durante il periodo di contatto con O₂, che in quello di incubazione a 37°C., la torbidità aumenta progressivamente. Siccome le culture venivano seguite complessivamente, per sei ore, si può escludere che la ossigenazione, nelle condizioni esposte, induca la lisi batteriofagica di germi lisogeni ciò che risulta pure dal rapporto fagi/batteri viventi, che praticamente non subisce variazioni tanto dopo il gorgogliamento di O₂, quanto dopo l'incubazione a 37°C.

TABELLA I.

Lisi in ghiacciaia di culture di « M. pyogenes » lisogeno, sottoposte all'azione dell'ossigeno per 60', e tenute per 90' in termostato a 37°C.

Durata del soggiorno a 0°C in ore	Torbidità relativa	Bacteri/ml $\times 10^6$	Unità batteriofagiche/ml $\times 10^6$
0	1,00	275	30
3	1,00	270	31
12	1,00	268	30
24	0,75	190	25
48	0,49	99	22

Se, invece, una brodocultura trattata con O₂ viene lasciata poi a 0°C. va incontro a lisi spontanea; l'illimpidimento è soltanto parziale per tempi di

(14) M. WELSCH, « C. R. Soc. Biol. », 128, 795 (1938).

(15) M. WELSCH, « C. R. Soc. Biol. », 130, 797 (1939).

(16) M. WELSCH, G. CAVALLO, P. CANTELMO, « Rev. Belge de Path. Méd. Exp. », 22, 241 (1953).

ossigenazione inferiore ai 120' mentre è totale per brodoculture in cui l'O₂ abbia gorgogliato per almeno 2 h.

La lisi totale si osserva soltanto se le culture sottoposte all'azione dell'ossigeno, per tempi ottimali, siano tenute poi, per almeno 30' a 37° C. Se si tralascia tale incubazione si avvera lisi parziale, se però, la incubazione a 37° C. si prolunga oltre le due ore, analogamente a quanto avviene per i raggi U. V., la lisi in ghiacciaia non si manifesta.

Il tempo di permanenza a 0° C. sufficiente alla lisi totale è di 48 ore, e la temperatura più efficace per l'azione dell'ossigeno è quella di 20° C.

TABELLA II.

Lisi in ghiacciaia di culture di « M. pyogenes » lisogeno, sottoposte all'azione dell'ossigeno per 120', e tenute per 30' in termostato a 37° C.

Durata del soggiorno a 0° C in ore	Torbidità relativa	Bacteri/ml $\times 10^6$	Unità bacteriofagiche/ml $\times 10^6$
0	1,00	210	22
3	1,00	205	20
12	1,00	204	20
24	0,65	115	18
48	0,25	11	8

La numerazione delle cellule viventi dimostra che esse diminuiscono lentamente nelle prime ore di permanenza in ghiacciaia. Il ritmo di tale diminuzione aumenta poi gradatamente sino ad ottenersi, per le condizioni ottimali di ossigenazione e per una permanenza di 48 ore a 0° C., mortalità quasi totale.

Analogamente a quanto avviene per la lisi in ghiacciaia non vi è alcuna liberazione di fago durante l'illimpidimento delle brodoculture.

Non si è notato aumento apprezzabile della viscosità nelle culture lisate.

Cavallo e Cantelmo nel 1951 hanno trovato che brodoculture di *Micrococcus pyogenes* lisogeno, sottoposte ad induzione a mezzo di irradiazione U. V., e trasportate durante la seconda metà della fase prelitica, dal termostato a 37° C. in ghiacciaia, vanno incontro a completa lisi ottica.

Questo illimpidimento si accompagna a diminuzione progressiva del numero dei batteri viventi ed a lieve riduzione del numero dei fagi.

La lisi in ghiacciaia può essere ottenuta nelle stesse condizioni anche in sospensioni batteriche, irradiate con dosi di raggi U. V. inferiori a quella necessaria per l'induzione bacteriofagica, e che, se lasciate in termostato, non presenterebbero alcun illimpidimento.

Tale tipo di lisi si accompagna ad aumento notevole della viscosità, tanto più netto quanto più alta è la torbidità iniziale. Contemporaneamente non si

osserva liberazione di fago, ma a causa della riduzione marcatissima del numero dei germi viventi, il valore del rapporto fago/germi aumenta considerevolmente e tanto più quanto più vicina alle condizioni ottimali è stata l'irradiazione.

La lisi in ghiacciaia è stata dimostrata anche in *M. pyogenes* sottoposto ad altri agenti induttori: shock termico ⁽¹⁷⁾, riducenti ⁽¹⁸⁾, cloramine ⁽¹⁹⁾. Nel caso della lisi in ghiacciaia da cloramine il fenomeno non si accompagna ad aumento della viscosità, così come quello da ossigeno studiato nel presente lavoro.

Sul meccanismo di questo particolare tipo di lisi sono state eseguite interessanti ricerche da Welsch ^(20, 21) il quale ha dimostrato che si ottiene lo stesso fenomeno ponendo a 0° C. un miscuglio di stafilococchi lisogeni normali e di stafilococchi indotti. Se ne conclude che, nel caso di brodoculture sottoposte ad insufficiente irradiazione U. V., solo una certa aliquota di germi ha subito l'induzione; lasciando la brodocultura a 37° C. la moltiplicazione dell'aliquota indenne maschera facilmente la lisi dei germi indotti. Se, invece, la brodocultura è trasferita in ghiacciaia, dopo che sia trascorso un tempo pari almeno alla metà del periodo di incubazione prelitica ⁽²²⁾, il processo di riproduzione dei germi normali è arrestato, mentre non si arresta la lisi della frazione di batteri indotti. Nei processi di lisi della aliquota indenne che si determinerebbe in un secondo tempo, avrebbe importanza, sempre secondo Welsch, il quale avvicina la lisi in ghiacciaia alla « lyse par entraînement » di Wahl e Josse-Goichot ⁽²³⁾, accanto al batteriofago il sistema autolitico dello stafilococco.

Le presenti ricerche costituiscono la prima dimostrazione della indipendenza della lisi in ghiacciaia dal fenomeno di Lwoff.

Ciò induce a ritenere che fra le varie sostanze ad azione radiomimetica, alcune agiscono sia sul probatteriofago che sul sistema endocellulare da cui dipende il manifestarsi della lisi in ghiacciaia, e altre che agiscono soltanto su quest'ultimo.

Desta curiosità il fatto che la lisi in ghiacciaia che si può anche chiamare lisi « caldo-freddo » (hot-cold) si avveri, tra i molti germi su cui si è ricercata, solo per lo stafilococco, germe che produce ⁽²⁴⁾, d'altro canto, la lisina β , che è detta lisina « hot-cold » perché agisce a freddo dopo incubazione a caldo. Se tra i due fatti vi sia semplice relazione casuale o un più stretto nesso dirà l'indagine futura.

(17) G. CAVALLO, « C. R. Soc. Biol. », **145**, 1885 (1951).

(18) G. CAVALLO, « C. R. Soc. Biol. », **146**, 303 (1952).

(19) G. CAVALLO, G. FALCONE, « Boll. Ist. Sierot. Milanese », **31**, 545 (1952).

(20) M. WELSCH, « C. R. Soc. Biol. », **146**, 1397 (1952).

(21) M. WELSCH, « C. R. Soc. Biol. », **147**, 537 (1953).

(22) Per periodo di incubazione prelitica si intende il periodo di tempo intercorrente tra shock induttore ed inizio della lisi batteriofagica dei germi lisogeni.

(23) R. WAHL, J. JOSSE-GOICHOT, « Ann. Inst. Pasteur », **76**, 43 (1949).

(24) Un tipo di lisina « hot-cold » è pure la α -tossina del *Clostridium welchii*.

Microbiologia. — *Perossidi e filamentizzazione batterica* (*).
Nota (**) di GIORGIO CAVALLO e GIUSEPPE FALCONE, presentata dal
Corrisp. L. CALIFANO.

La filamentizzazione batterica è una delle evenienze cui può andare incontro una cellula batterica sottoposta ad irradiazione, le altre essendo la morte, la mutazione, la insensibilità ⁽¹⁾.

L'azione mutagena secondo Wyss e Coll. ⁽²⁾ è da ascriversi a formazione di perossidi nel mezzo di sospensione delle cellule, i quali perossidi, dunque, sarebbero i veri agenti effettori del fenomeno e ciò vien dimostrato dal fatto che la sola aggiunta di perossidi al terreno di cultura dà luogo a mutanti, ma è del tutto sconosciuto il meccanismo con cui i perossidi agiscono al livello molecolare.

Anche la filamentizzazione è inducibile da perossidi, come viene dimostrato nelle presenti ricerche, ciò che trova riscontro in qualche dato indiretto già esistente per la filamentizzazione da irradiazione o per il pleiomorfismo da uretano, da cloramina o da antibiotici.

Interessanti e molto citate sono le ricerche di Nickerson e Jillson ⁽³⁾ dimostranti che il fattore responsabile della divisione cellulare batterica deve essere identificato con una sostanza contenente gruppi —SH, la cui ossidazione da parte degli agenti filamentizzanti sarebbe responsabile della mancata divisione citoplasmatica.

Pratt e Dufrenoy ⁽⁴⁾ hanno dimostrato che le forme mostruose e filamentose da penicillina sono appunto dovute alla capacità che ha questo antibiotico di ossidare tali gruppi —SH in gruppi —S—S.

Analoga azione sui tioenzimi possiedono i perossidi.

Nelle forme pleiomorfe da uretano si ha scarso contenuto in catalasi (Pontieri ⁽⁵⁾), così come in quella da cloramina l'attività catalasica è significativamente ridotta (Falcole e Pontieri ⁽⁶⁾). Se però, tale diminuzione abbia effetto determinante sul pleiomorfismo o se essa ne sia soltanto una conse-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della Università di Napoli.

(**) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1953.

(1) Per la filamentizzazione da Raggi Roentgen vedi D. E. LEA, R. B. HAINES, C. A. COULSON (« Proc. Roy. Soc. London B. », 123, 1 (1937)) per lo studio citologico dei filamenti vedi O. WYSS, F. HAAS, J. B. CLARK, W. S. STONE (« J. cell. and comp. Phys. », 35, suppl. 1, 133 (1950)) per la fotoreattivazione della filamentizzazione vedi G. MAGNI (« La ricerca scientifica », 22, 1578 (1952)).

(2) O. WYSS, W. S. STONE, J. B. CLARK, « J. Bact. », 54, 767 (1947).

(3) D. F. JILLSON, W. J. NICKERSON, citato da W. J. NICKERSON in « Nature », 162, 241 (1948).

(4) R. PRATT, J. DUFRENOY, « Bact. Rev. », 12, 79 (1948).

(5) G. PONTIERI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, 14, 304 (1953).

(6) G. FALCONE, G. PONTIERI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 29, 703 (1953).

guenza non si può ancora affermare; resta in ogni caso da considerare il rapporto notato tra forme aberranti e contenuto in catalasi.

MATERIALE E METODO. — Si è adoperato il ceppo 806 di *E. coli* ed H_2O_2 al 3 %.

Il perossido, filtrato su Seitz, opportunamente diluito, si aggiungeva in quantità scalari a brodo (nutrient broth Difco), nel quale si innestava una quantità di germi corrispondenti a circa $2 \cdot 10^7$ per cc. di mezzo di cultura. Tali germi provenivano da brodculture di 24 ore di sviluppo.

Sono state fatte osservazioni microscopiche di ora in ora dalla terza alla nona, quindi a 16–24 ore dalla semina, a fresco con ottica a contrasto di fase e con ottica comune su preparati fissati e colorati con fucsina di Ziehl diluita. Per lo studio delle strutture nucleari delle forme ottenute si è adoperato la colorazione di Giemsa, previo fissaggio ai vapori di ac. osmico, e idrolisi acida secondo Robinow.

Per ogni esperimento si allestivano controlli su germi sviluppatasi in terreni di identica composizione, ma privi di H_2O_2 .

La più spinta filamentizzazione si è ottenuta con culture in cui il perossido di idrogeno (3 %) raggiungeva concentrazioni finali nel mezzo di cultura oscillanti tra 1/1000 ed 1/500.

La filamentizzazione nei terreni cui è stato aggiunto il perossido è osservabile fino dalla 4^a ora di sviluppo. Quasi tutti i germi presentano aumento notevole del diametro longitudinale (7–9 micron) e lieve, ma sensibile, del diametro trasverso.

In un esiguo numero di germi, la filamentizzazione è di grado più elevato mentre un'aliquota variabile dal 5 al 10 % appare di normale morfologia bacillare.

Tra la 5^a e la 6^a ora quasi tutte le forme presenti sono costituite da filamenti, alcuni raggiungendo i 50–60 micron di lunghezza.

Alla 7^a ora, invece, la filamentizzazione appare notevolmente in regresso.

Accanto alle forme filamentose, diverse delle quali sono in via di degenerazione, come si deve arguire dalla scarsa basofilia e da evidenti segni di lisi, si osservano germi di forma e di grandezza normali. Qualche rara forma filamentosa si nota però ancora dopo 24 ore.

Nelle forme filamentose i nuclei sono disposti serialmente lungo l'asse maggiore e regolarmente spazati tra loro, fatto già osservato da molti in forme filamentose altrimenti prodotte e indicante la disgiunzione della divisione nucleare da quella citoplasmatica, cioè il ben noto fenomeno di vantaggio del fattore L su quello D di Hinshelwood⁽⁷⁾.

Si deve notare che il perossido esercita però anche una certa azione tossica sui nuclei (o forse anche non tutti i nuclei di una forma filamentosa sono metabolicamente equivalenti) perché accanto a forme filamentose con

(7) C. N. HINSHELWOOD, *The chemical Kinetics of bacterial cell*, Oxford, Clarendon Press 1946.

nuclei equidistanti e ben colorabili se ne osservano di quelle con nuclei abnormi, e per forma e per colorabilità.

La regressione del fenomeno, osservabile tra settima ed ottava ora, può essere messa in relazione con la diminuzione del perossido di idrogeno nella brodocultura, diminuzione determinata sia dalla catalasi cellulare, che da scissione spontanea di esso, per cui la divisione citoplasmatica non è più inibita e segue il suo ritmo normale.

Anche la presenza di forme resistenti all'azione filamentizzante dell'acqua ossigenata può essere responsabile della nuova popolazione batterica tanto più che, come si è detto, sin dall'inizio si osserva una piccola aliquota di germi ad usuale morfologia bacillare.

Ciò è anche in armonia con le ricerche di Witkin⁽⁸⁾ che ha osservato come sia possibile isolare ceppi di *E. coli* resistenti sia all'effetto letale che a quello inibente la fissione dei raggi X, dei raggi U. V. e della penicillina.

(8) E. M. WITKIN, « Genetics », 32, 221 (1947).

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 novembre 1953

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane.* Nota I^(*) del Socio BENIAMINO SEGRE^(**).

1. Nel presente lavoro, $f = f(x, y, z)$ denoterà sempre una forma armonica ternaria, non identicamente nulla ed a coefficienti reali, di grado $n > 2$. Adottando per abbreviare le notazioni

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{ecc.},$$

risulterà così identicamente $f_{ij} = f_{ji}$, ed inoltre:

$$(1) \quad f_{11} + f_{22} + f_{33} = 0.$$

Designeremo poi con $h = h(x, y, z)$ la forma hessiana della f , ossia porremo:

$$(2) \quad h = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22}f_{33} - f_{23}^2f_{11} - f_{13}^2f_{22} + 2f_{12}f_{13}f_{23} - f_{12}^2f_{33}.$$

Ha luogo allora il fatto curioso e riposto (banale soltanto per n dispari) che *esistono sempre valori reali non tutti nulli delle x, y, z per i quali $h(x, y, z)$ si annulla*. Questa interessante proposizione, tanto più notevole in quanto un'analoga proprietà non sussiste per le forme binarie ($n = 2$), è stata ottenuta nel 1938 da Hans Lewy - in modo estremamente ingegnoso ma

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1953.

(**) Il contenuto di questa Nota I e della successiva Nota II fu dall'autore comunicato nel settembre scorso, a Venezia, al Simposio internazionale di Geometria differenziale.

poco naturale - poggiando su di un lemma metrico-topologico di R. M. Robinson, a prima vista assai lontano dall'argomento in questione, e su certe proprietà degli zeri dei polinomi di Legendre⁽¹⁾.

In questa Nota I e nella successiva Nota II mostreremo come la suddetta proposizione possa venire stabilita con procedimento essenzialmente algebrico, assai semplice dal punto di vista concettuale, il quale fornisce in pari tempo varie riposte proprietà ulteriori delle forme armoniche ternarie (nn. 4, 12) e delle loro hessiane (nn. 6-11). Proveremo così fra l'altro (n. 7) che, se $h(x, y, z)$ non svanisce identicamente (e le f per le quali risulta identicamente $h = 0$ verranno tutte determinate nel n. 3), nell'intorno di ogni zero reale di $h(x, y, z)$ cadono valori delle x, y, z per i quali risulta $h > 0$ e valori per i quali risulta $h < 0$; e vedremo poi che l'equazione $h(x, y, z) = 0$ ammette sempre infinite soluzioni nel campo reale. Incidentalmente, otterremo inoltre (n. 5) una classe di superficie birazionali di S_4 che contengono un sistema algebrico d'indice 2 di curve birazionali formanti su esse un doppio sistema coniugato (o rete, nel senso della geometria proiettiva differenziale).

Va rilevato che la prima proprietà dell'hessiano enunciata nel capoverso precedente non si estende alle forme armoniche in più di tre variabili. Infatti, ad esempio, le forme quaternarie biquadratiche

$$xyzt, \quad x^3y - xy^3 + z^3t - zt^3$$

hanno come forme hessiane le

$$-3x^2y^2z^2t^2, \quad 81(x^2 + y^2)^2(z^2 + t^2)^2,$$

le quali - nel campo reale - non assumono rispettivamente nessun valore positivo e nessun valore negativo. Tuttavia, sia l'una che l'altra di queste hessiane si annulla per valori non tutti nulli delle variabili; e precisamente, in uno spazio S_3 in cui le (x, y, z, t) siano coordinate omogenee, il luogo dei punti reali in cui quelle hessiane di annullano consta rispettivamente di quattro piani e di due rette. Resta quindi ancora da decidere se la proposizione di H. Lewy, dianzi citata, si estenda o meno alle forme armoniche in più di tre variabili⁽²⁾. Il caso delle forme armoniche binarie e delle loro hessiane, verrà compiutamente studiato nel numero seguente.

2. Il fatto che una forma binaria

$$\varphi(x, y) = ax^n + nbx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \dots + py^n$$

(1) Cfr. H. LEWY, *A property of spherical harmonics*. *Amer. Journ. of Math.* **60**, 555-560 (1938).

(2) Essa vale certamente per le forme cubiche quaternarie. Questo fatto è ovvio per le forme singolari; per quelle non singolari, esso può dedursi da ciò che ogni superficie cubica reale non singolare di S_3 contiene qualche retta reale di tipo iperbolico (su cui cioè la superficie possiede due punti parabolici reali e distinti). Per quest'ultima proprietà, cfr. B. SEGRE, *The non-singular cubic surfaces* (Oxford, The Clarendon Press, 1942), § 31.

(di grado $n \geq 1$) sia armonica, e cioè soddisfi identicamente alla $\varphi_{11} + \varphi_{22} = 0$, si traduce in $n - 1$ equazioni lineari omogenee negli $n + 1$ coefficienti a, b, c, \dots, p , le quali forniscono successivamente ed univocamente c, \dots, p come funzioni (reali) di a e b . Esiste quindi una ed una sola φ armonica per la quale i primi due coefficienti a, b assumano valori assegnati. Essa risulta reale se, e soltanto se, questi coefficienti sono reali, nel qual caso tale φ non può dunque differire dalla forma (notoriamente armonica) data dalla

$$(3) \quad \varphi(x, y) = \Re \{ (a - ib)(x + iy)^n \},$$

dove il secondo membro denota la parte reale della funzione fra graffe. Pertanto:

Ogni forma binaria armonica a coefficienti reali può venire rappresentata, ed in un sol modo, con la (3).

Se si pongono i numeri complessi $a + ib$ ed $x + iy$ sotto forma trigonometrica:

$$a + ib = \rho_0 e^{i\theta_0}, \quad x + iy = \rho e^{i\theta},$$

la (3) diventa

$$\varphi(x, y) = \rho_0 \rho^n \cos(n\theta - \theta_0),$$

e si annulla quindi per

$$\theta = \frac{2\theta_0 + (2k+1)\pi}{2n} \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Ne consegue che la forma armonica (3) si annulla assumendo

$$y = x \tan \frac{2\theta_0 + (2k+1)\pi}{2n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

laonde:

Una qualunque forma binaria armonica di grado n , a coefficienti reali, possiede n radici reali e distinte.

Dalla (3), con calcolo diretto ⁽³⁾, si ricava:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} = -n^2 (n-1)^2 (a^2 + b^2) (x^2 + y^2)^{n-2},$$

sicchè:

L'hessiana di una qualunque forma binaria armonica di grado $n \geq 2$ è una forma di grado $2n-4$ definita negativa, data dal prodotto di $(x^2 + y^2)^{n-2}$ per una costante negativa.

3. Riferendoci ora ad una forma ternaria $f = f(x, y, z)$ a coefficienti reali, è chiaro che la condizione ch'essa sia armonica, e cioè soddisfi alla (1), si conserva ove si moltiplichi f per un'arbitraria costante non nulla o si

(3) Il calcolo si semplifica effettuando sulle x, y la sostituzione lineare invertibile espressa dalle $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, riducente la (3) alla forma

$$\varphi = \frac{1}{2} (a - ib) z^n + \frac{1}{2} (a + ib) \bar{z}^n.$$

operi sulle x, y, z una qualunque sostituzione ortogonale; e sia l'una che l'altra di queste trasformazioni alterano l'hessiana h di f , al più soltanto per un fattore costante non nullo. Ne consegue anzitutto che, interpretate le (x, y, z) come coordinate proiettive non omogenee di punto in un piano ellittico reale avente come assoluto la conica

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

la proprietà di armonicità della f deve tradursi in un legame proiettivo fra questa conica e la curva (algebrica reale), f , di equazione $f(x, y, z) = 0$; ed invero, la (1) esprime precisamente che la conica-luogo polare $(n-2)$ -ma di un qualunque punto del piano rispetto alla f risulta apolare alla conica-inviluppo aderente alla (4). Quando questa condizione, e cioè la (1), è soddisfatta, diremo che la curva f è armonica.

Proveremo inoltre che:

L'hessiana di una forma ternaria armonica si annulla identicamente se, e soltanto se, è possibile ridurre tale forma alla (3) mediante un'opportuna sostituzione ortogonale sulle variabili.

In base a quanto precede ed al n. 2, ciò equivale a dire che:

Le curve armoniche aventi la curva hessiana indeterminata, sono quelle spezzate in n rette reali concorrenti in un punto e tali da dividere il loro fascio in parti uguali [nella geometria ellittica del piano definita dalla conica assoluto (4)].

Per stabilire il primo enunciato basta ricordare che, affinché una curva piana algebrica f d'ordine n abbia l'hessiana indeterminata, occorre e basta che f possieda un punto n -plo O , necessariamente reale se f è reale ⁽⁴⁾. In tal caso, mediante opportuna scelta delle coordinate nel piano ellittico, si può assumere O coincidente col punto $(0,0,1)$: allora la forma f riducesi ad una φ dipendente dalle sole (x, y) e, se f è armonica, la φ lo è pure ed è quindi effettivamente del tipo (3).

4. Se δ denota un qualunque operatore differenziale di grado $k < n$, lineare omogeneo ed a coefficienti costanti, del tipo cioè

$$\delta = \sum_{i+j+l=k} c_{ijl} \frac{\partial^k}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l},$$

dalla (1) - applicando δ ai due membri - si trae la

$$(\delta f)_{11} + (\delta f)_{22} + (\delta f)_{33} = 0;$$

sicché, se f è una forma armonica, tale risulta altresì δf . Ne consegue che:

(4) Cfr. P. GORDAN, *Ueber einen Satz von Hesse*, «Sitzungsber. der phys. med. Soc. Erlangen», 89-95 (1875-76); oppure P. GORDAN-M. NOETHER, *Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet*, «Math. Ann.», 10, 547-568, § 7 (1876); od anche F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, p. 59 (Bologna, Zanichelli, 1918).

Ogni curva polare (semplice o mista) di una curva armonica è essa pure armonica.

Applicando in particolare quest'osservazione alla polare d'ordine r (ossia d'indice $k = n - r$) di un punto reale O per cui f passi r volte, ed applicando il n. 3, vediamo tosto che:

Una curva armonica f contenente un punto reale O con molteplicità $r \geq 1$, passa necessariamente per O con r rami lineari reali dotati in O di r tangenti distinte, le quali dividono il fascio delle semirette di origine O in $2r$ parti uguali.

Come corollario immediato, da qui risulta che:

Nessuna curva armonica possiede dei punti reali isolati o dei rami reali luoghi di punti multipli.

5. Sia $f(x, y, z)$ una forma armonica di grado n che non soddisfi ad alcuna equazione a derivate parziali del 2° ordine, lineare omogenea ed a coefficienti costanti, distinta dalla (1)⁽⁵⁾. Supponiamo inoltre — per semplicità — che $f(x, y, z)$ abbia discriminante non nullo, cioè che la curva f sia non singolare. Allora l'equazione

$$(5) \quad \lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{22} + \lambda_3 f_{33} + \lambda_4 f_{23} + \lambda_5 f_{31} + \lambda_6 f_{12} = 0,$$

al variare dei parametri λ , rappresenta una curva armonica (n. 4) variabile in un sistema lineare ∞^4 , il quale non è composto con le curve di un fascio. Ed invero, in caso contrario, il sistema lineare (5) verrebbe ad avere dei punti base nei punti base di un fascio con cui fosse composto; e ciascuno di tali punti sarebbe conseguentemente multiplo per la curva f , la quale è stata invece supposta non singolare.

Ne consegue che, in uno spazio S_5 in cui le (X_1, X_2, \dots, X_6) si assumano quali coordinate proiettive omogenee di punto, le

$$(6) \quad X_1 = f_{11}, \quad X_2 = f_{22}, \quad X_3 = f_{33}, \quad X_4 = f_{23}, \quad X_5 = f_{31}, \quad X_6 = f_{12}$$

sono equazioni parametriche di una superficie birazionale F , semplice o multipla, appartenente all' S_4 :

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

ed avente l'ordine $(n-2)^2$. Le coordinate X del punto corrente sulla F soddisfano all'equazione di Laplace:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = 0,$$

(5) Tale ipotesi implica che debba essere $n \geq 4$. Ma questa condizione non equivale a quell'ipotesi, come mostra ad esempio la forma armonica

$$f = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$$

che soddisfa alla $f_{23} + f_{31} + f_{12} = 0$.

ed a nessun'altra equazione lineare a derivate parziali del 2° ordine. Infatti, ove così non fosse, la superficie F dovrebbe risultare sviluppabile⁽⁶⁾; un iperpiano tangente ad F lungo una generatrice reale segherebbe F lungo una curva, la cui immagine sul piano (x, y, z) sarebbe una curva armonica contenente una componente multipla reale (corrispondente a quella generatrice di contatto): e ciò è assurdo, in base al n. 4.

Sulla superficie F vi è dunque un ben determinato sistema coniugato, costituito dalle curve caratteristiche (su F) dell'equazione a derivate parziali (7). Tali curve hanno per immagini sul piano (x, y, z) le rette tangenti alla conica (4), sicché, in virtù delle (6), esse risultano curve algebriche (anzi birazionali) d'ordine $n-2$ ⁽⁷⁾.

In base alla penultima proposizione del n. 4, si vede inoltre che:

Ogni iperpiano reale tangente alla superficie F sega quest'ultima secondo una curva che passa (multiplamente) per il punto di contatto con rami tutti reali, lineari ed a tangenti distinte.

Geometria. — Topologia differenziale. — VI. Invarianti topologici di elementi di una calotta. Nota^(*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

I. OGGETTO DELLA NOTA. — In una serie di Note⁽¹⁾ pubblicate in questi « Rendiconti » mi sono occupato di invarianti di elementi di curve o di superficie (o varietà) rispetto a trasformazioni puntuali, o invarianti topologici.

Mi sono spesso servito o come mezzo euristico (per passare dal caso proiettivo a quello topologico) o per procurarmi materiale di esemplificazione del procedimento di *rettificare* (giovandomi appunto dell'arbitrarietà delle trasformazioni in esame) alcuni elementi curvilinei o di *spianare* alcuni elementi superficiali o calotte.

Intendo approfondire in questa Nota detto procedimento nel caso più semplice: cioè degli elementi E_2 curvilinei passanti per un punto e appar-

(6) Cfr. C. SEGRE, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*. « Atti Acc. Sc. Torino », 42, 559-591, n. 12 (1907).

(7) Queste curve non sono reali. Tuttavia, dal caso testè trattato si può passare subito a quello di una superficie contenente un doppio sistema coniugato di curve algebriche reali: all'uopo basta infatti considerare la superficie rappresentata dalle (6), in cui $f = f(x, y, z)$ denoti una generica forma soddisfacente alla $f_{12} + f_{33} = 0$. Esempi di superficie birazionali che ammettono un sistema di curve asintotiche birazionali trovansi in B. SEGRE, *Alcune questioni algebrico-differenziali*, « Portugaliae Mathematica », 10, 29-36, § IV (1951).

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) E. BOMPIANI, *Topologia differenziale*. I. *Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve*. « Rend. Acc. Lincei » (8), 8 (1950), pp. 1-8; II. *Invarianti topologici di elementi curvilinei*, ibidem, pp. 8-15; III. *Calotte superficiali del 2° ordine tangenti in un punto*, ibidem, pp. 81-86; IV. *Teoremi topologici e proiettivi sulle calotte superficiali*, ibidem, pp. 169-175; V. *Geometria delle superficie in uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni*, ibidem, pp. 271-275.

tenenti ad una superficie o più in breve di una *calotta* superficiale (di cui il punto è il *centro*).

Ritrovo così nel modo più naturale un risultato recente di E. Bukovics (svincolandolo dalla condizione non topologica che gli E_2 appartengano ad un piano proiettivo) e una nuova interpretazione degli invarianti di Poincaré di una trasformazione puntuale.

Conto di ritornare presto sull'argomento per applicare le stesse idee a casi più complessi.

2. LE TRASFORMAZIONI PUNTUALI NELL'INTORNO DEL 2° ORDINE DI UN PUNTO. — Si consideri un ente a due dimensioni (superficie) i cui punti siano le coppie ordinate di numeri (x, y) . Su di esso consideriamo il punto $O(0, 0)$ e gli elementi curvilinei del 2° ordine E_2 definiti da

$$(2.1) \quad y = \lambda x + \mu x^2 + [3]$$

[3] indicando termini arbitrari in x d'ordine ≥ 3 ; la totalità di questi E_2 , di *centro* O , si dirà *calotta* di *centro* O .

Il coefficiente λ definisce la *direzione* dell' E_2 , ovvero, insieme ad O , l'elemento del 1° ordine E_1 di E_2 ; al variare di λ si ha un *fascio* di direzioni.

Le trasformazioni puntuali (t. p.) che lasciano fisso O subordinano nel fascio di direzioni una proiettività; se questa è l'identità la t. p. è del tipo

$$(2.2) \quad \begin{cases} x = \alpha \bar{x} + \alpha \varphi_2(\bar{x}, \bar{y}) + [3] \\ y = \alpha \bar{y} + \alpha \psi_2(\bar{x}, \bar{y}) + [3] \end{cases}$$

ove [3] indica termini d'ordine ≥ 3 in \bar{x}, \bar{y} e φ_2, ψ_2 sono forme di grado 2 in \bar{x}, \bar{y} .

Ci domandiamo ora: vi sono E_2 che rimangano fissi (o invarianti) per una t. p. (2.2)? Indicato con $\bar{y} = \bar{\lambda} \bar{x} + \mu \bar{x}^2 + [3]$ l' \bar{E}_2 trasformato di (2.1) si ha

$$(2.3) \quad \bar{\lambda} = \lambda, \quad \bar{\mu} = \mu \alpha + \lambda \varphi_2(I, \lambda) - \psi_2(I, \lambda).$$

Per le t. p. che lasciano fisso un E_2 deve aversi

$$(2.4) \quad \mu(I - \alpha) = \lambda \varphi_2(I, \lambda) - \psi_2(I, \lambda).$$

I coefficienti *essenziali* nei secondi membri sono quattro; quindi dati quattro E_2 di cui non mai due tangenti caratterizzati da (λ_i, μ_i) , $i = 1, \dots, 4$, e preso α ad arbitrio quei coefficienti vengono determinati (il loro determinante è quello di Vandermonde delle λ_i). Sicché esplicitate le due forme

$$(2.5) \quad \varphi_2 \equiv a_{11} \bar{x}^2 + 2 a_{12} \bar{x} \bar{y} + a_{22} \bar{y}^2, \quad \psi_2 \equiv b_{11} \bar{x}^2 + 2 b_{12} \bar{x} \bar{y} + b_{22} \bar{y}^2$$

per una t. p. che lasci invarianti quattro E_2 assegnati rimangono determinati

$$(2.6) \quad a_{11} - 2 b_{12} = 2 \gamma_1, \quad 2 a_{12} - b_{22} = 2 \gamma_2, \quad a_{22}, \quad b_{11}$$

e rimangono invece arbitrari

$$(2.7) \quad \alpha, \quad a_{11} + 2 b_{12} = 2 \sigma_1, \quad 2 a_{12} + b_{22} = 2 \sigma_2.$$

Se due degli E_2 invarianti sono quelli delle *linee coordinate* $x=0, y=0$ per O è $a_{22}=b_{11}=0$. Ma anche γ_1 e γ_2 possono farsi uguali a zero.

Interpretiamo infatti le (2.2) come rappresentanti un cambiamento di coordinate per O , in cui non solo le direzioni per O ma anche gli E_2 delle antiche e delle nuove coordinate siano gli stessi. Le seconde delle (2.3) mostrano che, appunto disponendo di γ_1, γ_2 , si può fare sì che dato α a piacere, e due E_2 , con tangenti diverse da quelle degli E_2 già fissati, risultino per questi, nelle nuove coordinate (\bar{x}, \bar{y}) , i coefficienti trasformati $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0$.

Se già il primo sistema di coordinate (x, y) è scelto in tal modo (cioè per i due E_2 in esso rappresentati è $\mu_1 = \mu_2 = 0$) per ogni t. p. che li lasci fissi (cioè per cui anche $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0$) è $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Il che vuol dire che dati quattro E_2 e considerate le t. p. che li lasciano fissi si può sempre scegliere (e in infiniti modi) un sistema di coordinate (x, y) tale che quelle t. p. siano rappresentate dalle (2.2) con $a_{22}=b_{11}=0, \gamma_1=\gamma_2=0$, ossia

$$(2.8) \quad \begin{cases} x = \alpha \bar{x} \{ 1 + \sigma_1 \bar{x} + \sigma_2 \bar{y} \} + [3] \\ y = \alpha \bar{y} \{ 1 + \sigma_1 \bar{x} + \sigma_2 \bar{y} \} + [3]. \end{cases}$$

Se x, y s'interpretano come coordinate proiettive non-omogenee (o affini) in un piano le (2.8) rappresentano nel piano proiettivo le t. p. che lasciano fissi 4 E_2 per O ; in questa rappresentazione piana o *carta* della superficie gli E_2 fissati appaiono *rettilinei*; e risulta evidente che non solo quei 4 E_2 ma *tutti* gli E_2 che appaiono rettilinei sulla *carta* (e passanti per O) rimangono invariati nelle t. p. che lasciano invariati i quattro dati.

D'altra parte le 2.8 sono equivalenti, fino a tutto l'intorno del 2° ordine di O cioè nei riguardi della calotta, alle trasformazioni proiettive (omologie di centro O)

$$x = \frac{\alpha \bar{x}}{1 - \sigma_1 \bar{x} - \sigma_2 \bar{y}} \quad y = \frac{\alpha \bar{y}}{1 - \sigma_1 \bar{x} - \sigma_2 \bar{y}}$$

e siccome σ_1, σ_2 sono arbitrari, cioè non hanno influenza sull' \bar{E}_2 trasformato di un E_2 , ci si può limitare alle trasformazioni

$$(2.9) \quad x = \alpha \bar{x} \quad , \quad y = \alpha \bar{y} \quad , \quad \alpha \neq 0$$

cioè alle omotetie di un piano affine.

Si ha perciò:

Lo studio delle t. p. che lasciano fissi quattro E_2 di una calotta (passanti per il suo centro) è equivalente (per quanto riguarda l'intorno del 2° ordine) allo studio delle omotetie di dato centro in un piano affine (fino all'intorno del 2° ordine del centro d'omotetia).

O anche:

Le proprietà topologiche di una calotta in relazione a quattro suoi E_2 sono equivalenti alle proprietà di un piano affine rispetto al gruppo (∞^1) delle omotetie di dato centro (nell'intorno del 2° ordine di questo).

Poniamo anche in evidenza l'osservazione fatta:

Quattro E_2 di una calotta per un punto definiscono in modo topologicamente invariante ∞^1 E_2 per il punto; un 4-tessuto sopra una superficie

definisce (in modo topologicamente invariante) un sistema ∞^2 di curve sulla superficie.

Basta infatti preso un E_1 considerare l' E_2 topologicamente invariante passante per esso.

Segue ancora delle (2.9):

Se una t. p. lascia invarianti cinque E_2 tali che uno non appartenga al sistema ∞^1 definito dagli altri quattro essa opera nel piano affine come l'identità (poiché è necessariamente $\alpha = 1$).

Una t. p. è definita (per quanto riguarda l'intorno del 2° ordine) da quattro elementi E_2 (a tangenti distinte) invarianti e da una coppia di E_2 corrispondenti distinti (poiché è determinato α).

3. INVARIANTI TOPOLOGICI DI SEI E_2 PER UN PUNTO. — Si considerino sei E_2 a tangenti tutte distinte per un punto.

Per trovarne gli invarianti topologici basta considerare le t. p. che ne lasciano fissi quattro. Siccome queste subordinano nel fascio delle direzioni tangenti l'identità si hanno evidentemente tre invarianti del 1° ordine.

Prescindiamo da essi e cerchiamo quelli del 2° ordine.

Supponiamo che nessuno dei due E_2 rimanenti appartenga al sistema ∞^1 determinato dai quattro fissati. Se essi sono (λ_i, μ_i) , $i = 1, 2$, è perciò $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$ e per le (2.9)

$$\bar{\mu}_1 = \alpha \mu_1, \quad \bar{\mu}_2 = \alpha \mu_2$$

da cui l'invariante del 2° ordine

$$\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Sei elementi E_2 per un punto tali che due di essi non appartengano al sistema ∞^1 topologicamente invariante determinato dagli altri quattro ammettono un solo invariante del 2° ordine ⁽²⁾.

La stessa rappresentazione sul piano affine fornisce una interpretazione geometrica dell'invariante.

Si rettificano quattro degli E_2 per O: gli altri due E_2 non devono appartenere a rette.

Si considerino le coniche Γ_1, Γ_2 contenenti i due E_2 e due punti arbitrari: la congiungente questi e Γ_1, Γ_2 tagliano una retta arbitraria per O in quattro punti il cui birapporto dipende sostanzialmente solo dall'invariante del 2° ordine (e da birapporti dipendenti dal 1° ordine).

Se del piano affine si fa un piano euclideo si può assumere come invariante dei due E_2 il rapporto dei loro raggi di curvatura (cioè dei raggi dei cerchi da essi definiti).

(2) Questo teorema nel caso che i sei E_2 appartengano ad un piano proiettivo (e senza la limitazione necessaria che due di essi non appartengano al sistema ∞^1 determinato dagli altri quattro) si trova nella Nota recente di E. BUKOVICS, *Eine topologische Invariante von sechs linien-Elemente zweiter Ordnung eines Punktes der Ebene*. «Monatsh. Math.», 57, pp. 117-128 (1953).

4. TRASFORMAZIONI PUNTUALI CHE LASCIANO FISSI TRE E_2 PER UN PUNTO. - Occupiamoci ora delle t. p. che lasciano fissi *tre* E_2 per un punto. Anche in questo caso il fascio delle direzioni tangenti è unito. Se si ripete il procedimento precedente supponendo uniti gli E_2 delle linee coordinate e un E_2 per cui $\lambda = 1$ si vede che $a_{22} = b_{11} = 0$ e, riferendosi alle (2.6), rimane definitivo $\gamma_1 + \gamma_2$. Si può allora scegliere un sistema di coordinate (e anzi infiniti) per cui risulti $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Posto $\gamma_1 = -\gamma_2 = 2\gamma$ in uno di questi sistemi di coordinate la più generale t. p. che soddisfa alle condizioni poste è del tipo

$$(4.1) \quad \begin{cases} x = \alpha \bar{x} \{ 1 - \gamma \bar{y} + \sigma_1 \bar{x} + \sigma_2 \bar{y} \} \\ y = \alpha \bar{y} \{ 1 - \gamma \bar{x} + \sigma_1 \bar{x} + \sigma_2 \bar{y} \} \end{cases}$$

ove σ_1, σ_2 sono arbitrarie e non hanno alcuna influenza sull' \bar{E}_2 trasformato di un E_2 .

Ciò vuol dire che senza restrizione (fino all'intorno del 2° ordine di O) ci si può limitare a considerare le trasformazioni

$$(4.2) \quad x = \frac{\alpha \bar{x}}{1 - \gamma \bar{x}}, \quad y = \frac{\alpha \bar{y}}{1 - \gamma \bar{y}}.$$

Si possono ora considerare x, y come coordinate affini in un piano affine: in esso le (4.2) rappresentano un gruppo G_2 di trasformazioni quadratiche aventi due punti fondamentali nei punti impropri degli assi e il terzo punto fondamentale (dipendente da γ) sulla retta $y = x$. Le tre rette su cui si sono *rettificati* i tre E_2 invarianti non hanno in questa rappresentazione piana delle t. p. in esame lo stesso ufficio; ma ciò non ha importanza (data una quarta direzione lo scambio di quelle rette equivale allo scambio di due dei birapporti che si possono formare con quelle rette).

Si ha quindi:

Il gruppo delle t. p. che lasciano fissi tre E_2 di una calotta equivale (fino all'intorno del 2° ordine del centro) al gruppo G_2 delle trasformazioni quadratiche di un piano proiettivo aventi due punti fondamentali fissi e uno variabile sopra una retta per il centro (le tre rette congiungenti i punti fondamentali al centro sono quelle cui appartengono i tre E_2 rettificati).

Se si assegna una coppia di elementi corrispondenti (oltre i tre E_2 fissi) si hanno ∞^1 trasformazioni (4.2); esse sono caratterizzate da una ben determinata proiettività fra il punto doppio O della proiettività rappresentata dalle (4.2) sopra uno degli assi e il punto fondamentale variabile della trasformazione quadratica.

Due coppie di elementi corrispondenti (a tangenti distinte fra loro e dalle tre degli E_2 fissi) determinano una trasformazione (4.2).

Finalmente tre E_2 (oltre i tre fissati), siano (λ_i, μ_i) , hanno un invariante del 2° ordine che è il rapporto semplice delle μ_i/λ_i ove $\lambda_i = 1 - \lambda_i^2$.

Si ha di qua una nuova costruzione dell'invariante di sei E_2 della calotta.

Rettificati tre degli E_2 su tre rette si fissino su due di esse due punti; le coniche per i tre E_2 e per i due punti segano la terza retta in tre punti che con O hanno per birapporto quel rapporto semplice.

La sua invarianza per le trasformazioni (4.2) è conseguenza delle proiettività che questa determinano sulle rette per O e per i punti fondamentali.

5. TRASFORMAZIONI CHE LASCIANO INVARIATI DUE PENNELLI DI E_2 . — Un elemento E_2 di una calotta definisce un *pennello* ∞^1 costituito dagli E_2 della calotta con lo stesso E_1 .

Una t. p. che abbia in O due direzioni unite (che supporremo reali) trasforma in sé il pennello tangente a ciascuna di esse. Se le direzioni unite sono quelle di $x = 0$, $y = 0$ una tale trasformazione è del tipo

$$x = a\bar{x} + [2] \quad , \quad y = b\bar{y} + [2].$$

Un E_2 tangente ad una di esse $y = \mu x^2$ è trasformato nell' $\bar{E}_2 \bar{y} = \bar{\mu} \bar{x}^2$ con $\bar{\mu} = \frac{a^2}{b} \mu$; il rapporto $\bar{\mu}/\mu$ rimane lo stesso qualunque sia l' E_2 del pannello ed è perciò un invariante della trasformazione (e non dell' E_2 soltanto).

Se s'interpretano x, y come coordinate proiettive non omogenee in un piano l'invariante $\bar{\mu}/\mu = a^2/b$ è l'*invariante di contatto* di E_2, \bar{E}_2 ; e come si è visto non varia variando l' E_2 nel pennello. Sicché:

Una trasformazione puntuale che abbia due E_2 uniti per il punto O muta ciascuno dei pennelli ad essi tangenti in sé e per ciascun pennello l'invariante di contatto di qualsiasi E_2 e del suo corrispondente è costante al variare dell' E_2 ed è quindi un invariante della trasformazione. I due invarianti a^2/b e b^2/a ovvero a, b sono gli invarianti del 1° ordine della trasformazione⁽³⁾.

Se in uno dei due pennelli esiste un E_2 unito *ogni* E_2 del pennello è unito (per esempio $a^2 = b$); e se ciò accade per i due pennelli è $a = b = 1$ (se la t. p. è reale).

Siamo così condotti ad occuparci delle t. p. che lasciano fissi due pennelli (cioè i loro singoli E_2).

Esse si rappresentano con le equazioni

$$(5.1) \quad x = \bar{x}(1 + \varphi_i) + [3] \quad , \quad y = \bar{y}(1 + \psi_i) + [3]$$

con φ_i, ψ_i , forme del 1° ordine in \bar{x}, \bar{y} .

Per esse tutte le direzioni tangenti sono unite e il trasformato \bar{E}_2 di un E_2 dipende solo dalla differenza $\varphi_r - \psi_r$. Sicché possiamo sostituire alle (5.1) senza restrizione (per quanto riguarda il 2° ordine di O) le

$$x = \frac{\bar{x}}{1 - \gamma \bar{x}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{1 - \delta \bar{y}}$$

con γ, δ arbitrari.

Queste trasformazioni possono considerarsi in un piano proiettivo: e sono trasformazioni quadratiche formanti un gruppo G_2 aventi due punti fondamentali fissi (sulle tangenti ai due pennelli invarianti) e il terzo punto

(3) Per un'altra interpretazione di questi invarianti (e per la bibliografia) ved. C. LONGO, *Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito*, « Rend. Acc. Lincei » (8), 8, pp. 320-325 (1950).

fondamentale variabile (con γ, δ) nel piano; di più esse subordinano l'identità nell'intorno del 1° ordine di O (e non soltanto nel fascio di centro O). Ne segue che:

Le t. p. di una calotta con due pennelli di E_2 invarianti si possono pensare (per quanto riguarda l'intorno del 2° ordine del centro) come trasformazioni quadratiche nel piano proiettivo aventi due punti fondamentali comuni e subordinanti l'identità nello intorno del 1° ordine del centro.

Per un $E_2(\lambda, \mu)$ e per il suo trasformato $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ si ha $\bar{\lambda} = \lambda$ e

$$\frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} - \frac{\mu}{\lambda} = \gamma - \lambda\delta,$$

quindi se si ha una coppia di E_2 tangenti $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ con $\lambda_2 = \lambda_1$, si ha un invariante $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\lambda_1}$.

Se invece si hanno tre E_2 a tangenti distinte (fra loro e dagli E_1 dei pennelli fissati) si ha l'invariante

$$\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \begin{vmatrix} \mu_1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ \mu_2 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ \mu_3 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}.$$

Quindi:

Tre coppie di E_2 tangenti hanno un invariante topologico del 2° ordine: due coppie di E_2 tangenti e tre E_2 (a tangenti distinte fra loro e dalle precedenti) hanno pure un invariante topologico del 2° ordine.

Chimica generale. — *Struttura di alcuni composti carbonilici del cobalto.* Nota di GIULIO NATTA (*) e PAOLO CORRADINI (**), presentata (***) dal Corrisp. G. NATTA.

L'idrocarbonile di cobalto $\text{HCo}(\text{CO})_4$ presenta un notevole interesse, non soltanto dal lato teorico per le sue proprietà singolari ma anche pratico, perché si attribuiva ad esso un importante ruolo come catalizzatore nei processi di sintesi di aldeidi e di altri composti ossigenati nelle reazioni a cui partecipano le olefine e gli acetileni con l'ossido di carbonio (ossosintesi e altre sintesi analoghe).

L'idrocarbonile di cobalto è come gli acidi alogenidrici un gas che in soluzione in certi solventi risulta fortemente dissociato e presenta proprietà d'un acido fortissimo (1).

(*) Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Settore Progetti e Studi della Soc. Montecatini.

(***) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) STERNBERG, WENDER, FRIEDEL e ORCHIN, *Synthetic Fuels Research Branch Fuels Techn. Div. Region. VIII Problem No PQ 4716 Report No 3511 Q 263* (1952).

Dal punto di vista scientifico la conoscenza della sua struttura allo stato cristallino può presentare interesse per estendere l'analogia trovata da uno degli autori ⁽²⁾ tra la struttura degli acidi alogenidrici ed i corrispondenti gas nobili, al caso più complesso, ma secondo le nostre vedute sostanzialmente analogo, HCo(CO)_4 e Ni(CO)_4 . Come l'acido cloridrico anidro solido presenta lo stesso diametro molecolare, la stessa struttura cristallina e le stesse costanti reticolari dell'argo, l'acido bromidrico del cripto, così la molecola dell'idrocarbonile di cobalto per la sua analogia con gli acidi alogenidrici dovrebbe presentare lo stesso diametro ed i suoi cristalli la stessa costante reticolare del nicheltetracarbonile, poiché nel primo composto (analogamente agli acidi alogenidrici rispetto ai gas nobili) l'elettrone fornito dall'idrogeno porta il numero di elettroni legato al cobalto dai 35 di un ipotetico tetracarbonile di cobalto monomero a 36 che è quella del nichelcarbonile e del gas nobile cripto.

Tale ipotesi che dovrebbe portare ad una struttura cubica dell'idrocarbonile di cobalto analoga a quella del nichelcarbonile, contrasterebbe con le vedute di Ewens e Lister ⁽³⁾ che propendono in base all'esame coi raggi elettronici della molecola del HCo(CO)_4 allo stato gassoso, per l'assegnazione ad esso di una formula in cui l'idrogeno risulta legato all'ossigeno di un solo gruppo CO, mentre secondo l'ipotesi sopra accennata non dovrebbe essere legato a nessun atomo in particolare, pur contribuendo l'elettrone dell'atomo di idrogeno a completare la nuvola elettronica del cobalto.

Nel primo caso le distanze $\text{Co}-(\text{CO})$ dovrebbero essere uguali per tutti i 4 gruppi CO, nel secondo caso tre uguali ed una più corta.

I suddetti autori quotano $\text{Co}-\text{CO} = 1.83 \pm 0.02 \text{ \AA}$; $\text{Co}-\text{COH} = 1.75 \pm 0.08 \text{ \AA}$, ma il problema rimane insoluto perché tale differenza entra nei limiti di errore del metodo applicato.

Sternberg e coll. ⁽⁴⁾ non riescono a trovare affatto all'infrarosso la presenza di bande attribuibili ad un gruppo ossidrilico, né l'analisi allo spettrografo di massa dà luogo a massimi in cui a un frammento di molecola sia unito l'idrogeno.

La conoscenza della struttura della molecola del HCo(CO)_4 potrebbe contribuire all'interpretazione dell'intimo meccanismo, tuttora sconosciuto, della reazione di ossosintesi, se si debba o no attribuire alla presenza di un gruppo COH nell'idrocarbonile di cobalto la singolare attività catalitica del carbonile di cobalto nelle reazioni di carbonilazione delle olefine.

L'unico modo per definire la questione poteva essere una indagine roentgenografica.

Per superare le difficoltà inerenti all'instabilità del prodotto ed alle sue caratteristiche fisiche (gas termodinamicamente instabile: $\text{PF} = -33^\circ$, $\text{PE} = +10^\circ$) si è utilizzata la tecnica usata da uno di noi in alcuni suoi lavori

(2) G. NATTA, *Dimensioni degli atomi e degli ioni monovalenti nei reticoli dei cristalli*. « Memorie della Reale Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. II, Chimica n. 3, 1931.

(3) EWENS e LISTER, « Trans. Far. Soc. », 35, 681 (1939).

di determinazione di strutture cristalline di sostanze gassose a temperatura ambiente ⁽⁴⁾. Su di un capillare di vetro di circa 1 mm. di diametro raffreddato con aria liquida bollente, si fa condensare un leggero strato del gas in esame dello spessore di circa 0,2 mm. Tale capillare, collegato con un recipiente di Dewar, contenente aria liquida, viene disposto assialmente in una speciale camera per l'esame col metodo delle polveri. I fotogrammi sono ottenuti usando come sorgente dei raggi X un tubo con anticatodo di ferro (che con cobalto non dà radiazione fluorescente). La temperatura si mantiene sui 100° assoluti. Il passaggio di una debole corrente di N₂ secco, e l'essiccamento accurato della camera e della pellicola prima dell'esperienza riducono la condensazione sul capillare del vapor d'acqua. L'apparecchio è stato tarato facendo condensare un velo di NH₄Cl e determinando la posizione delle sue righe caratteristiche.

L'idruro di cobaltocarbonile è stato preparato secondo Sternberg e coll. ⁽¹⁾ nel modo seguente:

Si mettono a reagire 3 gr. di dicobaltoottocarbonile in una beuta da 300 cc. collegata a una valvola a mercurio con 20 cc. di piridina distillata e accuratamente esente da CO₂. La valvola a mercurio permette la fuoriuscita dell'ossido di carbonio e impedisce l'accesso d'aria nella miscela durante la reazione, che si completa in pochi minuti. Si forma il complesso [Co(Pir)₆] [Co(CO)₄]₂, piuttosto instabile all'aria. L'apparecchiatura per la generazione dell'idrocarbonile di cobalto consiste in un pallone da 500 cc. a tre colli, provvisto di un tubo di entrata, di un imbuto separatore e di un tubo di uscita che si collega, attraverso un tubo di assorbimento riempito di P₂O₅, lungo 15 cm. e largo 3, al capillare raffreddato del recipiente di Dewar della speciale camera precedentemente descritta.

Il pallone è riempito con 100 cc. di H₂SO₄ 1:4 e dopo prolungato lavaggio dell'apparecchiatura con N₂ (assolutamente puro!), immerso in ghiaccio. La soluzione piridica viene aggiunta goccia a goccia. L'idrocarbonile di cobalto trasportato dalla corrente viene condensato sul capillare, mantenuto in lenta rotazione sino ad ottenere uno strato dello spessore voluto.

In questo modo scarsissime sono le perdite per decomposizione. Il Dewar è trasferito rapidamente sulla camera, previamente essiccata e lavata con N₂ purissimo. Abbiamo notato che piccole tracce di O₂ decompongono già rapidamente, a temperatura ambiente, l'idruro di cobaltocarbonile. Con la stessa apparecchiatura, nelle stesse condizioni e con le stesse precauzioni, è stato esaminato il nichelcarbonile. Quest'ultimo è stato preparato direttamente facendo passare a freddo una corrente di CO accuratamente purificato su nichel Raney attivato. Tracce eventuali di umidità e CO₂ sono state rimosse su calce sodata e anidride fosforica. L'ipotesi che ci ha guidati di una eventuale analogia di struttura tra nichelcarbonile e idruro di cobaltocarbonile è stata confermata dall'esame dei fotogrammi.

(4) G. NATTA, « Rend. Acc. Lincei », ser. 6^a, vol. II, 679 (1930).

Infatti i fotogrammi del nichelcarbonile e dell'idruro di cobaltocarbonile risultano praticamente identici, sia come posizione delle linee di diffrazione, sia come intensità. Nella tabella è dato un confronto tra ciascuna intensità osservata per l'idruro di cobaltocarbonile e il corrispondente quadrato del fattore di struttura osservato F_{oss}^2 (su scala relativa), tenuto conto delle diverse molteplicità, dedotto dal lavoro di Ladell, Post e Fankuchen ⁽⁵⁾ per il nichelcarbonile.

Il valore della costante a risulta, estrapolando i dati ottenuti per

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\vartheta} \right) \rightarrow 0, \quad 10.70 \pm 0.05 \text{ Å}.$$

Tale valore va confrontato con quello del nichelcarbonile, che, estrapolando i dati di Ladell, Post e Fankuchen ⁽⁵⁾, è di 10.66 Å, alla temperatura di -190° .

TABELLA.

$N = h^2 + k^2 + l^2$	KF^2 n per $Ni(CO)_4$ secondo L. P. F. (5)	$I_{oss} HCo(CO)_4$	a_{oss}
5	19	forte	
6	22	»	
12	51	molto forte	
13	32	media forte	
14	39	forte	10.46
21	24	media	10.49
27	10	molto debole	
29	20	debole	10.55
30	16	»	
32	46	media forte	10.57
38	24	media debole	10.61
45	18	debole	10.63
53	11	molto debole	10.61
54	16	debole	10.61
61	30	»	10.64
62	30	»	10.64
69	23	»	10.65

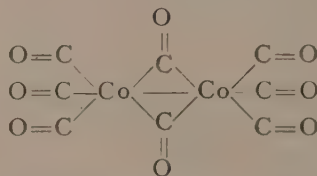
Così, sebbene per strutture complesse come quelle in esame il metodo delle polveri di cui soltanto si poteva disporre non permetta in generale di determinare con precisione tutti i parametri atomici, ciò risulta in questo caso

(5) LADELL, POST, FANKUCHEN, « Acta Cryst. », 5, 795 (1952).

possibile a causa dell'isoformismo dell'idrocarbonile di cobalto con il tetracarbonile di nichel, la cui struttura è nota ⁽⁵⁾. Le analogie strutturali tra idruro di cobaltocarbonile e nichelcarbonile assumono un particolare significato se noi estendiamo il confronto al cobaltotetracarbonile da una parte e ai gas nobili e agli acidi alogenidrici dall'altra. Già precedentemente avevamo esaminato il cobaltotetracarbonile col metodo delle polveri e trovato che la sua struttura monoclinica pseudoesagonale (gruppo spaziale C_2h) è ben diversa da quella del nichelcarbonile cubico, che ha una analoga formula grezza, e presenta invece delle analogie con il diferroennacarbonile. Dai risultati ottenuti da Cavalca ⁽⁶⁾, su un campione inviato da uno di noi, con il metodo del cristallo rotante, risulta che le celle dei due composti presentano dimensioni molto vicine, se si confronta la cella monoclinica dell'uno con la cella ortoesagonale dell'altro.

Costanti	Dicobaltoottocarbonile $Co_2(CO)_8$	Diferroennacarbonile $Fe_2(CO)_9$
a	11.26 Å°	11.17 Å°
b	15.45 Å°	15.98 Å°
c	6.56 Å°	6.45 Å°
β	90°22'	90°

Se ne deduce che la formula di struttura del cobaltotetracarbonile va scritta, analogamente a quella del ferrocobaltocarbonile ⁽⁷⁾:



ed è probabilmente l'unica che si possa scrivere in modo da rendere gli atomi di Co elettronicamente saturi.

La natura di idracido forte dell'idrocarbonile di cobalto ed il suo isomorfismo con il $Ni(CO)_4$ possono essere messi in relazione col fatto che Natta ⁽²⁾ aveva trovato che i raggi delle molecole di acidi alogenidrici, ammettendo la loro tangenza nei reticoli degli acidi alogenidrici, risultano praticamente eguali a quelli dei gas nobili aventi eguale struttura elettronica. Mentre quindi gli ossidi di carbonio sono coordinati tetraedricamente al cobalto, si può ritenere che il nucleo dello idrogeno-ione penetra, come nel caso degli acidi alogenidrici, nella nuvola elettronica dell'anione.

Sarebbe perciò conveniente denominare il $HCo(CO)_4$ come acido idrocobaltocarbonilico.

Sono in corso di studio altri carbonili del cobalto.

(6) CAVALCA e BASSI, « Ricerca Scientifica », 23, 1377 (1953).

(7) POWELL e EWANS, « J.C.S. », I 286 (1939).

Geologia. — *Sull'eccezionale avanzamento di un ghiacciaio himalayano.* Nota (*) del Corrisp. ARDITO DESIO.

Durante il mio recente viaggio nel Karakorum occidentale ho avuto occasione di occuparmi — anche su invito del governo del Pakistan — di un singolare ghiacciaio situato nella valle di Stak, confluyente di destra di quella dell'Indo fra Skardu e Gilgit. Si tratta precisamente del ghiacciaio Kutiah, dal nome della valle che occupa, il quale si è formato come ghiacciaio vallivo nel giro di circa tre mesi assumendo uno sviluppo in lunghezza di una dozzina di chilometri.

Il fenomeno — per quello che mi risulta — è del tutto eccezionale in quanto non ho notizie di avanzamenti di fronti glaciali in epoca storica dell'ordine di quello di Kutiah e soprattutto di avanzamenti così rapidi. Si può grossolanamente calcolare, infatti, che il ghiaccio abbia progredito verso valle con una velocità media di 130 m al giorno, ossia di 5 m e mezzo all'ora!

Notizie dell'invasione di una valle da parte di un ghiacciaio erano giunte all'agente politico di Skardu fin dalla primavera del 1953 riportate da gente del luogo, che dopo aver assistito spaventata all'occupazione della valle di Kutiah da parte di enormi masse di ghiaccio, si sentiva direttamente minacciata dal continuo progresso del ghiacciaio il quale era penetrato per circa tre chilometri entro la valle di Stak, popolata da numerosi villaggi e cosparsa di oasi fiorenti.

Riservandomi di illustrare più ampiamente in altra sede l'avvenimento singolare, riassumo qui brevemente alcune notizie essenziali da me raccolte in luogo nel mese di settembre 1953.

La valle di Kutiah, situata sul versante meridionale del gruppo dell'Haramosh (7397 m), approssimativamente fra le quote di 2820 m e di 3900, è ben poco nota, tanto che nella carta topografica più dettagliata della regione, il foglio n. 43 M (Skardu) del Survey of Pakistan alla scala 1:253.440, appare rappresentata senza nome ed in modo assolutamente convenzionale ed errato. È una valle confluyente di destra dell'alta valle di Stak la quale scende nell'Indo mantenendo una direzione pressoché costante NE-SO.

Secondo notizie da me raccolte dai *lambardar* (1) della valle di Stak appositamente convocati, sino al mese di marzo del 1953 non erano stati notati particolari avvenimenti nella valle di Kutiah, dal greto ghiaioso ma coperto nella parte inferiore da vaste foreste di conifere e latifoglie. Dal 21 di marzo però, tre ghiacciai che occupavano altrettanti valloni dell'alta valle di Kutiah — e precisamente i ghiacciai Kurankar, Nan e Kutsumbur — avevano iniziato a convogliare nella valle principale enormi masse di ghiaccio occupandone l'alveo. Da tale data l'apporto continuo di ghiacci da parte dei tre valloni ha determinato l'unione delle tre colate in una unica e la formazione di un ghiacciaio vallivo. Le notizie successive sono molto più pre-

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) Capi dei villaggi.

cise poiché sul fianco destro della bassa valle di Kutiah esiste qualche abitazione permanente e vi sono vari campi coltivati ai quali i valligiani di Stak vi si recano di frequente.

Come ho già accennato sopra, dal 21 marzo il ghiacciaio ha continuato a svilupparsi sino ad occupare tutto il fondovalle di Kutiah spingendo innanzi con rapidità inverosimile l'alta e turgida fronte glaciale che seppellì nella bassa valle rigogliose foreste. Verso i primi di maggio 1953 la fronte glaciale raggiungeva la valle di Stak, di cui quella di Kutiah è tributaria, sino a sbarrarla completamente ed a provocare il ristagno delle acque del fiume Stak verso monte. Ma l'avanzata dei ghiacci non era ancora finita. Penetrando nella valle di Stak la grande massa glaciale dopo essersi addossata al fianco sinistro della valle principale continuava la sua marcia sino all'11 giugno. Questa data segnò la fine del progresso dei ghiacci che avevano occupata la valle di Stak per circa 3 km (quota fronte 2820 m).

Da allora il ghiacciaio accennò ad un leggero ritiro e ad un lieve abbassamento del turgore frontale.

Io ebbi a visitare il ghiacciaio il 10 settembre 1953 provenendo dallo Stak-la, essendo stata interrotta per vario tempo ogni comunicazione fra la valle inferiore e superiore di Stak. Attraversai il ghiacciaio appena a monte del gomito di confluenza nella valle di Stak e trovai la sua superficie tutta rotta da crepacci e da guglie di ghiaccio che rendevano quanto mai impervia la traversata. Poi risalii la riva destra sino a circa 3470 m d'altezza donde potei gettare uno sguardo sui tre tributari che avevano creato il ghiacciaio vallivo. Successivamente scesi sino al ponte di Tazam per poter attraversare il fiume Stak e di là risalii il fianco sinistro della valle ove era stato intanto aperta dagli indigeni fra ghiaccio e roccia una via assai disagiata e pericolosa per la minaccia continua delle scariche di pietra dal fianco formato dal ghiacciaio.

Rimane ora da aggiungere qualche cenno sulle cause che possono avere provocato il singolare fenomeno.

Va rilevato subito che tutti i ghiacciai della regione circostante alla valle di Kutiah ed anche gli stessi ghiacciai laterali della valle, all'infuori dei tre sopra menzionati, presentano le caratteristiche di ghiacciai in fase di ritiro. Sotto alle fronti attuali, spesso semiscoperte dalle morene galleggianti, esistono quasi dappertutto apparati morenici frontali freschissimi, abbandonati in epoca molto recente. Del resto anche nella regione dei ghiacciai Biàfo e Baltoro, che ho pure percorso dopo il sopraluogo al ghiacciaio Kutiah, ho notato a ventiquattro anni dalla prima visita, indizi sicuri di ritiro di vari ghiacciai secondari e comunque in nessun caso indizi di avanzamento.

Questi fatti dimostrano che il progresso del ghiacciaio Kutiah è un fenomeno di carattere locale e nel contempo di carattere eccezionale. Per quanto l'affermazione possa sembrare un controsenso, io credo anzi che proprio questo continuo smagrimento del manto glaciale sia una delle cause del fenomeno. L'improvviso e straordinario sviluppo assunto da tre ghiacciai laterali della valle di Kutiah è dovuto - secondo me - ad un improv-

viso e straordinario afflusso di ghiaccio nei bacini di raccolta dei tre ghiacciai, afflusso che in tale forma può provenire soltanto da una colossale frana di masse di ghiaccio dalle alte regioni dell'Haramosh. La diminuzione del manto glaciale deve avere ridotto la continuità fra le masse glaciali elevate e quelle inferiori per cui le prime devono essere rimaste per tratti più o meno estesi con le fronti sospese. Tali condizioni sono la premessa per crolli di grandi masse di ghiaccio situate sui ripiani elevati della montagna e nel caso particolare è da supporre che da una zona di raccolta che domina le tre alte valli donde sono fluiti i ghiacci in quella di Kutiah sia franata una massa immane di ghiaccio, tale cioè da provocare un improvviso ed eccezionale aumento dei tre ghiacciai che sono ben presto usciti dalle loro valli per andare ad invadere quella di Kutiah. È avvenuto cioè in una misura senza paragone maggiore e con modalità anche un po' differenti quello ch'è successo nel 1920 al ghiacciaio della Brenva. Là in seguito ad una grande frana di ghiaccio e roccia proveniente dall'alto versante meridionale del Monte Bianco, si è formata una lingua di ghiaccio sul fondovalle che in breve tempo si è gonfiata addossandosi allo sperone di Notre Dame de la Guérison e poi è progredita verso valle con una velocità media di una cinquantina di metri all'anno verso il villaggio di Entrèves.

Quando si sia verificata la grande frana sul versante meridionale dell'Haramosh non è dato sapere: in ogni caso certamente prima del 21 marzo 1953 e probabilmente almeno qualche mese prima, ossia il tempo necessario affinché l'ondata di piena potesse trasmettersi dai bacini di raccolta sino alle fronti dei tre ghiacciai.

La causa immediata del franamento può essere anche connessa con un eventuale scuotimento sismico, per quanto a turbare l'equilibrio di masse glaciali sospese non sia necessario l'intervento di un fenomeno del genere.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Generalizzazioni del calcolo tensoriale e delle sue applicazioni.* Nota di AKITSUGU KAWAGUCHI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

I. INTRODUZIONE. — È ben noto che un vettore in uno spazio euclideo ad n dimensioni si definisce come un ente dotato di direzione e grandezza, v ; secondo l'uso, esso verrà denotato con la stessa lettera v in grassetto che ne designa la grandezza. Un tale ente non dipende dalla scelta delle coordinate, il che si esprime nel modo seguente.

Se S è un sistema cartesiano avente e_1, e_2, \dots, e_n come vettori unitari, dette v^1, v^2, \dots, v^n le componenti di v risulta

$$v = v^i e_i,$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

con la solita convenzione di sommazione tacita rispetto all'indice i . Rispetto ad altro analogo sistema \bar{S} si abbia similmente

$$v = \bar{v}^i \bar{e}_i.$$

Allora, se le formule di trasformazione $S \rightarrow \bar{S}$ sono

$$(1) \quad \bar{e}_i = A_i^j e_j,$$

risulterà

$$(2) \quad \bar{v}^i A_i^j = v^j,$$

od anche

$$(2') \quad \bar{v}^i = \bar{A}_j^i v^j \quad , \quad \text{dove} \quad \bar{A}_j^i A_k^j = \delta_k^i.$$

Un vettore può quindi altresì venir definito come una n -pla ordinata di numeri v riferita ad un sistema cartesiano S , la quale si trasformi secondo le (2) o (2') quando si assoggetti S alla trasformazione (1). Ed è appunto questa seconda definizione che si estende nella geometria riemanniana per introdurre i cosiddetti *vettori contravarianti*; accanto a questi si considerano anche utilmente i *vettori covarianti*, ossia (nel caso euclideo) gli enti w definiti dalle n -ple ordinate w_i su cui la (1) induce la trasformazione

$$(3) \quad \bar{w}_j = \bar{A}_j^i w_i.$$

Qualora si considerino coordinate curvilinee, la trasformazione $S \rightarrow \bar{S}$ sarà del tipo

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j);$$

sicchè, in luogo delle (1), varranno le

$$(4) \quad \bar{e}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} e^j,$$

dove e^j , \bar{e}^i denotano rispettivamente i vettori unitari tangenti alle linee coordinate dei sistemi S , \bar{S} nel punto x . In tal guisa si giunge alla nozione generale di vettore contravariante o covariante, assumendo in ciò che precede i coefficienti $A_j^i = \partial \bar{x}^i / \partial x^j$.

La definizione così modificata permette di introdurre i tensori di ogni ordine nel modo ben noto. Per esempio, un tensore covariante del secondo ordine è dato da un sistema di n^2 numeri T_{ij} soggetto alla stessa legge di trasformazione del prodotto di due vettori covarianti, ossia

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} T_{kl}.$$

Ne consegue che la quantità

$$\bar{T}_{ij} \bar{v}^i \bar{v}^j = T_{kl} v^k v^l$$

è uno *scalare*, ossia rimane invariante di fronte al gruppo di trasformazioni lineari (4).

Un esempio fra i più semplici di tensore del secondo ordine è il tensore metrico g_{ij} , avente ufficio essenziale nella geometria riemanniana e nella rela-

tività generale. Col suo intervento si formano nel modo noto le derivate assolute, ad esempio, per un vettore contravariante,

$$v^i{}_{|j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\} v^k,$$

dove $\left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\}$ sono i simboli di Christoffel. E similmente si definiscono le derivate assolute

$$v^i{}_{|j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} v^k$$

anche se il tensore g_{ij} non è definito, purchè i simboli Γ^i_{kj} risultino assoggettati in forza delle (4) alla stessa trasformazione dei simboli di Christoffel, cioè

$$\Gamma^i_{kj} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} \Gamma^r_{tr} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j},$$

come mostrarono Eddington e Weyl nelle loro teorie unitarie.

2. EXVETTORI ED EXTENSORI. — Consideriamo ora un campo di vettori $v^i(x)$ lungo una curva $x^i = x^i(t)$, ove t sia un parametro; in particolare dunque, se t è il tempo, la curva risulta la traiettoria di un punto. Le derivate delle v^i lungo la curva:

$$v^{i'} \equiv \frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \equiv (\partial_j v^i) x^{j'},$$

non sono generalmente le componenti di un vettore, com'è facile vedere. Si ha invece:

$$(5) \quad \begin{cases} \bar{v}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} v^j, \\ \bar{v}^{i'} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^{j'} + \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right)' v^j, \end{cases}$$

dove in generale le $(\partial \bar{x}^i / \partial x^j)$ non sono tutte nulle.

Si può tuttavia osservare che $2n$ quantità $(v^i, v^{i'})$, soggette alla legge di trasformazione (5) quando si mutino comunque le coordinate, definiscono un ente di tipo nuovo, il quale potrebbe pensarsi come un vettore nello spazio di dimensione $2n$ delle $(v^i, v^{i'})$. Attualmente, però, le $2n$ componenti $(v^i, v^{i'})$ subiscono soltanto speciali sostituzioni lineari; e precisamente, assunto

$$v^i = \begin{cases} v^i & \text{per } i = 1, 2, \dots, n \\ v^{i'} & \text{per } i = n+1, \dots, 2n, \end{cases}$$

le (5) possono scriversi nella forma

$$\bar{v}^I = X^I_J v^J$$

analoga alla (3), dove i coefficienti X^I_J sono dati dalle

$$X^i_j = X^{n+i}_{n+j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad X^{i'}_{n+j} = 0, \quad X^{n+i}_j = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right)',$$

e non sono quindi arbitrari.

Più generalmente, posto $v^{(\beta)} = d^\beta v / d\tau^\beta$, il sistema di $(g+1)n$ quantità $(v^i, v^{i'}, \dots, v^{i(g)})$ rimane soggetto alla legge di trasformazione

$$(6) \quad \bar{v}^{i(\alpha)} = \sum_{\beta=0}^g X_{(\beta)j}^{(\alpha)i} v^{j(\beta)},$$

dove, tenuto conto della formula di Leibniz per le derivate successive di un prodotto, risulta:

$$(7) \quad X_{(\beta)j}^{(\alpha)i} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \quad \text{se } \alpha = \beta,$$

$$(8) \quad X_{(\beta)j}^{(\alpha)i} = 0 \quad \text{se } \alpha < \beta,$$

$$(9) \quad X_{(\beta)j}^{(\alpha)i} = \binom{\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right)^{(\alpha-\beta)} \quad \text{se } \alpha > \beta.$$

Chiamasi *exvettore*, e più precisamente *exvettore contravariante* di grado g e caratteristica $(1, 0, g, n)$, un ente definito da componenti V^{ai} che dipendano da un elemento differenziale del g -mo ordine $(x^i, x^{i(1)}, \dots, x^{i(g)})$ e che siano soggette alla legge di trasformazione

$$\bar{V}^{ai} = \sum_{\beta} X_{\beta j}^{ai} V^{\beta j},$$

coi coefficienti X espressi dalle (7), (8), (9). Si possono anche definire similmente *exvettori covarianti* ed *extensori*. Queste nozioni, introdotte da H. V. Craig ⁽¹⁾, furono successivamente approfondite da me e da altri ⁽²⁾. Qui mi limiterò soltanto ad enunciare taluna fra le molteplici interessanti proprietà ad esse relative.

I) Se V^i è un vettore contravariante, allora $V^{i(\alpha)}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, g$) è un exvettore contravariante di grado g .

II) Se W_i è un vettore covariante, allora $\binom{g}{\alpha} W_i^{(g-\alpha)}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, g$) è un exvettore covariante di grado g .

III) Se V^{ai} è un exvettore contravariante di grado g , allora $V^{ai} -$ ove $\alpha = 0, 1, \dots, \bar{g} (< g)$ - risulta un exvettore contravariante di grado g .

IV) Se W_{ai} è un exvettore covariante di grado g , allora $\binom{g-\bar{g}+\gamma}{\gamma} W_{g-\bar{g}+\gamma, i}$ è un exvettore covariante di grado \bar{g} ⁽³⁾.

V) La quantità $\rho^{[\Gamma]} = \sum_{\beta=\Gamma}^g \binom{\beta}{\Gamma} V^{\beta-\Gamma, i} W_{\beta i}$ risulta uno scalare.

Vi sono inoltre vari modi per dedurre un nuovo exvettore da un dato exvettore, facendo uso di derivazioni (e non dei parametri di una connessione).

(1) H. V. CRAIG, « Amer. Journ. of Math. », 59 (1937).

(2) Ved. A. KAWAGUCHI, « Journ. Fac. Sci. », Hokkaido Univ. (I) 9 (1940), ove trovasi un'ampia bibliografia sull'argomento.

(3) Gli exvettori ottenuti in III) e IV) diconsi costituire un *sistema ridotto*.

sione Γ_{jk}^i) quali ad esempio quelli forniti dalle formule seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{g}^H V^{\beta i} &= \sum_{\lambda=0}^H (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} V^{\beta+\lambda, i(H-\lambda)}, & \beta &= 0, 1, \dots, g-H \\ & (= V^{\beta+1, i} - V^{\beta i(1)} \text{ se } H=1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^H W_{\alpha i} &= H! \sum_{v=0}^H (-1)^v \binom{\alpha+v}{\alpha} \binom{g-\alpha-v}{g-H-\alpha} W_{\alpha+v, i}^{(v)} \\ & (= (g-\alpha) W_{\alpha i} - (\alpha+1) W_{\alpha+1, \alpha}^{(1)} \text{ se } H=1) \end{aligned}$$

$$3^H V^{\alpha i} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{H\lambda} (1-2^H)^{\alpha-\lambda} V^{\lambda i(\alpha-\lambda)}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, g$$

$$3^H W_{\alpha i} = \sum_{v=0}^{g-H-\alpha} (-1)^v \binom{H-1+v}{H-1} W_{\alpha+H+v, i}^{(v)}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, g-H$$

$$1^H V^{\alpha i} = H! \sum_{v=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{v} \binom{g+H-\alpha}{H-v} V^{\alpha-v, i(v)}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, \bar{g}$$

$$1^H W_{\alpha i} = \sum_{v=0}^{\alpha} \binom{H}{v} W_{\alpha-v, i}^{(H-v)}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, \bar{g}.$$

I suddetti exvettori ed extensori hanno un ufficio fondamentale nello studio degli spazi d'ordine superiore, analogo a quello dei vettori e dei tensori nella geometria riemanniana. Inoltre, anche la differenziazione assoluta degli extensori è stata studiata (da H. V. Craig, T. Ohkubo, Y. Katsurada ed altri).

Un'ulteriore applicazione degli extensori è stata fatta da Craig e Horton (« Tensor », N. S., 1 (1951), n. 2), col porre sotto forma semplice il sistema hamiltoniano

$$(10) \quad \begin{cases} q'^b = \partial H / \partial p_b, & H = T + V, & p_a = g_{ab} q'^b, & q'^a = g^{ab} p_b, \\ p'_a = -\partial H / \partial q^a, & T = \frac{1}{2} g_{ab} q'^a q'^b = \frac{1}{2} g^{ab} p_a p_b. \end{cases}$$

Introduciamo all'uopo l'exvetettore

$$P_{1a} = p_a, \quad P_{0a} = p'_a$$

e l'extensore

$$g_{1a, 1b} = g_{ab}, \quad g_{0a, 1b} [ac, b] q'^c.$$

Allora $g_{aa} = g_{aa, 1b} q'^b$ è un exvetettore, e la prima delle (10), moltiplicata per g^{ab} , si riduce alla

$$g_{ab} \frac{\partial H}{\partial p_b} = g_{ab} g^{cb} p_c = g_{ab} q'^b = g_{1a, 1b} q'^b,$$

mentre, posto $\partial_a = \partial / \partial x^a$ e nell'ipotesi che V sia costante, la seconda fornisce:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial q^a} &= -\frac{\partial T}{\partial q^a} = -\frac{1}{2} (\partial_a g^{cd}) p_c p_d = \frac{1}{2} (\partial_a g^{cd}) g_{cb} q'^b p_d = \\ &= \frac{1}{2} g^{cd} \partial_a g_{cb} \cdot q'^b p_d = \frac{1}{2} \partial_a g_{cb} \cdot q'^b q'^c = [ac, b] q'^c q'^b; \end{aligned}$$

pertanto le (10) equivalgono allora all'unica equazione

$$P_{aa} = g_{aa}.$$

Se V non è costante, risulta

$$P_{aa} + V_{aa} = g_{aa},$$

dove

$$V_{ia} = \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0, \quad V_{oa} = \frac{\partial V}{\partial q^a}.$$

La teoria degli extensori è stata ulteriormente estesa da me («Monatsh. f. Math. u. Phys.», 48 (1939)) ai cosiddetti *extensori multipli*, relativi cioè ad un qualunque numero di parametri. Applicazioni di questa estensione furono fatte allo studio dei seguenti spazi di elementi differenziali di ordine e dimensione superiori.

A) Spazi metrici ov'è dato a priori uno *scalare*

$$F\left(x, \frac{\partial x}{\partial u^\lambda}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}, \dots, \frac{\partial^m x}{\partial u^{\lambda_1} \partial u^{\lambda_2} \dots \partial u^{\lambda_m}}\right) \quad (4).$$

B) Spazi di faccette ov'è dato a priori un *sistema di equazioni a derivate parziali* della forma

$$\frac{\partial^{m+1} x^i}{\partial u^{\lambda_1} \partial u^{\lambda_2} \dots \partial u^{\lambda_{m+1}}} + H_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m}^i \left(x, \frac{\partial x}{\partial u^\lambda}, \dots, \frac{\partial^m x}{\partial u^{\lambda_1} \partial u^{\lambda_2} \dots \partial u^{\lambda_m}}\right) = 0 \quad (5).$$

C) Spazi dei sistemi non olonomi, ov'è dato a priori un *sistema di pfaffiani*:

$$P_{j\mu}^{i\lambda(\alpha)} dx^{j\mu(\beta)} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m),$$

dove, per abbreviare, si è posto

$$\lambda(\alpha) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\alpha, \quad x^{j\mu(\beta)} = \frac{\partial^\beta x^j}{\partial u^{\mu_1} \partial u^{\mu_2} \dots \partial u^{\mu_\beta}} \quad (6).$$

D) Spazi *con connessione affine*, studiati dal punto di vista degli spostamenti paralleli di loro sottospazi⁽⁷⁾.

Altre generalizzazioni di extensori multipli trovansi in due recenti lavori di mio figlio M. Kawaguchi («Tensor», N. S., 2 (1952) e 3 (1953)).

3. P-TENSORI. - Una trasformazione $\bar{t} = \bar{t}(t)$ sul parametro t induce sulle derivate di una funzione $P(t)$ la trasformazione

$$P(\bar{a}) = A_{\beta}^{\alpha} P^{(\beta)},$$

dove (\bar{a}) sta per $d^{\alpha}/d\bar{t}^{\alpha}$ ed i coefficienti sono forniti dalle formule ricorrenti:

$$A_{\mu}^{\nu} = A_{\mu}^{\nu-1} \bar{t}^{(1)} + A_{\mu-1}^{\nu-1} \bar{t}^{(2)} \quad (\mu \neq \nu, \nu \neq 1)$$

$$A_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} \left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right) \mu & \text{se } \mu = \nu \\ \frac{d^{\mu} \bar{t}}{d\bar{t}^{\mu}} & \text{se } \nu = 1. \end{cases}$$

(4) Cfr., ad esempio, K. TONOOKA, «Journ. Fac. Sci.», Hokkaido Univ. (I) 12 (1952).

(5) T. SUGURI, «Mem. Fac. Sci.», Kyusgu Univ., (A) 1 (1940); A. KAWAGUCHI e H. HOMBU, «Journ. Fac. Sci.», Hokkaido Univ. (I) 2 (1941).

(6) Y. KATSURADA, «Tensor», N. S., 1 (1951), n. 2, ecc.

(7) Y. KATSURADA, «Tensor», N. S., 3 (1953), n. 1.

La suddetta trasformazione sulle $P^{(B)}$ mi ha condotto (in « Journ. Fac. Sci. », Hokkaido Univ., (I) 10 (1941)) ad una teoria di quelli che chiamo i P -tensori ed i P -extensori, ed a vari interessanti risultati. Tale teoria fu quindi estesa al caso di funzioni P dipendenti da più parametri ⁽⁸⁾, e si è dimostrata assai utile nella *teoria intrinseca*, ossia nello studio degli invarianti degli spazi di ordine superiore relativi ai cambiamenti di parametri.

4. R-EXTENSORI. — Consideriamo la trasformazione

$$(II) \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j, u^\mu), \quad \bar{u}^\lambda = \bar{u}^\lambda(u^\mu)$$

e la faccetta $(x^i, p_{\lambda(v)}^i)$, dove, per abbreviare, poniamo $x^i = x^i(u^\lambda)$ e

$$p_{\lambda(v)}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{\lambda_1} \partial u^{\lambda_2} \dots \partial u^{\lambda_v}}.$$

Le (II) si prolungano con le

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}^\lambda = \bar{u}^\lambda(u^\mu), \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j, u^\mu), \quad \bar{p}_{\lambda}^i = (X_j^i p_{\mu}^j + X_{\mu}^i) U_{\alpha}^{\mu}, \dots, \\ \bar{p}_{\lambda(M)}^i = p_{\mu(M)}^j X_j^i U_{(\lambda_1}^{(\mu_1} U_{\lambda_2}^{\mu_2} \dots U_{\lambda_M)}^{\mu_M)} + R_{\lambda(M)}^i(u^\mu, x^j, p_{\mu}^j, \dots, p_{\mu(M-1)}^j), \end{array} \right.$$

dove

$$X_j^i \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad X_{\mu}^i \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial u^{\mu}}, \quad U_{\lambda}^{\mu} \equiv \frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\lambda}},$$

e le $R_{\lambda(M)}^i$ sono polinomi nelle $p_{\lambda(v)}^i$ ($v = 1, 2, \dots, M$) e nelle $U_{\lambda(x)}^{\mu}$, $U_{\lambda(z)}^{\mu}, \dots, U_{\lambda(M)}^{\mu}$, avendo posto

$$U_{\lambda(\alpha)}^{\mu} \equiv \frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\lambda_1} \dots \partial \bar{u}^{\lambda_{\alpha}}}.$$

Poggiando sulle (12), si possono analogamente a quanto dianzi indicato definire gli R -extensori, ad esempio gli R -extensori covarianti $V_{\lambda(l)\mu(u)}^j$, soggetti alla legge di trasformazione

$$V_{\alpha(r)\beta(s)}^i = \sum_{l=0}^r \sum_{u=1}^s \frac{\partial \bar{F}_{\alpha(r)}^i}{\partial p_{\lambda(l)}^j} A_{\beta(s)}^{\mu(u)} V_{\lambda(l)\mu(u)}^j.$$

In questa formula le derivate $\partial p_{\alpha(r)}^i / \partial p_{\lambda(l)}^j$ possono venir espresse in forma concreta, ed i coefficienti A sono dati dalla

$$A_{\beta(u+v)}^{\mu(u)} = \sum_{(y)} \frac{(u+v)!}{y_1! y_2! \dots y_u! z_1! z_2! \dots z_{v+1}!} U_{(\beta(y_1)}^{(\mu_1)} U_{\beta(y_2)}^{\mu_2} \dots U_{\beta(y_u)}^{\mu_u)},$$

dove z_{ρ} denota il numero delle y aventi il valore ρ ed il sommatorio va esteso alle y soddisfacenti alle

$$y_1 + y_2 + \dots + y_u = u + v, \quad y_{\xi} = 0 \text{ per qualche } \xi = 1, 2, \dots, u.$$

In un prossimo lavoro svilupperò la teoria degli R -extensori, facendone anche varie interessanti applicazioni.

(8) Cfr. H. HOMBU e T. SUGURI, « Mem. Fac. Sci. », Kyusyu Univ., (A) 2 (1941).

Matematica. — *Analisi della validità degli assiomi di separazione in uno spazio non- V .* Nota di LUDOVICO GEYMONAT, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

In una precedente Nota dal titolo *Su di un metodo per lo studio di spazi astratti molto generali* ⁽¹⁾ ho introdotto — sulla base della relazione di spazializzazione ρ di un qualsiasi spazio topologico S — una nuova relazione di spazializzazione ρ^* che chiamai *coniugata di ρ* , ed ho dimostrato alcune notevoli proprietà dei nuovi spazi così definibili. Al termine di essa ho brevemente illustrato i risultati ottenuti applicandoli ad un facile esempio tratto dall'opera di A. Appert e Ky-Fan *Espaces topologiques intermédiaires* ⁽²⁾, p. 42. Mi propongo ora di tornare più diffusamente sull'esempio anzidetto per segnalarne alcune proprietà che mi sembrano fornite di un interesse non irrilevante sia dal punto di vista matematico che da quello logico.

Occorre anzitutto riferire per disteso la definizione introdotta dai nostri Autori. Essi prendono le mosse da un insieme K costituito da 5 soli elementi: a, b, c, d, e ; e si servono di esso per definire uno *spazio- V* , imponendo che ognuno dei 5 elementi possieda un unico « voisinage ». La relazione di spazializzazione ρ risulta definita dalla elencazione di tali « voisinages »:

$$V_a = (a, b, c)$$

$$V_b = V_c = (b, c)$$

$$V_d = V_e = (d, e)$$

Ciò premesso, si dimostra immediatamente (come appunto accennai al termine della mia Nota) che — se indichiamo con S lo *spazio- V* di Appert e Ky-Fan ora definito — il suo coniugato \bar{S} dovrà risultare uno *spazio non- V* .

Lo spazio S è stato introdotto dai nostri Autori quale esempio di spazio quasi-normale ma non quasi-regolare; ciò significa che esso verifica l'assioma di separazione di Tietze (indicato dai nostri Autori con il simbolo T_4) mentre non verifica né l'assioma di separazione di Fréchet (T_1), né quello di Hausdorff (T_2) né quello di Vietoris (T_3). Sorge quindi spontanea la domanda: come si comporterà il nuovo spazio \bar{S} rispetto ai quattro assiomi di separazione ora accennati?

Nella presente Nota rispondo a questa domanda dimostrando che \bar{S} verifica gli assiomi T_2 e T_4 , mentre non verifica gli assiomi T_1 e T_3 .

Si vede subito che \bar{S} non può soddisfare l'assioma T_1 . Quest'assioma, infatti, impone che « un punto x distinto da un punto y non possa mai risul-

(*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », vol. XII, Roma 1953, fasc. 3-4.

(2) Paris, Hermann, 1951.

tare contiguo all'insieme formato dal solo punto y ». In \bar{S}^* si ha invece, per la stessa definizione di relazione coniugata, che $(\bar{a})^*$ coincide con l'intero spazio, e cioè ogni punto di \bar{S}^* è contiguo all'insieme formato dal solo punto a .

Più difficile è dimostrare che \bar{S}^* soddisfa l'assioma T_2 e cioè che in esso « due punti distinti qualunque posseggono sempre *entourages* disgiunti » (3).

È noto il significato dell'espressione « *entourage* » di un punto P in uno spazio topologico. Essa è usata per denotare un insieme di questo spazio, il quale contenga P quale suo punto interno. Orbene si prendano, in \bar{S}^* , i due punti distinti a, b , e si considerino gli insiemi (a, c) , (b, d) . Questi insiemi costituiscono degli « *entourages* » di a e b perché il complementare di (a, c) e cioè l'insieme (b, d, e) è chiuso in \bar{S}^* , e lo stesso accade del complementare di (b, d) ; dunque (a, c) e (b, d) sono aperti, cioè ogni punto di (a, c) è interno ad (a, c) ed ogni punto di (b, d) è interno a (b, d) .

Né si tratta di una pura circostanza casuale per a e b . Infatti: presi due punti qualunque x e y di \bar{S}^* , esistono ovviamente sei modi diversi per formare (con essi e i tre punti restanti) due coppie disgiunte che contengano l'una x e l'altra y . I complementi di queste coppie sono insiemi triadici, ed è facile constatare che tra i dieci possibili insiemi triadici di \bar{S}^* otto sono insiemi chiusi. Se ne ricava, con un breve computo, che in qualunque caso almeno uno dei sei modi anzidetti ci procura due coppie aperte; queste per l'appunto formeranno i due « *entourages* » disgiunti dei quali parla l'assioma. Se ne conclude che T_2 risulta sempre soddisfatto.

Quanto a T_3 , esso affermerebbe che « presi in \bar{S}^* un qualunque punto x ed un qualunque insieme chiuso F tra loro disgiunti; x ed F debbono possedere degli « *entourages* » disgiunti » (ove per « *entourage* » di un insieme F deve intendersi un insieme dello spazio in esame che contenga quali punti interni tutti gli elementi di F). Per dimostrare la non sussistenza di questo assioma, basta osservare innanzi tutto che l'insieme (b, c, d, e) è chiuso in \bar{S}^* — risultato immediatamente dimostrabile — ed esaminare poi se questo insieme e il punto a , che si trovano ovviamente nelle condizioni richieste da T_3 , godano oppur no della proprietà enunciata in T_3 . Quali sono in \bar{S}^* gli insiemi che contengono tutti i punti di (b, c, d, e) ? Essi sono soltanto due: l'insieme stesso e lo spazio totale. Ma l'interno di (b, c, d, e) è vuoto, onde quest'insieme non soddisfa alla condizione di contenere i propri punti quali punti interni; lo spazio totale soddisferebbe invece a questa condizione, ma non può risultare disgiunto da alcun insieme che contenga a . Dunque T_3 non trovasi soddisfatto.

(3) Userò il termine francese « *entourage* » perché la traduzione italiana « intorno » viene solitamente usata, con una certa promiscuità, ora per semantizzare il concetto di « *entourage* », ora per semantizzare quello di « *voisinage* ». Per la definizione precisa dei due concetti ved. APPERT e KY-FAN, op. cit., pp. 15-16.

Resta da dimostrare che \bar{S}^* verifica, come già lo spazio S , l'assioma T_4 , e cioè che, in esso, due qualsiasi insiemi chiusi disgiunti posseggono certamente degli « entourages » disgiunti.

Innanzitutto si constata che in \bar{S}^* nessun insieme formato da un solo elemento è chiuso. Fra le dieci coppie contenute in \bar{S}^* , solo quattro formano insiemi chiusi: e precisamente le coppie (b, d) , (b, e) , (c, d) , (c, e) , i cui complementi sono essi pure insiemi chiusi. Per ottenere due insiemi di S che siano chiusi e disgiunti dovremo dunque: o prendere due coppie disgiunte fra le quattro ora elencate, ovvero prendere una qualunque di esse ed il suo complemento. Ma ciascuna delle quattro coppie, e ciascuno dei loro complementi risulta, oltretutto un insieme chiuso, anche un insieme aperto, e cioè tale che ogni suo punto risulta punto interno. Dunque ciascuna delle quattro coppie sopradette e ciascuno dei loro complementi può venir considerato « entourage » di se stesso, e pertanto se due di tali insiemi sono disgiunti sono anche tali da possedere degli « entourages » disgiunti. Se ne conclude che \bar{S}^* verifica l'assioma T_4 .

Per comprendere l'interesse logico del risultato testè dimostrato, basterà tener presente che in tutti gli *spazi*- V l'assioma T_2 implica T_1 . Il nostro spazio \bar{S}^* - verificando T_2 e non T_1 - fornisce un esempio di *spazio non- V* in cui questa implicazione viene a cadere.

Geometria. — *Sui piani microdesarguesiani affini.* Nota di LUCIO LOMBARDO-RADICE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. In una precedente Nota ([5]) per dimostrare che in un piano π microdesarguesiano rispetto a una retta r ⁽¹⁾ potenze di elementi non identici del gruppo abeliano ⁽²⁾ delle omologie speciali di asse r sono insieme uguali o insieme non uguali all'identità del gruppo, avevamo presupposto la finitezza del piano. Da questa ipotesi ci si può liberare dimostrando che:

I, 1. — *In un piano microdesarguesiano rispetto ad una sua retta r , finito o infinito, gli elementi non identici del gruppo abeliano delle omologie speciali di asse r : 1° o sono tutti aperiodici; 2° o sono tutti periodici ed hanno il medesimo periodo p , essendo p un numero primo.*

(*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) Abbiamo proposto in [5] di chiamare un piano *microdesarguesiano rispetto ad una sua retta r* quando il piccolo teorema di Desargues D_{10} vale rispetto all'asse r (cioè quando il teorema di Desargues sui triangoli omologici vale nell'ipotesi che lati corrispondenti si incontrino in punti della r e che le rette congiungenti due coppie di vertici corrispondenti si incontrino in un punto pure della r). Quando il piano è microdesarguesiano rispetto a una retta r scelta come retta impropria, parleremo di piano microdesarguesiano affine. In un tale piano si possono definire, nel modo ordinario, le omologie speciali di asse r , che formano gruppo.

(2) Che tale gruppo sia necessariamente abeliano risulta da un ragionamento di B. SEGRE ([1], p. 111 e sgg.). Per una esposizione d'insieme sui piani grafici, ved. B. SEGRE [1], e G. ZAPPA [2].

Dim. ⁽³⁾. — Supponiamo che esista una omologia speciale a , di asse r e centro R su r , non identica, a periodo finito n (maggiore di 0). Sia b un'omologia speciale di asse r , avente un centro R' su r diverso da R . Il centro R'' dell'omologia prodotto $a \cdot b$ non può coincidere con R' , altrimenti anche $a = (a \cdot b) \cdot b^{-1}$ avrebbe centro R' , al pari di $a \cdot b$ e b , contro l'ipotesi. Si ha ora: $(a \cdot b)^n = b^n$; allora b^n , quale potenza di b , deve avere centro in R' , quale potenza di $a \cdot b$ deve avere centro in R'' diverso da R' . Ma un'omologia speciale di asse r che ammette due centri distinti è necessariamente l'identità: $b^n = 1$. Perciò ogni omologia speciale b di asse r e di centro R' diverso da R deve avere un periodo finito, divisore di n , non appena esista un'omologia a di centro R a periodo finito n . Da questo fatto discende in modo ovvio che tutte le omologie speciali di asse r devono avere il medesimo periodo finito n , se una di esse lo ha, che n dev'essere un numero primo p ; e che, viceversa, tutte le omologie speciali di asse r sono aperiodiche, se una di esse lo è.

Il teorema I, 1 permette di definire una *caratteristica* per un piano microdesarguesiano rispetto ad una sua retta r : diremo che la *caratteristica del piano* è 0, se tutte le omologie speciali non identiche di asse r sono aperiodiche, che la *caratteristica del piano* è il numero primo p , se tutte le omologie speciali non identiche di asse r sono periodiche ed hanno tutte il medesimo periodo p . Vedremo più in là che questa definizione di caratteristica estende quella che si dà nel caso che il piano sia addirittura desarguesiano (in questo caso la caratteristica del piano si definisce come la caratteristica dell'anello delle sue coordinate, che è un corpo).

A priori, si possono presentare come possibili tre casi:

- 1° piani infiniti a caratteristica 0;
- 2° piani infiniti a caratteristica finita;
- 3° piani finiti a caratteristica finita.

2. La possibilità di estendere l'ordinario concetto di caratteristica dai piani desarguesiani ai piani microdesarguesiani affini è legata al seguente fatto geometrico:

I, 2. — *Ogni piano grafico microdesarguesiano rispetto ad una sua retta r contiene in sé: 1° o un sottopiano desarguesiano isomorfo al piano lineare sopra il campo, $C(p)$, delle classi resto modulo p (caso della caratteristica p); 2° o un sottopiano isomorfo al piano lineare sopra il campo razionale (caso della caratteristica 0). Ogni tale piano si può pertanto concepire come ampliamento*

(3) Preferiamo dare per prima la dimostrazione che segue, anziché quella — più breve — esposta al n. 3, perché essa è di carattere diretto ed elementare, puramente geometrico-grupale, ed è indipendente dal teorema di Hall utilizzato nel n. 3; e lo stesso dicasi per la dimostrazione del teorema I, 2 del n. 2. I risultati qui esposti non si trovano nella letteratura consultata (per la quale cfr. anche i lavori citati in [4], [5], [6]). I teoremi I, 3 e II, 3 sono dimostrati in [8], pp. 400-404, solo nel caso particolare degli pseudocorpi di Veblen-Wedderburn finiti nei quali gli elementi non nulli formano gruppo rispetto al prodotto.

(desarguesiano o non) di un piano desarguesiano. La dimostrazione di questo fatto ha carattere geometrico-grupale; presuppone il teorema I, 1 del precedente paragrafo, e cioè il fatto che le omologie speciali di π siano o tutte periodiche di periodo primo p (caso della caratteristica p), o tutte aperiodiche (caso della caratteristica 0).

a) *Caso della caratteristica p .* - Consideriamo un punto O di π (preso a piacere, purché non sulla r) e due rette distinte x, y uscenti da O , i punti impropri delle quali siano X, Y su r (scelta come retta impropria), e fissiamo l'attenzione su di una omologia speciale τ di centro X , su di una omologia speciale ω di centro Y , ambedue diverse dall'identità e quindi a periodo p . Per quanto è detto in Segre ([1], loc. cit.) e nelle mie Note [4] e [5] si avrà: 1° $\omega\tau = \tau\omega$; 2° il gruppo generato da τ e da ω è il gruppo abeliano elementare di ordine p^2 . Tale gruppo è la somma di $p + 1$ gruppi ciclici di ordine p aventi due a due in comune la sola identità, e precisamente dei sottogruppi generati da $\omega, \tau\omega, \tau^2\omega, \dots, \tau^{p-1}\omega$. Ognuno di tali sottogruppi individua una direzione nel piano π (le potenze di una omologia speciale di dato centro sono omologie speciali aventi per centro lo stesso centro).

A partire dal punto O prescelto, costruiamo i p^2 punti $\tau^i\omega^j(O)$ (essendo $\tau^i\omega^j(O) = \omega^j\tau^i(O)$ il punto del quale O è portato dall'omologia speciale $\tau^i\omega^j = \omega^j\tau^i$). Indicheremo anche con il simbolo (i, j) il punto $\tau^i\omega^j(O)$; $(i, j) = (h, k)$ se e soltanto se $i = h, j = k \bmod p$. Ora, i p punti:

$$\begin{aligned} \tau^i\omega^j(O) \quad ; \quad \tau^a\omega^b[\tau^i\omega^j(O)] &= \tau^{a+i}\omega^{b+j}(O); \dots (\tau^a\omega^b)^r[\tau^i\omega^j(O)] = \\ &= \tau^{a+ir}\omega^{b+jr}(O); \dots \quad (r = 0, 1, \dots, p-1); \end{aligned}$$

sono tutti allineati, giacché sono i trasformati l'uno dell'altro in omologie speciali aventi lo stesso centro, e precisamente nelle omologie speciali del gruppo ciclico $\{\tau^a\omega^b\}$ generato da $\tau^a\omega^b$. Poiché il gruppo delle omologie speciali generato da τ e ω si decompone nella somma di $p + 1$ gruppi ciclici aventi due a due in comune la sola identità e individuanti $p + 1$ punti impropri distinti, si avrà che i p^2 punti $\tau^i\omega^j(O)$ si distribuiscono, rispetto a ciascuno di tali punti impropri, in p gruppi di p punti allineati su rette tra di loro parallele. Avremo perciò in tutto $p(p + 1)$ allineamenti dei p^2 punti in questione; ed anzi, giacché due punti qualsiasi $\tau^x\omega^y(O), \tau^i\omega^j(O)$ sono il primo trasformato del secondo in una ben determinata omologia $\tau^{x-i}\omega^{y-j}$ si ha che due punti qualsiasi tra i p^2 presi in considerazione appartengono ad uno e ad uno solo dei $p^2 + p$ allineamenti sopra definiti (*per due punti distinti passa una retta ed una soltanto*).

La condizione perché un punto $\tau^x\omega^y(O)$ sia allineato con $\tau^i\omega^j(O)$ e il punto improprio individuato da $\{\tau^a\omega^b\}$ è allora che

$$(\tau^a\omega^b)^r[\tau^i\omega^j(O)] \equiv \tau^x\omega^y;$$

cioè che:

$$\tau^{a+ir} \equiv \tau^x \quad ; \quad \omega^{b+jr} \equiv \omega^y.$$

Ma ciò accade quando e soltanto quando:

$$\begin{cases} ra + i - x = 0 \pmod{p} \\ rb + j - y = 0 \pmod{p} \end{cases}$$

e perciò, eliminando r , quando:

$$b(x - i) - a(y - j) = 0 \pmod{p}.$$

Trovare il punto comune a due tra i $p^2 + p$ allineamenti prima definiti significa perciò trovare la soluzione di un sistema di due congruenze lineari \pmod{p} in due incognite x, y ; il caso dell'impossibilità porta al parallelismo (come è facile vedere); altrimenti si ottiene una ed una sola soluzione $(i, j) - i, j$ interi \pmod{p} - alla quale corrisponde uno dei p^2 punti $(i, j) = \tau^i \omega^j(o)$. Si ha pertanto che i p^2 punti $\tau^i \omega^j(o)$ e le $p^2 + p$ rette che li congiungono due a due formano un piano euclideo finito di rango p isomorfo al piano lineare sopra il campo $C(p)$ delle classi resto \pmod{p} ; e tale piano euclideo con l'aggiunta dei $p + 1$ punti impropri $\{\tau^a \omega^b\}$ e della retta impropria si amplia in un piano proiettivo desarguesiano finito di rango p che è ancora un sottopiano di π , c. v. d. La dimostrazione fatta indica anche un modo per costruire « modelli euclidei » per i piani finiti sopra un $C(p)$ (ved. anche la mia nota [6]).

b) *Caso della caratteristica 0.* - Le omologie speciali di asse $r =$ retta impropria sono tutte aperiodiche. Fissiamo l'attenzione su due omologie speciali, τ e ω , di centri distinti X e Y , non identiche. Congiungiamo un punto O non su r con X e Y , in modo da ottenere le due rette x, y . Sulla x consideriamo la successione

$$\tau^{-n}(o), \dots, \tau^{-1}(o), o, \tau(o), \dots, \tau^n(o), \dots;$$

sulla y l'analogia successione

$$\omega^{-n}(o), \dots, \omega^{-1}(o), o, \omega(o), \dots, \omega^n(o), \dots$$

(nell'una e nell'altra, n intero positivo). Dimostriamo innanzitutto che, nella ipotesi fatta che π sia microdesarguesiano rispetto a r :

Esistono una ed una sola omologia speciale $\bar{\tau}$ di centro X su r , una ed una sola omologia speciale $\bar{\omega}$ di centro Y su r tali che $\bar{\tau}^k = \tau$; $\bar{\omega}^k = \omega$ (k intero, positivo). Indicato con (i, j) il punto $\tau^i \omega^j(o)$ consideriamo le rette:

$$r_0, \text{ congiungente } (o, o) \text{ con } (1, -k + 1);$$

$$r_1, \dots, \dots (o, 1) \text{ con } (1, -k + 2);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_k, \dots, \dots (o, k) \text{ con } (1, -k + k + 1) = (1, 1).$$

Ciascuna di esse si ottiene dalla precedente mediante la omologia speciale (traslazione) ω , e sono pertanto tutte parallele tra di loro. La retta r_1 e la retta E congiungente (o, o) con $(1, 1)$ si incontrino nel punto P_k ; $\tau(o), \omega(o)$ siano i punti di incontro risp. con gli assi x e y delle parallele agli assi y e x per P_k ; $\bar{\tau}, \bar{\omega}$ sono allora le traslazioni di centro X, Y che portano O risp. in $\bar{\tau}(o), \bar{\omega}(o)$, certo esistenti ed uniche giacché siamo nella ipotesi che

π sia microdesarguesiano rispetto alla r . Di conseguenza $P_k = \bar{\tau} \bar{\omega}(o)$; la traslazione $\bar{\tau} \bar{\omega}$, portando il punto (o, o) della r_o nel punto P_k della r_1 , e mutando, come ogni traslazione, una retta in una sua parallela, porta r_o in r_1 . Ma allora (si ricordi ancora una volta che il gruppo delle traslazioni è necessariamente abeliano):

$$\bar{\tau} \bar{\omega}(r_o) = r_1 \quad ; \quad \omega[\bar{\tau} \bar{\omega}(r_o)] = r_2 = \bar{\tau} \bar{\omega}[\omega(r_o)] = \bar{\tau} \bar{\omega}(r_1) = \bar{\tau}^2 \bar{\omega}^2(r_o);$$

e successivamente $\bar{\tau} \bar{\omega}(r_2) = r_3 = \bar{\tau}^3 \bar{\omega}^3(r_o)$, ecc., di modo che si avrà:

$$\bar{\tau}^k \bar{\omega}^k(r_o) = r_k.$$

D'altra parte, è anche $\tau \omega(r_o) = r_k$ (r_k è la parallela ad r_o per $(1, 1) = \tau \omega(o)$); ed essendo $\bar{\tau}^k, \omega^k$ al pari di $\bar{\tau} \bar{\omega}$ e di $\tau \omega$ una traslazione con centro nel punto all'infinito della retta E che congiunge (o, o) ed $(1, 1)$, sarà addirittura:

$$\bar{\tau}^k \bar{\omega}^k(o) = \tau \omega(o).$$

Ora, ciò è possibile se e soltanto se $\bar{\tau}^k = \tau$; $\bar{\omega}^k = \omega$. Esiste perciò una traslazione $\bar{\tau}$ di centro X tale che $\bar{\tau}^k = \tau$. Essa è allora necessariamente unica. Se infatti vi fosse un'altra traslazione t di centro X , distinta da $\bar{\tau}$, tale che:

$$t^k = \tau$$

sarebbe $(\bar{\tau} t^{-1})^k = \bar{\tau}^k t^{-k} = \tau \cdot \tau^{-1} = 1$; esisterebbe cioè, contrariamente a quanto è stato dimostrato nel teorema I, 1, una traslazione di periodo finito k accanto a una traslazione aperiodica, quale si è supposta τ . Analogo il ragionamento per l'unicità di $\bar{\omega}$. Sarà allora lecito porre:

$$\bar{\tau} = \tau^{1/k} \quad ; \quad \tau^{-1} = \tau^{-1/k}$$

e, più in generale,

$$\tau^{h/k} = \tau^h.$$

Analogamente per $\bar{\omega}$.

Abbiamo così definito, accanto alle potenze ad esponente intero, tutte le potenze ad esponente razionale (positivo, negativo o nullo) di τ (e così di ω), le quali formano un gruppo additivo isomorfo al gruppo additivo dei numeri razionali. Perciò, partendo da τ e da ω , accanto ai punti a « coordinate intere », $(i, j) = \tau^i \omega^j(o)$ (i, j interi), possiamo introdurre i punti a « coordinate razionali »:

$$(m, n) = \tau^m \omega^n(o) \quad (m, n \text{ razionali}).$$

La direzione della retta congiungente due tali punti: $\tau^m \omega^n(o), \tau^h \omega^k(o)$, è allora definita dal gruppo formato dalle potenze a esponente razionale della operazione:

$$\tau^a \omega^b = \tau^{m-h} \omega^{n-k}$$

che porta $\tau^h \omega^k(o)$ in $\tau^m \omega^n(o)$.

Quali sono i punti $\tau^x \omega^y(o)$ a coordinate razionali appartenenti a tale retta? Sono tutti e soli i punti per i quali si ha:

$$(\tau^a \omega^b)^r \cdot \tau^x \omega^y(o) = \tau^i \omega^j(o);$$

per i quali cioè:

$$\tau^{ra+x} = \tau^i \quad ; \quad \omega^{rb+y} = \omega^j.$$

Ma allora dovrà essere nel campo razionale:

$$ra + x - i = 0$$

$$rb + y - j = 0$$

ed eliminando r :

$$b(x-i) - a(y-j) = 0.$$

L'equazione della retta congiungente due punti a coordinate razionali è perciò una equazione lineare nel campo razionale. Viceversa, si vede immediatamente che due equazioni lineari nel campo razionale definiscono o una direzione (nel senso prima chiarito), o un punto $\tau^h \omega^k(o)$ a coordinate razionali (h, k) , e perciò che:

L'insieme dei punti $\tau^h \omega^k(o)$ (h, k razionali) e delle rette che li congiungono due a due formano in π un piano euclideo isomorfo al piano euclideo sul campo razionale, che può essere ampliato nel corrispondente piano proiettivo.

Osservazione. - Come corollario della prima parte del teorema ora dimostrato si ha che:

II, 2. - *Un piano finito di rango primo p microdesarguesiano rispetto ad una retta r è sempre addirittura desarguesiano.*

È noto un sistema monomorfo di assiomi che riproduce il piano lineare sopra le classi resto rispetto a un modulo primo, tale che cioè ogni modello soddisfacente ad esso è isomorfo al piano lineare sopra $C(p)$. Tale sistema è (G. Järnefelt e P. Kustaanheimo [7]): I, 1. Esistono almeno due rette; 2. Su ogni retta giacciono esattamente p punti; 3. Se A e B sono due punti, esiste una ed una sola retta che li contiene ambedue; 4. Per un punto fuori di una retta esiste una ed una sola parallela alla retta stessa; 5. È valido il teorema di Desargues dei triangoli omologici. Il teorema II, 2 permette di indebolire le ipotesi di Järnefelt e Kustaanheimo, sostituendo a I, 5 l'assioma: I, 5. - Il piccolo teorema di Desargues ha validità affine.

3. Ricordiamo il seguente:

TEOREMA DI HALL (Marshall Hall [4], p. 266). - Le coordinate di un piano grafico nel quale il piccolo teorema di Desargues vale rispetto alla retta all'infinito scelta come asse (piano microdesarguesiano affine) formano uno pseudocorpo di Veblen-Wedderburn dotato di unità; e, viceversa, nel piano determinato da uno pseudocorpo di Veblen-Wedderburn il piccolo teorema di Desargues è valido rispetto alla retta all'infinito.

Diremo che un sistema R a doppia composizione è uno pseudocorpo di Veblen-Wedderburn (o, più brevemente, di V.-W.) dotato di unità, quando in esso siano verificati i seguenti assiomi:

A) Il sistema R è un gruppo abeliano (additivo) rispetto alla prima operazione, che chiameremo addizione. Rispetto alla seconda operazione (che chiameremo prodotto) si ha che: $E_1) x \cdot a = b, a \neq 0$, ha un'unica soluzione x ; $E_2) a \cdot z = b, a \neq 0$, ha un'unica soluzione z ; $E_3) x \cdot r = x \cdot s + t, r \neq s$, ha un'unica soluzione x ; $M_5) 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$; $M_3)$ (esistenza di una unità e) $e \cdot a = a \cdot e = a$; vale infine la proprietà distributiva a destra: $D_2) (a+b) \cdot c = ab + bc$.

Il teorema di Hall permette di tradurre i risultati geometrici relativi ai piani microdesarguesiani affini esposti nei primi paragrafi della presente Nota in teoremi algebrici relativi agli pseudocorpi di V.-W. dotati di unità. Li enunceremo, accennando al modo in cui possono essere dedotti in modo diretto, indipendentemente dal teorema di Hall, a partire dagli assiomi caratteristici di uno pseudocorpo.

I, 3. - *In uno pseudocorpo si presentano due alternative: a) per ogni $a \neq 0$, $(na) = (a + \dots + a) = 0$, quando e soltanto quando $n = 0$; b) 0 , per ogni $a \neq 0$, è $(na) = 0$ quando e soltanto quando $n = 0 \pmod{p}$, essendo p un numero primo. Nel primo caso si dirà che lo pseudocorpo ha caratteristica 0 , nel secondo che esso ha caratteristica p .*

Supponiamo che esista un elemento $a \neq 0$ tale che $(na) = 0$, con n intero positivo. Dato un qualsiasi altro elemento b non nullo, esisterà (per E_2) uno ed un solo elemento z tale che $az = b$. Ma (per M_5), da $(na) = 0$ si deduce $(na)x = 0 = (a + a + \dots + a) \cdot x$, e di qui (per D_2) segue che $ax + ax + \dots + ax = 0$, cioè $b + b + \dots + b = (nb) = 0$. Perciò il periodo di b , nel gruppo abeliano additivo relativo alla somma, è un divisore di quello di a , ecc.

II, 3. - *Uno pseudocorpo di V.-W. dotato di unità si può sempre considerare come l'ampliamento: a) o del campo $C(p)$ delle classi resto mod. p ; b) o del campo razionale.*

Detta e l'unità dello pseudocorpo, si ha intanto che:

$$\begin{aligned} (re) \cdot (se) &= \overbrace{(e + e + \dots + e)}^{r \text{ volte}} \cdot (se) = [e \cdot (se) + e \cdot (se) + \dots + e \cdot (se)] = \\ &= \overbrace{(se + se + \dots + se)}^{r \text{ volte}} = (r(se)) = (rse). \end{aligned}$$

Perciò, nel caso della caratteristica prima, i multipli interi dell'unità e formano un campo isomorfo al campo $C(p)$ delle classi resto mod p ; nel caso della caratteristica 0 essi formano, rispetto al prodotto, un insieme isomorfo a quello degli interi ordinari. In questo secondo caso, esisterà certo uno ed un solo x tale che $(se) \cdot x = (sx) = e$, per $s \neq 0$. Ponendo $x = \begin{pmatrix} 1 & e \\ s & \end{pmatrix}$ si vede facilmente che gli elementi così introdotti a partire da e formano un

campo isomorfo a quello razionale (per esempio, se $x = \left(\frac{1}{s} e\right)$, $y = \left(\frac{1}{r} \cdot e\right)$ si deduce subito che $x + y = \left(\frac{(r+s)}{rs} \cdot e\right)$, cioè che $(rs(x+y)) = ((r+s)e)$; e infatti per ipotesi $(r(sx)) = (re)$, $(s(r y)) = (se)$).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1948.
- [2] G. ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite*, Editrice Liguori, Napoli 1952.
- [3] MARSHALL HALL, *Projective planes*, «Am. Math. Soc.», vol. 54, n. 1, 1943.
- [4] L. LOMBARDO-RADICE, *Una nuova costruzione dei piani grafici desarguesiani finiti*. «Ricerche di Matematica», vol. II, 1953.
- [5] L. LOMBARDO-RADICE, *Piani grafici finiti a coordinate di Veblen-Wedderburn*, in corso di pubblicazione su «Ricerche di matematica», Napoli.
- [6] L. LOMBARDO-RADICE, *Su alcuni modelli di geometrie proiettive piane finite*. «Atti del IV Congr. dell'Unione Mat. It.», 1952.
- [7] G. JARNEFELT e P. KUSTANHEIMO, *An observation on finite geometries*. «Atti dell'XI Congr. dei Matematici Scandinavi», 1952.
- [8] R. D. CARMICHAEL, *Groups of finite order*, Ginn and Co., Boston 1937.

Geometria. — *Geometria pseudo-kähleriana*. Nota II di HEINRICH GUGGENHEIMER, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

In questa Nota si conservano tutte le definizioni e notazioni di una Nota anteriore ⁽¹⁾, ma si considerano soltanto funzioni e forme differenziali a valori *reali*. La considerazione di forme esterne a valori complessi non faciliterebbe i calcoli in questione, e non darebbe altri risultati ⁽²⁾. Ci proponiamo qui di studiare talune formole connesse colla condizione di Eckmann-Frölicher, già annunciate al Convegno internazionale di geometria differenziale.

1. Sia U la trasformazione identica delle forme esterne; allora esiste sulle varietà quasi-complesse una trasformazione C tale che, per ogni grado p , si abbia

$$C^2 = CC = (-1)^p U.$$

Per ogni intero k esistono conseguentemente degli operatori lineari C_k tali che

$$(1) \quad C_k^2 = C,$$

per esempio

$$(2) \quad C_k = \sin \frac{\pi}{2k} \cdot C + \cos \frac{\pi}{2k} \cdot U.$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) «Rend. Acc. Naz. Lincei» (8), XIV, pp. 220-222 (1953).

(2) Per il passaggio dal reale al complesso e viceversa si veda la letteratura indicata in (3) e (4) della Nota (*).

Generalizzando la (7) della Nota ⁽¹⁾, associamo alla (1) l'operazione di differenziazione esterna

$$(3) \quad d_k^e = C_k^{2k-e} dC_k^e.$$

Si potrà limitare e a $0 < e < 2k$. Il \bar{d} della Nota anteriore si scrive con questa notazione d_k^i .

Il teorema da provare è:

Per ogni trasformazione lineare C_k , che soddisfi alla (1), la relazione

$$(4) \quad dd_k^e + d_k^e d = 0$$

implica la:

$$(5) \quad d\bar{d} + \bar{d}d = 0$$

la quale a sua volta equivale alla condizione di Eckmann-Frölicher. Per le trasformazioni speciali (2), le (4) e (5) sono equivalenti.

2. Cominciamo colla seconda parte del teorema. Tenendo conto della relazione fondamentale $dd = 0$, si ottengono per le operazioni (2), le uguaglianze, in un certo senso triviali,

$$dd_k^e = \text{sen}^2 \frac{\pi e}{2k} dd + \text{sen} \frac{\pi e}{2k} \cos \frac{\pi e}{2k} dCd$$

$$d_k^e d = \text{sen}^2 \frac{\pi e}{2k} \bar{d}d - \text{sen} \frac{\pi e}{2k} \cos \frac{\pi e}{2k} dCd.$$

Ne consegue la

$$dd_k^e + d_k^e d = \text{sen}^2 \frac{\pi d}{2k} (d\bar{d} + \bar{d}d),$$

e quindi l'asserto.

3. Passiamo ora al caso generale di una trasformazione per la quale si conosca soltanto che vale la (1). Una tale trasformazione, ove esista differente dalla (2), definisce sopra la varietà in considerazione una struttura *più fine* di quella quasi-complessa, struttura che sembra meritare uno studio intrinseco.

Sia α_j^i il tensore misto restrizione di C_k^e alle forme esterne lineari, e β_j^i, a_j^i quelli restrizioni rispettivamente di C_k^{2k-e} e C . Risulta allora

$$\beta_j^i = \alpha_{e_1}^i \alpha_{e_2}^{e_1} \dots \alpha_j^{e_{2k-e-1}}.$$

Poniamo inoltre

$$\alpha_{ke}^i = \frac{\partial \alpha_k^i}{\partial x^e} - \frac{\partial \alpha_e^i}{\partial x^k},$$

$$\tau_{ke}^i = \alpha_{pe}^i \alpha_k^p - \alpha_{pk}^i \alpha_e^p,$$

e procediamo come per la dimostrazione della (5) ⁽¹⁾. Si vede così che la (4) equivale alle

$$(6) \quad \tau_{ke}^i = 0.$$

Ma da

$$a_j^i = \alpha_{e_1}^i \cdots \alpha_{e_{k-e-1}}^i$$

si deduce

$$a_{e_{k-e}m}^{e_0} = \sum_{j=0}^{k-e-1} \alpha_{e_1}^{e_0} \cdots \hat{\alpha}_{e_{j+1}}^{e_j} \cdots \alpha_{e_{k-e}}^{e_{k-e-1}} \alpha_{e_{j+1}m}^{e_j},$$

dove il termine sotto il segno \wedge è da sopprimere. Ne risulta:

$$t_{e_{k-e}m}^{e_0} = \sum \alpha_{e_1}^{e_0} \cdots \hat{\alpha}_{e_{j+1}}^{e_j} \cdots \alpha_{e_{k-e}}^{e_{k-e-1}} \alpha_{e_{j+1}m}^{e_j},$$

e le (6) implicano le condizioni di Eckmann-Frölicher

$$t_{e_{k-e}m}^{e_0} = 0.$$

4. Come preparazione ad uno studio intrinseco delle varietà V^{2k} a trasformazione C_k , notiamo qualche formola per le operazioni sulle forme esterne. Dalla definizione (1) si trae la

$$(7) \quad C_k^e C = C C_k^e.$$

La moltiplicazione esterna per la forma base e venga designata con L , e si ponga:

$$\Lambda = (-1)^p * L *,$$

ove - secondo l'uso - l'asterisco denota l'operazione di passaggio all'aggiunta di Hodge-de Rham. Dall'esistenza di una base locale $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ delle forme lineari tale che

$$\omega_{n+j} = C \omega_j, \quad j \leq n,$$

$$e = \sum_{j \leq n} \omega_j \wedge \omega_{n+j},$$

e tenuto conto della (7), si trae subito la

$$(8) \quad C_k^e L = L C_k^e.$$

Si ha inoltre:

$$(9) \quad C_k * = * C_k,$$

$$(10) \quad C_k \Lambda = \Lambda C_k;$$

bastando all'uopo poggiare sulla nota rappresentazione di $*$ per L e C sopra le varietà quasi-complesse ⁽³⁾. Ponendo come d'uso

$$\delta = -*d*,$$

ed analogamente

$$\delta_k^e = -*d_k^e* = -C_k^{2k-e} \delta C_k^e,$$

le formole, valide per ogni varietà quasi-complessa con $de = 0$,

$$d\Lambda - \Lambda d = \delta_1^1, \quad dL - Ld = 0$$

$$\delta L - L\delta = -d_1^1, \quad \delta\Lambda - \Lambda\delta = 0$$

diventano:

$$(11) \quad d_k^e \Lambda - \Lambda d_k^e = C \delta_k^e C; \quad d_k^e L - L d_k^e = 0$$

$$(12) \quad \delta_k^e L - L \delta_k^e = -C d_k^e C; \quad \delta_k^e \Lambda - \Lambda \delta_k^e = 0.$$

dove D indica il dominio ottenuto togliendo allo spazio i punti interni a C . Le u, v, w dovranno inoltre soddisfare le condizioni al contorno

$$(2) \quad \begin{cases} lu + mv + nw = 0 & ; \quad \text{su } \mathcal{F}D \\ u = -U, \quad v = w = 0 & , \quad \text{all'infinito,} \end{cases}$$

essendo l, m, n i coseni direttori della normale \vec{v} ad $\mathcal{F}D$, orientata internamente a D .

Notoriamente la densità del fluido è legata alla velocità \vec{U} , alla densità ρ_∞ ed alla velocità c_∞ di propagazione del suono, relative al fluido in quiete, dalla relazione

$$(3) \quad \rho = \rho_\infty \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2 c_\infty^2} (U^2 - V^2) \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

dove $\gamma = c_p/c_v$ indica il rapporto dei calori specifici a pressione ed a volume costanti, il cui valore può, con buona approssimazione, ritenersi costante.

L'equazione (1) si presenta così come un'equazione *non lineare*.

§. 2 - Si supponga *nota* la ρ : fissiamo cioè una arbitraria distribuzione di densità $\rho(x, y, z)$, soddisfacente alle condizioni di essere continua in D colle sue derivate parziali prime e mai negativa.

Nell'ipotesi che esista una corrente irrotazionale, di potenziale $\Phi(x, y, z)$, che soddisfi le assegnate condizioni al contorno, siano u_0, v_0, w_0 le componenti di un *altro* campo di velocità (rotazionale), anch'esso verificante la (1) e le (2).

Nell'ulteriore ipotesi che $u_0 + U, v_0 + U, w_0 + U, \Phi_x + U, \Phi_y + U, \Phi_z + U$ siano infinitesime all'infinito di ordine superiore al terzo rispetto al $1/\overline{OP}$, esisteranno

$$T_0 = \frac{1}{2} \iiint_D \rho [(u_0 + U)^2 + v_0^2 + w_0^2] dx dy dz,$$

$$T_\Phi = \frac{1}{2} \iiint_D \rho [(\Phi_x + U)^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2] dx dy dz,$$

che rappresentano ⁽¹⁾ l'energia cinetica del fluido relativamente ai due moti considerati. Quando si ponga $T = \frac{1}{2} \iiint_D \rho (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz$, con

$u = u_0 - \Phi_x, v = v_0 - \Phi_y, w = w_0 - \Phi_z$, la semplice applicazione della formula di Green ci dà

$$\begin{aligned} T_0 &= T_\Phi + T + \iiint_D \rho [u(\Phi_x + U) + v\Phi_y + w\Phi_z] dx dy dz = \\ &= T_\Phi + T - \int_{\mathcal{F}D} \rho (\Phi + Ux)(lu + mv + nw) d\sigma - \\ &\quad - \iiint_D (\Phi + Ux) [(\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z] dx dy dz. \end{aligned}$$

(1) Cfr. LORD KELVIN, *On vis-viva of a liquid in motion*. Cambridge and Dublin, «Mathem. Journal», 1849 («Mathematical and Physical papers», t. i., p. 107).

Ma gli ultimi due integrali scritti sono ovviamente nulli. Quindi, essendo $T > 0$, risulterà $T_0 > T_\Phi$, che estende al caso di ρ non necessariamente costante, la proprietà, dovuta a Lord Kelvin, che *il moto irrotazionale di un fluido, qualunque sia la distribuzione di densità prefissata, ha la minima energia cinetica rispetto ad ogni altro moto verificante le stesse condizioni al contorno* ⁽²⁾.

§ 3. - Da ora in poi faremo riferimento a moti irrotazionali. Allora le equazioni (1) e (2), atte da sole a rappresentare il moto, riferite ad un potenziale di velocità Φ , si scriveranno

$$(1') \quad (\rho \Phi_x)_x + (\rho \Phi_y)_y + (\rho \Phi_z)_z = 0 \quad , \quad \text{su } D - \mathfrak{F}D$$

$$(2') \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right]_{\text{su } \mathfrak{F}D} \equiv \Phi_x l + \Phi_y m + \Phi_z n = 0 \quad , \quad \text{su } \mathfrak{F}D \\ \Phi_x = -U, \Phi_y = \Phi_z = 0 \quad , \quad \text{all'infinito.} \end{cases}$$

Indicata con Φ_0 una qualunque soluzione di (1'), se Φ è una eventuale soluzione del nostro problema, si consideri $k \Phi_0$, rappresentando k una costante opportuna. Ponendo $\Phi = \Phi - k \Phi_0$, con ovvio significato di simboli, il teorema di Green ci dà

$$T = \bar{T} + T_0 - k \int_{\mathfrak{F}D} \rho (\Phi_0 + Ux) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \nu} d\sigma - k \iiint_D \rho (\Phi_0 + Ux) \cdot [(\rho \bar{\Phi}_x)_x + (\rho \bar{\Phi}_y)_y + (\rho \bar{\Phi}_z)_z] dx dy dz.$$

Il secondo integrale a secondo membro risulterà nullo. Scegliendo il valore k^* della costante k in modo che sia nullo anche il primo integrale, ed indicando con T^* il corrispondente valore dell'energia cinetica relativa a tale potenziale si avrà:

$$T = \bar{T} + T^*.$$

Ed essendo $\bar{T} \geq 0$, se ne deduce che la soluzione del problema che ci siamo posti, se c'è, rende massimo il funzionale

$$T[\Phi] = \frac{1}{2} \iiint_D \rho [(\Phi_x^* + U)^2 + \Phi_y^{*2} + \Phi_z^{*2}] dx dy dz$$

nella classe delle funzioni sopra considerate $\Phi^* = k^* \Phi_0$.

Si può provare che T^* si mantiene superiormente limitato. Se si indica infatti con ρ_0 la massima densità, che si ha in corrispondenza al punto di ristagno, ne risulterà

$$T^* \leq \frac{1}{2} \iiint_D \rho_0 [(\Phi_x^* + U)^2 + \Phi_y^{*2} + \Phi_z^{*2}] dx dy dz,$$

(2) Tale proprietà è stata pure trovata dal dott. A. PRATELLI, con un diverso procedimento, ed apparirà in una Nota dal titolo: *Principi variazionali nella Meccanica dei fluidi*, in corso di stampa sui « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. 86, 1953.

il cui massimo sappiamo esistere rappresentando l'energia cinetica del liquido di densità ρ_0 in cui si muove il corpo C col moto traslatorio uniforme da noi considerato.

§ 4. — Quando si prescinda da una inessenziale costante additiva, è immediata la dimostrazione dell'*unicità* della soluzione.

Dette infatti $\Phi^{(1)}$ e $\Phi^{(2)}$ due eventuali *distinte* soluzioni, posto, col solito significato di simboli, $\bar{\Phi} = \Phi^{(1)} - \Phi^{(2)}$, si avrà:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \iiint_D \rho [(\bar{\Phi}_x + \Phi_x^{(2)} + U)^2 + (\Phi_y + \Phi_y^{(2)})^2 + (\Phi_z + \Phi_z^{(2)})^2] dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_D \rho [\bar{\Phi}_x^2 + \bar{\Phi}_y^2 + \bar{\Phi}_z^2] dx dy dz + T_2 - \\ &- \int_{\partial D} \rho (\Phi^{(2)} + Ux) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \nu} d\sigma - \iiint_D (\Phi^{(2)} + Ux) (\rho \bar{\Phi}_{xx} + (\rho \bar{\Phi}_y)_y + (\rho \bar{\Phi}_z)_z) dx. \end{aligned}$$

Cioè: $T_1 = \bar{T} + T_2$.

Ma $T_1 = T_2$, perchè, come soluzioni, sono entrambe massimo dello stesso funzionale; e quindi $\bar{T} = 0$, il che è assurdo risultando $\bar{T} > 0$.

§ 5. — Vediamo ora come si possa procedere per l'effettivo calcolo approssimato della soluzione.

Si scelgano n funzioni

$$\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \dots, \varphi_n(x, y, z)$$

verificanti la (1'). Qualunque siano i valori delle n costanti k_1, k_2, \dots, k_n , la combinazione lineare di tali funzioni

$$\Phi = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \dots + k_n \varphi_n$$

sarà ancora soluzione della (1').

Calcolato il valore del funzionale

$$T[\Phi] = \iiint_D \rho [(\Phi_x + U)^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2] dx dy dz,$$

cerchiamone i valori di k_1, k_2, \dots, k_n che lo rendono massimo, sotto il vincolo

$$\int_{\partial D} \rho (\Phi + Ux) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

Tali valori delle costanti così trovati, $k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*$ saranno tali da rendere la funzione:

$$\Phi^* = k_1^* \varphi_1 + k_2^* \varphi_2 + \dots + k_n^* \varphi_n,$$

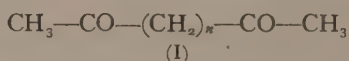
in prima approssimazione, soluzione del problema che ci eravamo proposti.

Converrà naturalmente prendere per ρ una funzione che approssimi nel miglior modo possibile la vera distribuzione di densità. Ciò si potrà, per esempio, ottenere rilevando il valore della densità nei singoli punti del campo con metodi sperimentali interferenzimetrici; o, nel campo di applicabilità del metodo delle piccole perturbazioni, si potrà prendere per ρ la distribuzione ottenuta sostituendo nella (3), al posto della V , il valore del modulo della velocità ottenuta come soluzione dell'equazione linearizzata.

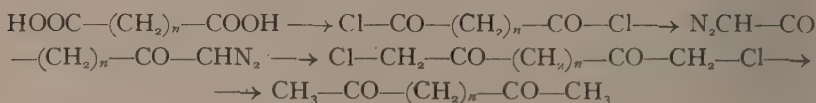
E naturalmente si potrà anche seguire un procedimento iterativo: attraverso la (3) far variare ad ogni passo delle approssimazioni la distribuzione della densità, servendoci dei valori della velocità ottenuti dal potenziale, soluzione della precedente approssimazione. Il procedimento si potrà arrestare al momento in cui, nel passaggio da una approssimazione alla successiva, la distribuzione di densità resta sensibilmente invariata.

Chimica organica. — *Sintesi di α - ω -diacetilparaffine*. Nota IV ^(*) di LUIGI CANONICA e TULLIO BACCHETTI, presentata ^(**) dal Socio L. CAMBI.

In tre precedenti Note ⁽¹⁾ vennero descritti numerosi dichetoni del tipo:



per lo più ottenuti dagli acidi bicarbossilici mediante il metodo generale da noi elaborato attraverso la sequenza di reazioni:



A completare la serie omologa dei dichetoni (I), che ci interessavano per lo studio delle loro proprietà fisiche oltre per le correlazioni di questi composti con la chimica dei macrocicli, mancavano i termini a 15, 17, 18, 19 e 21 atomi di carbonio.

Anche per la preparazione di questi dichetoni che sarebbe parsa non facile attraverso altri procedimenti, la sintesi attraverso i bisdiazochetoni sopra ricordata si è dimostrata soddisfacente per la facilità di esecuzione e per le buone rese complessivamente fornite.

Gli acidi bicarbossilici richiesti per la sintesi dei singoli termini risultavano tutti già noti, ma per alcuni di essi i metodi descritti dalla letteratura apparivano tanto laboriosi da indurci a studiarne una diversa preparazione. L'acido a tredici atomi di carbonio, il brassilico, è divenuto accessibile in

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1953.

(1) a) L. CANONICA e T. BACCHETTI, questi « Rendiconti » (8), 10, 479 (1951); b) *ibid.* (8), 11, 275 (1951); c) L. CANONICA, M. MARTINOLLI e T. BACCHETTI, *ibid.* (8), 13, 61 (1952).

Anche nella serie dei dichetoni un comportamento particolare, ed inverso a quello del corrispondente dichetone non clorurato, presenta il termine a nove atomi di carbonio relativamente altofondente.

Le condizioni di asimmetria agli estremi della catena atte a determinare l'apparire dell'alternanza nei punti di fusione non sono evidentemente realizzate nella molecola dei bisdiazochetoni, il grafico dei quali presenta andamento approssimativamente parallelo a quello proprio dei dichetoni. Invero trattasi di punti di fusione con decomposizione: il crescere del loro valore con il numero di atomi di carbonio dimostra come la stabilità della molecola del bisdiazochetone, sia connessa alla distanza dei due gruppi funzionali: il bisdiazochetone dell'acido succinico, a sei atomi di carbonio, è sostanza instabilissima ⁽⁵⁾.

PARTE SPERIMENTALE.

Acido brassilico. - Grammi 18,8 di acido diossibeenico, stereoisomero P. F. = 101° ⁽³⁾, venivano disciolti in 70 cm³ di acido acetico resistente all'acido cromatico riscaldando a 40°.

Con energica agitazione si introduceva la soluzione di g 10,5 di anidride cromica in 40 cm³ di acido acetico al 50 %, regolando l'aggiunta in modo da mantenere la temperatura della soluzione intorno ai 50°, da ultimo con moderato riscaldamento. Prendeva ben presto a separarsi un denso precipitato costituito dal sale di cromo dell'acido brassilico. Quando l'acido cromatico risultava completamente ridotto, si diluiva la soluzione con H₂SO₄ al 10 % e, dopo riposo a temperatura ambiente, si raccoglieva l'acido brassilico grezzo. Disciogliendo questo in carbonato sodico si ottenevano per riprecipitazione g 9,2 (il 75 % del teorico) di un prodotto con P. F. = 107°-109°, già sufficientemente puro; P. F. = 112° dopo cristallizzazione da acido acetico.

Acido pentadecan-1-15-dioico ed esadecan-1-16-dioico. - Grammi 25 di acido brassilico e g 56 di cloruro di tionile purificato venivano riscaldati per due ore su b. m.; si evaporava nel vuoto l'eccesso di cloruro di tionile e si riprendeva con benzolo due volte evaporando il solvente nel vuoto. Il liquido bruno residuo veniva senz'altro impiegato per la successiva trasformazione a diazochetone: esso veniva diluito con 100 cm³ di etere assoluto e la soluzione introdotta a gocce, sotto buona agitazione, in una soluzione di diazometano distillato, contenente g 18,2 in 270 cm³ di etere assoluto, il titolo della quale era stato determinato acidimetricamente. La temperatura veniva mantenuta a 0°-5°, iniziava ben presto un vivace sviluppo di azoto mentre si separava un abbondante precipitato cristallino di colore giallo.

Dopo una notte di riposo in frigorifero l'1-15-bisdiazoeptadecan-2-14-dione veniva filtrato alla pompa, lavandolo con etere: resa g 25,4 (87 %).

(5) J. ERNEST e J. HOFMAN, «Am. Chem. Abstracts», 46, 7048 (1952).

del teorico calcolato sull'acido brassilico), P. F. = 98° dopo due cristallizzazioni da etere di petrolio-benzolo. All'analisi:

	trov. ‰: N 18,81
per $C_{15}H_{24}O_2N_4$	calc. ‰: 19,21

Per la trasformazione in diammide dell'acido pentadecan-1-15-dioico g 22,5 di diazochetone venivano sciolti in 350 cm³ di diossano riscaldando su b. m.; si aggiungeva poi in un'unica ripresa la soluzione di 2 g di nitrato d'argento in 140 cm³ di ammoniacca acquosa al 20 ‰. Bollendo il liquido a ricadere si aveva un intorbidamento bruno, mentre si manifestava un regolare sviluppo d'azoto. Dopo 4 ore la soluzione filtrata a caldo depositava a freddo g 17,8 di ammide pentadecan-dioica, P. F. = 173° dopo cristallizzazione da acido acetico glaciale. All'analisi:

	trov. ‰: N 10,28
per $C_{15}H_{30}O_2N_2$	calc. ‰: 10,36

La saponificazione della diammide ad acido pentadecandioico veniva ottenuta con rese quasi quantitative per ebollizione per 2 ore con idrato potassico al 15 ‰. Dopo cristallizzazione da alcool etilico al 50 ‰, l'acido pentadecandioico fondeva a 114° in accordo con i dati della letteratura ⁽⁶⁾.

In modo del tutto analogo si otteneva l'acido esadecandioico a partire dall'acido tetradecandioico attraverso il già descritto 1-16-bisdiazo-esadecan-2-15-dione ⁽⁵⁾.

La diamide dell'acido esadecandioico, si presenta allo stato puro come polvere cristallina. P. F. = 173°. All'analisi:

	trov. ‰: N 9,99
per $C_{16}H_{32}O_2N_2$	calc. ‰: 9,85

L'idrolisi della diammide dava un acido esadecan-1-16-dioico con P. F. = 125° in accordo con il dato di Chuit ⁽⁶⁾.

Acido undecan-1-11-dioico dall'acido 6-cheto-undecan-1-11-dioico ⁽⁴⁾. - In un pallone munito di refrigerante a ricadere si disciolgono g 2,25 di sodio metallico in cm³ 40 di dietilenglicol puro: quando il sodio è passato in soluzione si introducono g 4,5 di acido 6 chetoundecan-1-11-dioico e cm³ 2,5 di idrazina al 98 ‰. Si mantiene a 100° per un'ora e si rimuove il refrigerante a ricadere portando la temperatura del bagno ad olio a 170°. Eliminato l'eccesso d'idrazina e l'acqua formatasi, si ripone *in situ* il ricadere e si riscalda per 40 ore a 200° (temperatura del bagno). Lo sviluppo d'azoto è allora terminato: si allontana per distillazione nel vuoto la maggior parte del solvente, si riprende con 100 cm³ di acqua e, neutralizzato l'alcali libero, si decolora con carbone. L'acido undecandioico

(6) CHUIT, «Helv. Chim. Acta», 9, 273 (1926).

viene precipitato con acido cloridrico e cristallizzato da benzolo. Resa g. 3,2
P. F. = 111°.

Acido 9-chetoheptadecan-1-17-dioico ed acido eptadecan-1-17-dioico. - Grammi 26 di cloruro del monoestere metilico dell'acido azelaico disciolti in 150 cm³ di etere assoluto, vengono addizionati lentamente di g 15 di trietilammina raffreddando con acqua corrente. Inizia quasi istantaneamente la separazione del cloridrato di trietilammina; dopo due giorni di riposo si filtra alla pompa e la soluzione si evapora a piccolo volume. Al residuo si aggiunge la soluzione di 25 g di idrato potassico in 150 cm³ di alcool a 90°, bollendo poi a ricadere per tre ore. Neutralizzato l'alcali libero si evapora il solvente su b. m. ed il residuo si riprende con 200 cm³ di acqua. Dopo decolorazione con carbone attivo si riprecipita il chetoacido con acido cloridrico conc. e si cristallizza da etanolo. P. F. = 115°.

L'etere metilico preparato dal chetoacido per azione del diazometano, secondo le modalità consuete, cristallizzato da benzolo-etere di petrolio, si presenta in lamelle bianche con P. F. = 60° in accordo con i dati della letteratura ⁽⁷⁾.

La riduzione del chetoacido ad acido eptadecan-1-17-dioico veniva condotta con le modalità sopra indicate ottenendo da g 5 di chetoacido g 3,1 di acido eptadecan-1-17-dioico grezzo P. F. = 115°-116° ⁽⁸⁾.

Acido 10-chetononadecan-1-19-dioico ed acido nonadecan-1-19-dioico. - In modo analogo a quanto descritto nel caso precedente, l'acido 10-chetononadecan-1-19-dioico è stato preparato dal cloruro del semiestere metilico dell'acido sebacoico. P.E. = 118° come dalla letteratura ⁽⁹⁾. La riduzione secondo Wolff-Kishner sul chetoacido ha fornito l'atteso acido nonadecan-1-19-dioico con P. F. = 118°. Il punto di fusione eseguito sulla miscela dei due prodotti ha subito una depressione di 6 gradi.

Pentadecan-2-14-dione, eptadecan-2-16-dione, ottadecan-2-17-dione, nonadecan-2-18-dione, eicosan-2-20-dione. - Per la preparazione dei dicetoni dall'acido brassilico, penta-, esa-, epta-, e nonadecandioico si seguivano modalità analoghe a quelle già descritte.

I cloruri degli acidi venivano in ogni caso usati allo stato grezzo, esponendo la distillazione a forti perdite per decomposizione, soprattutto per i termini a più alto peso molecolare.

(7) RUŽICKA, BRUGGER, SEIDEL, SCHINZ, « *Helv. Chim. Acta* », **11**, 496 (1928).

(8) P. F. = 118°-118,5 secondo Blomquist e coll., loc. cit.

(9) Quando queste ricerche erano ormai ultimate appariva una Nota di A. T. BLOMQUIST, J. R. JOHNSON, L. I. DINGUID, J. K. SCHILLINGTON e R. D. SPENCER, « *J. Am. Chem. Soc.* », **74**, 4203 (1952) nella quale si riferiva sulla preparazione degli acidi 9-cheto-eptadecan-1-17-dioico e 10-cheto-nonadecan-1-19-dioico secondo un procedimento sostanzialmente identico a quello da noi descritto. La riduzione dei chetoacidi veniva effettuata col metodo di Clemmensen che, nelle ricerche degli Autori americani forniva rese assai elevate, mentre in altri casi, come nei composti a lunga catena, il metodo di Wolff-Kishner è risultato preferibile (cfr. TODD, « *Organic Reactions* », **IV**, p. 378, Wiley (1948).

TABELLA I.

$-(CH_2)_n-$	CH ₃ -CO-(CH ₂) _n -CO-CH ₃ (1)				Bis-2-4-dinitrofenil idrazoni dei dichetoni (1)				Cl-CH ₂ -CO-(CH ₂) _n -CO-CH ₂ Cl				N ₂ CH-CO-(CH ₂) _n -CO-CHN ₂			
	ANALISI		ANALISI		ANALISI		ANALISI		ANALISI		ANALISI		ANALISI		ANALISI	
	P.F.	calc. %	trov. %		P.F.	calc. %	trov. %		P.F.	calc. %	trov. %		P.F.	calc. %	trov. %	
$-(CH_2)_9-$	—	—	—		158°	N	19,57	19,38	72-73°	Cl	25,21	25,01	—	—	—	—
$-(CH_2)_{11}-$	80°	C=74,95 H 11,74	75,03 11,79		106°	N	18,66	18,72	76°	Cl	23,46	23,71	98°	N	18,16	19,08
$-(CH_2)_{13}-$	87°	C 76,06 H 12,02	75,95 12,17		92°	N	17,83	17,71	88°	Cl	21,02	20,68	104°	N	17,49	17,59
$-(CH_2)_{14}-$	91°	C 76,54 H 12,13 E	76,71 12,01						108°	Cl	20,18	20,51	107°	N	16,75	16,54
$-(CH_2)_{15}-$	91,5°	C 76,97 H 12,24	76,81 12,11		96-97°	N	17,06	16,85					106°	N	16,08	15,91
$-(CH_2)_{17}-$	95,5°	C 77,72 H 12,42	77,79 12,58		79°	N	16,36	16,18	105°	Cl	18,02	17,75	108°	N	14,88	14,71

I bisdiazochetoni venivano trasformati in diclorochetoni per azione dell'acido cloridrico gassoso nella loro sospensione in cloroformio, qui preferibile, per il suo maggior potere solvente, all'etere usato per i termini inferiori.

Anche la riduzione dei clorochetoni a dichetoni si compiva nel solito modo per azione dello zinco in soluzione acetica.

I clorochetoni ed i dichetoni sono stati cristallizzati da benzolo-etere di petrolio 1 : 4.

I bis 2-4-dinitro-fenilidrazoni da' acido acetico e da etanolo.

Si riportano nella tabella I le caratteristiche e le analisi relative ai nuovi prodotti.

Chimica fisica. — *Cristallografia differenziale delle polveri.* — *Considerazioni sull'interpretazione delle riflessioni secondo Debye-Scherrer*^(*).
Nota I di RICCARDO FERRO, presentata ^(**) dal Socio L. ROLLA.

Il metodo dei fotogrammi delle polveri secondo Debye-Scherrer, come è noto, non richiedendo l'uso di cristalli unici, trova generale applicazione nel campo della Chimica.

Quando questo metodo venga usato a scopi analitici per riconoscere la presenza di una data fase in una sostanza il suo impiego è immediato, ma sorgono notevoli complicazioni quando lo si voglia generalmente usare nel campo della strutturalistica per studiare sostanze sconosciute.

Si osserva infatti che, dato che nella camera Debye i vari microcristalli sono disposti disordinatamente secondo orientazioni qualsiasi, non è possibile collegare in modo immediato le diffrazioni X agli assi di riferimento del cristallo, come avviene, invece, in generale per gli altri goniometri a raggi X.

Per questo motivo si può perciò dire che il problema della interpretazione delle riflessioni secondo Debye-Scherrer, il problema, cioè, della possibilità di esprimere con una unica equazione tutti i $\sin^2 \theta$ dei raggi diffratti dalla polvere cristallina o, se si preferisce, il problema della determinazione delle costanti cristallografiche della polvere stessa con il suddetto metodo, è, almeno dal punto di vista sperimentale, uno dei più complicati nel campo della cristallografia geometrica.

Queste questioni sono state affrontate e, almeno in buona parte, risolte per opera di numerosi Ricercatori che è opportuno ricordare qui.

Schiebold⁽¹⁾, Eulitz⁽²⁾ hanno descritto dei metodi grafici per l'interpretazione delle diffrazioni provenienti da sostanze cubiche, ed allo stesso scopo Pauli⁽³⁾ ha preparato uno speciale regolo, del quale quello di Bjur-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale, Laboratorio di Chimica Fisica dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) E. SCHIEBOLD, «Z. f. Phys.», 28, 355 (1924).

(2) W. EULITZ, «Z. f. Phys.», 64, 452 (1930).

(3) O. PAULI, «Z. f. Krist.», 56, 591 (1921).

ström⁽⁴⁾ (applicabile alle sostanze tetragonali ed esagonali e con qualche modificazione alle rombiche) può considerarsi un'estensione, Ebert⁽⁵⁾ ha poi eseguito un'ulteriore estensione in questa direzione costruendo un apparecchio specificamente indicato per il sistema rombico.

Fra i metodi puramente grafici è da ricordare oltre quelli di Owen e Preston⁽⁶⁾, Ewald⁽⁷⁾, quello di Hull e Davey⁽⁸⁾ eventualmente modificato secondo Schwarz e Summa⁽⁹⁾ che permette in molti casi il riconoscimento di sostanze tetragonali ed esagonali e che può essere esteso (per esempio Wilhelm⁽¹⁰⁾) anche alle rombiche.

Più recentemente, per opera per esempio di Hesse⁽¹¹⁾, Lipson⁽¹²⁾, Stosick⁽¹³⁾ sono stati sviluppati altri metodi più aritmetici che non grafici.

Nel caso dei metodi grafici l'interpretazione viene di solito fatta confrontando contemporaneamente tutte insieme le righe del fotogramma e ricercando su un grafico per quali posizioni si ha la migliore coincidenza per un alto numero di valori di $\sin^2 \theta$ osservato e calcolato (o di grandezza da esso legata); nel caso dei metodi aritmetici viene in generale studiata invece la relazione intercorrente tra il $\sin^2 \theta$ di una riflessione e quello delle altre, senza avere necessità di avere a disposizione dei grafici che ci diano tutte queste possibili relazioni.

Tutti questi sistemi operano cioè con procedimenti tipici della analisi indeterminata e se hanno il grande vantaggio di indicarci una via da seguire hanno per contro lo svantaggio di non poter indicare fra le eventuali molte soluzioni matematiche del problema quella sola che è giusta dal punto di vista cristallografico.

Questo sembra valere anche per il metodo di Ito⁽¹⁴⁾ che se concettualmente è il più potente di tutti permettendo l'interpretazione dei fotogrammi di sostanze appartenenti a qualunque sistema cristallino, sperimentalmente sembra molto laborioso se applicato a sistemi a bassa simmetria e può lasciare sempre una certa incertezza.

Questa incertezza potrà essere eliminata o comunque notevolmente diminuita se si avrà la possibilità di eseguire altre misure, se si potrà cioè aggiungere altri dati a quelli del solo fotogramma delle polveri.

(4) T. BJURSTRÖM, «Z. f. Phys.», 69, 346 (1931).

(5) EBERT, «Z. f. Krist.», 78, 489 (1931).

(6) E. OWEN, G. PRESTON, «Proc. Phys. Soc. London», 35, 101 (1923).

(7) P. EWALD, «Kristalle und Röntgenstrahlen», Julius Springer Berlin (1923).

(8) A. W. HULL, W. DAVEY, «Physic. Rev.», 17, 549 (1921) e W. DAVEY, «Gen. Electr. Rev.», 25, 564 (1922).

(9) Si veda citazione su *Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen*. II. Band. Gebrüder Borntraeger Berlin p. 670, (1935).

(10) J. WILHELM, «Trans. Roy. Soc. Canada», 21, 1 (1927).

(11) R. HESSE, «Acta Cryst.», 1, 200 (1948).

(12) H. LIPSON, «Acta Cryst.», 2, 43 (1949).

(13) A. STOSICK, «Acta Cryst.», 2, 271 (1949).

(14) T. ITO, «Nature», 164, 755 (1949). Si veda anche una discussione in proposito su *International Tables for X-Ray Crystallography* pubblicata dall'Unione internaz. di cristallografia, Kynoch Press Birmingham vol. I, p. 530, (1952).

A questo scopo viene descritto in queste Note un metodo differenziale (di confronto) per l'interpretazione dei fotogrammi delle polveri che fornendo direttamente dei dati sulla simmetria delle sostanze in questione facilita l'applicazione di uno qualunque dei metodi indicati precedentemente e permette in parecchi casi, anche da solo, di giungere al risultato voluto.

Si immagini infatti di avere a disposizione una serie di fasi isostrutturali (per esempio diversi alogenuri di uno stesso elemento, composti simili di elementi di famiglie di terre rare, diverse sostanze organiche omologhe, soluzioni solide⁽¹⁵⁾ di stessi elementi in diversi rapporti, ecc.) e di ognuna di queste sostanze si sia ottenuto il fotogramma delle polveri, facendo ora un confronto tra questi diversi film, se ne potrà tentare l'interpretazione applicando un metodo differenziale.

Nel caso che non si abbiano a disposizione diverse sostanze isostrutturali tra di loro, si potranno prendere diversi fotogrammi sulla stessa sostanza a diverse temperature, ed anche in questo caso da film a film compariranno delle differenze che saranno in relazione alle variazioni avvenute per le varie distanze reticolari, variazioni che a loro volta dipenderanno dalle direzioni cristallografiche lungo le quali avvengono con un andamento diverso e tipico per i vari sistemi cristallini.

Il fatto di ottenere diversi film a varie temperature sarà particolarmente utile nel caso che si voglia studiare una polvere cristallina non omogenea: sarà infatti difficile pretendere di trovare un'altra polvere che contenga per l'appunto varie fasi tutte isostrutturali a quelle contenute nella miscela data.

In un modo o nell'altro, comunque, possiamo dire di avere a nostra disposizione una serie di film simili (in pratica almeno due) su ognuno dei quali possiamo trovare righe Debye simili a quelle degli altri.

Da un certo punto di vista possiamo dire che il fatto di avere disponibili più film (che, riga a riga, si corrispondono l'un l'altro) è equivalente al fatto di avere un maggior numero di relazioni tra le diverse incognite, è equivalente cioè ad una diminuzione del grado di incertezza del problema in istudio.

Parecchi di questi fatti sono naturalmente impliciti in leggi cristallografiche generali, ma mi sembra ugualmente opportuno insistere per una estesa e generale applicazione dei metodi differenziali nella cristallografia; è bene perciò che le precedenti affermazioni vengano dimostrate in particolare per i vari casi possibili, e nella prossima Nota sarà discussa l'applicabilità di un metodo differenziale, basato su questi principi, nel caso dei vari sistemi cristallini.

È opportuno, intanto, fare qualche osservazione su un fatto di carattere abbastanza generale. È conveniente cioè prima di iniziare l'interpretazione del fotogramma delle polveri eseguire su di esso un rapido esame

(15) Per un caso particolare di variazioni di distanze reticolari in soluzioni solide si veda per esempio OWEN e EDMUNDS, « J. Institute Metals », 63, 301 (1938).

preliminare. Anche nel caso del metodo differenziale può essere opportuno eseguire, prima del confronto tra i diversi film, una rapida ispezione dei singoli film; questo allo scopo principalmente di poter valutare subito le difficoltà che si presenteranno nel caso in esame.

Tenendo presenti queste considerazioni è importante intanto cercare di determinare subito il numero n di parametri caratteristici per il sistema in questione ($n = 2$ per il tetragonale, 3 per il rombico, 4 per un'eventuale miscela di due tetragonali, ecc.). A questo proposito viene suggerito l'uso della seguente terna di relazioni semi-empiriche:

$$(I) \quad N = \left(\frac{q_{\max} - q_{\min}}{A_m} \right) \cdot n \cdot e$$

in cui N rappresenta il numero totale di righe Debye che appaiono sul film per valori di $\sin^2 \theta$ compresi tra q_{\min} e q_{\max} , n è il numero summenzionato e e è un numero che in prima approssimazione può essere stimato circa 0,5 per i sistemi ad alta simmetria e circa 0,7 ÷ 0,9 per gli altri, mentre A_m è una media delle varie costanti che compaiono nella forma quadratica della sostanza in questione e cioè nell'espressione:

$$(a) \quad q = \sin^2 \theta = h^2 A_1 + k^2 A_2 + l^2 A_3 + hk A_4 + hl A_5 + kl A_6.$$

La (I) può giustificarsi con le seguenti considerazioni: per una sostanza cubica la (a) diventa $q = (h^2 + k^2 + l^2) A_1$, ed i valori distinti di q (corrispondenti ad altrettante possibili righe) compresi in un certo intervallo $q_{\max} - q_{\min}$ saranno perciò $[(q_{\max} - q_{\min})/A_1] \cdot f$ in cui f sta ad indicarci che non tutti i numeri sono esprimibili come somma di tre quadrati. Tenendo conto di questo fattore aritmetico ed inoltre delle inevitabili estinzioni sistematiche che tolgono dal film un certo numero di righe, si può porre al secondo membro della (I) quel fattore e che sperimentalmente si trova aggirarsi in media intorno a 0,5; se la sostanza è invece tetragonale il numero delle possibili riflessioni e righe aumenta ed in media si trovano circa due righe per ognuna di un cubico avente una cella pressoché delle stesse dimensioni, analogamente si può considerare il caso dei sistemi a simmetria ancor più bassa; resta così giustificabile il fattore n nella (I);

$$(2) \quad A_m \leq q_{j+n} - q_j,$$

in cui i q rappresentano i valori del $\sin^2 \theta$ rispettivamente per una generica j -esima riga Debye e per la $j + n$ -esima, essendo n il solito numero da determinare. (Questa relazione può però essere applicata solo alle prime righe del fotogramma, cioè solo per θ piccoli). *

La (2) può giustificarsi nel modo seguente: se abbiamo una sostanza cubica $n = 1$ e per la (2) considereremo due righe, la differenza tra i $\sin^2 \theta$ di esse soddisfa certamente la relazione in esame. Se la sostanza è tetragonale considereremo tre righe, due di queste potranno riferirsi rispettivamente alla A_1 ed alla A_3 e la differenza tra i loro $\sin^2 \theta$ non avrà alcun particolare significato, ma la terza riga (nell'ipotesi fatta) sarà relativa ad un incremento

del q avvenuto per aggiunta, al valore del q di una delle altre due, di A_1 o di A_3 e cioè nell'intervallo delle tre righe sarà contenuta una delle costanti (si immagini infatti di considerare come tre righe la 100, e 001 e 101: in questo intervallo è contenuto la A_3), questo ragionamento può estendersi agli altri sistemi ed in media arriviamo alla (2);

$$(3) \quad A_i \leq q_x$$

ovvia relazione quando si consideri come A_i una delle costanti che compaiono nella forma quadratica (a), e q_x indichi, per i primi quattro sistemi, il valore del $\sin^2 \theta$ relativo alla più bassa riflessione osservata, mentre per gli altri sistemi rappresenti il $\sin^2 \theta$ relativo all'angolo a cui appare il primo addensamento di righe sul fotogramma.

Considerando ora la (2) solo come un'eguaglianza, e provando a risolvere la (1) e la (2) (quest'ultima possibilmente per diversi insiemi di $n + 1$ righe) per i diversi valori di n , con buona probabilità si otterrà un buon accordo solo a partire dal vero valore di n , ottenendo contemporaneamente l'ordine di grandezza di A_m . Sarà utile anche la (3) che, in casi favorevoli, potrà darci anche un'idea dei rapporti assiali (se vicini ad 1 sarà: $A_m \cong A_i$).

Chimica. — *Il problema delle aldeidi in polarografia* (*). Nota di PAUL FEDERLIN, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Tenterò in questa Nota, necessariamente limitata, di fare una messa a punto del problema delle aldeidi in polarografia.

1. PROPRIETÀ CHIMICHE. — Prima di parlare di polarografia, mi permetto di richiamare qualche proprietà chimica delle sostanze che qui interessano.

Dal punto di vista della riduzione chimica, le aldeidi aromatiche si differenziano da quelle alifatiche per la formazione facile e abbondante di glicoli bi-secondari, o pinaconi, quando vengano ridotte con l'amalgama di sodio, dunque in mezzo alcalino, dall'idrogeno nascente (la idrogenazione con amalgama può essere considerata come una elettroriduzione a contatto dell'amalgama).

Questa formazione di glicoli è particolare delle aldeidi aromatiche, che presentano pure una grande analogia di comportamento coi chetoni aromatici.

Le aldeidi alifatiche, al contrario, presentano un'altra particolarità, cioè la grande tendenza del gruppo carbonilico all'idratazione. L'idratazione dell'aldeide formica e del clorale è ben nota ai chimici organici: le soluzioni di formaldeide hanno una tensione di vapore anormalmente bassa, il clorale forma un idrato stabile e isolabile.

(*) Lavoro presentato al Corso estivo di Polarografia in Bressanone (26-27 agosto 1953). — Strasburgo, Laboratorio di Chimica Organica dell'Università.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

2. LA RIDUZIONE POLAROGRAFICA DELLE ALDEIDI AROMATICHE. - La maggior parte delle aldeidi (e dei chetoni) aromatiche presenta un comportamento identico per quel che riguarda la riduzione all'elettrodo a goccia di mercurio. Nell'intervallo di pH da 2 a 7, si osservano in generale due gradini, corrispondenti alla riduzione in due stadi, ognuno con un elettrone.

A pH più acido che 2, non si può più osservare il secondo gradino, a causa della deposizione dell'idrogeno.

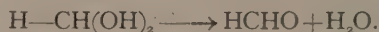
A pH più alcalino di 7, si osserva un solo gradino, che corrisponde alla riduzione con 2 elettroni. I due gradini sono fusi, perché il potenziale di semi-gradino del secondo stadio non varia col pH.

Ai pH molto elevati, l'altezza del gradino unico diminuisce fortemente fino all'altezza corrispondente alla riduzione con un elettrone. La diminuzione della corrente limite sarebbe dovuta alla dimerizzazione del radicale $RCH-O^{\cdot-}$, mentre il radicale RCH_2O^{\cdot} sarebbe incapace di dimerizzarsi. La zona di pH dove la riduzione avviene mediante 1 elettrone con la formazione di idrobenzoino, si trova a pH molto alcalino e non a pH acido. In ambiente molto acido la riduzione ad alcool benzilico, con un secondo gradino, è mascherata dalla deposizione dei protoni. I lavori più recenti svelano dunque uno schema di riduzione che coincide col meccanismo della riduzione con amalgama e con quello della riduzione preparativa.

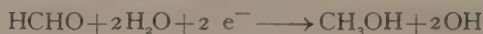
3. RIDUZIONE DELLE ALDEIDI ALIFATICHE. - Nella riduzione delle aldeidi alifatiche, l'idratazione della funzione carbonilica ha una influenza predominante; bisogna dunque verificare, dapprima, la natura delle correnti polarografiche. Le correnti sono, nella maggior parte dei casi, correnti cinetiche o a carattere cinetico predominante.

1° Le aldeidi alifatiche semplici sono state studiate a fondo e sono oggetto di numerose pubblicazioni.

Vesely e Brdička, da una parte, e Bieber e Trümpler, dall'altra, hanno mostrato che l'aldeide formica dà un gradino cinetico, limitato dalla reazione di deidratazione:



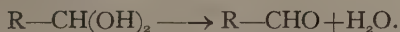
La velocità di questa reazione è influenzata da una catalisi acido-base. La corrente limite varia nel rapporto 1 : 60 quando si passa da pH 7 a pH 13 a temperatura ordinaria. Ad alta temperatura, cioè 80°, questa variazione sparisce e la riduzione avviene secondo lo schema:



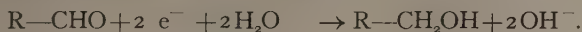
Brdička ha poi calcolato, a partire dalle equazioni cinetiche basate sulla catalisi acido-base, una curva che concorda bene con la curva sperimentale.

Le aldeidi a catena più lunga mostrano ancora una influenza dell'idratazione, ma nettamente meno pronunciata. Per esempio, per l'aldeide acetica la corrente limite varia soltanto da 1 a 3,9, quando si passa da pH 7 a pH 13.

Il meccanismo di riduzione è di difficile determinazione, poiché non si ottengono mai correnti di diffusione pure. Pertanto lo schema che illustra meglio il fenomeno è il seguente:



Questa è la reazione di deidratazione all'interfase, seguita poi dalla riduzione:



La riduzione chimica dell'acetaldeide con l'amalgama di magnesio dà pure l'alcool $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ e non il dimetilglicole.

2° Le aldeidi α -alogenate, di formula generale $\text{R}-\text{CHX}-\text{CHO}$ o RCX_2-CHO , dove X è cloro o bromo, sono state oggetto di numerosi lavori nel laboratorio del prof. Kirmann. Io ho studiato l'idratazione e la polarografia di questi composti.

La conoscenza dell'importanza dell'idratazione di queste sostanze è necessaria per comprendere le loro proprietà polarografiche. Queste sostanze sono fortemente idratate in soluzione acquosa o parzialmente acquosa.

Ho determinato la costante d'equilibrio della deidratazione



mediante misure spettrofotometriche nell'ultravioletto della banda caratteristica del gruppo carbonilico. Ho constatato così che:

- a) l'accumulo di atomi di alogeno nella molecola stabilizza la forma idrata;
- b) l'allungamento della catena degli atomi di carbonio riduce l'idratazione;
- c) gli idrati delle aldeidi cloro-sostituite sono più stabili degli idrati delle aldeidi bromo-sostituite corrispondenti.

Il comportamento polarografico di queste sostanze è strettamente legato allo stato d'idratazione, per quanto riguarda l'intensità del gradino dell'aldeide. Questo gradino ha un carattere cinetico per le aldeidi monocloro- e monobromo-sostituite con due atomi di carbonio, un carattere intermedio per quelle con quattro e sette atomi di carbonio.

Questo gradino scompare del tutto per le aldeidi di- e tri-cloroacetiche che sono fortemente idratate. Al contrario, il potenziale di semigradino della funzione aldeidica è praticamente lo stesso per tutte le sostanze studiate; Le misure sono state effettuate in soluzione acquosa in ambiente di acqua e diossano al 50 %.

Il gradino aldeidico di queste sostanze è preceduto da un gradino di potenziale più basso, dovuto all'elettroreduzione dell'alogeno.

Nel caso delle aldeidi α -monoalogenate, il carattere di questo gradino dipende pure dallo stato di idratazione, poiché l'alogeno è riducibile soltanto sotto l'influenza del gruppo aldeidico libero. Abbiamo dunque che sia il gradino aldeidico che quello alogeno dei composti monosostituiti possono presentare carattere cinetico. Sono state studiate le seguenti particolarità:

- a) il coefficiente di temperatura è generalmente molto elevato, dell'ordine del 10 % per grado e anche più;

di Andreatta sull'intero gruppo Vegaia-Tremenasca e sulla Val di Rabbi. Per ora mi limito a riportare queste notizie di Andreatta che mi ha affidato, per lo studio, alcuni campioni raccolti nella olivinite che affiora poco a nord della Malga Piazza, nel valloncetto che scende verso S. Virgilio, ad una altezza di circa 1370 m. L'olivinite in questo posto presenta piccole lenti contenenti lunghi cristalli di anfibolo actinolitico, cristalli che si possono staccare e che sono oggetto della presente Nota.

Macroscopicamente, l'olivinite è compatta, granulare, apparentemente priva di tessitura orientata dei minerali, fatta eccezione per i grossi cristalli di anfibolo che raggiungono una decina di cm di lunghezza e anche più.

Al microscopio la roccia risulta costituita, oltre che da actinoto, in prevalenza da olivina in granuli irregolari, verde-grigia, spesso fratturata, con le incrinature cementate da talco misto ad altri minerali di alterazioni. Il talco, ora lamellare e squamoso, ora fibroso-feltrato, è distribuito in tutta la roccia; in alcune zone più alterate è in quantità predominante e sempre frammisto a estese lamine di muscovite; esso forma quasi una guaina ad ogni cristallo di actinoto. Minerali di secondaria importanza sono: la biotite spesso cloritizzata, un epidoto in minute granulazioni o in rari, grossi cristalli internamente riassorbiti, magnetite ed ilmenite che cementano le fratture e le sfaldature e che nei cristalli di anfibolo esaltano la struttura a losanga tipica delle sezioni basali.

L'*actinolite*, in cristalli assai rilevanti, di dimensioni variabili da due o tre cm fino a un dm e più, ha forma prismatico-allungata, con superfici di sfaldatura fresche e inalterate ed il colore va da un verde-oliva a un verde-pallido con lucentezza madreperlacea assai vivace, quasi adamantina. Fratture e vene di talco intersecano, spesso, trasversalmente i cristalli.

Al microscopio la debole colorazione permette appena di individuare un leggero pleocroismo, secondo lo schema:

$$\alpha = \beta = \text{incolore o grigio-giallognolo}$$

$$\gamma = \text{verde-pallido.}$$

Rare sono le geminazioni polisintetiche o di due soli individui. Numerose sono le associazioni regolari con cristalli di magnetite che, in forma di bacchettine allungate, si stipano entro le superfici di sfaldatura. Talora la magnetite è molto abbondante. In alcuni cristalli di actinolite si nota un bordo di fini aciculi di anfibolo di seconda formazione, orientati parallelamente ai lati dell'elemento maggiore.

I caratteri ottici del minerale sono i seguenti: indici di rifrazione determinati con luce monocromatica (filtro Lifa n. 395-D = 586) e con una mescolanza di iodobenzolo e α -bromonaftalina:

$$\alpha = 1,618 \pm 0,002$$

$$\beta = 1,628 \pm 0,002$$

$$\gamma = 1,641 \pm 0,002$$

dai quali risulta una birifrazione massima $(\gamma - \alpha) = 0,023$; angolo di estinzione $z/\gamma = 19^\circ$; $2V$, sempre negativo, di circa 81° .

Il peso specifico, determinato col picnometro, è in media:

$$p. s. = 3,14.$$

La cernita del materiale per l'analisi chimica è stata assai semplificata dalla grandezza dei cristalli e dalla loro freschezza, tuttavia ho eseguito ugualmente l'analisi in doppio e ne riporto i valori medi assieme ai quozienti atomici ed ai rapporti fra essi, posto $O = 22$

% in peso		Quoz. atom.		
SiO ₂	57,40	Si	0,9507	7,78
Al ₂ O ₃	1,34	Al	0,0264	0,22
TiO ₂	0,18	Ti	0,0023	0,02
Cr ₂ O ₃	0,12	Cr	0,0016	0,01
Fe ₂ O ₃	0,79	Fe'''	0,0100	0,08
FeO	1,99	Fe''	0,0277	0,23
MnO	tr	Mn	—	—
MgO	22,09	Mg	0,5479	4,48
CaO	12,83	Ca	0,2288	1,86
Na ₂ O	0,72	Na	0,0262	0,21
K ₂ O	0,46	K	0,0098	0,08
H ₂ O ⁺	1,63	OH	0,1810	1,52
H ₂ O ⁻	0,25	O	2,6949	22,00
99,80				

$$z = 8,00$$

$$x = 4,82$$

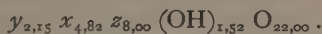
$$y = 2,15$$

Dai valori percentuali si osserva subito l'alto contenuto in silice che si avvicina al massimo teorico previsto per le actinoliti: infatti, consultando moltissime analisi riportate dal Doelter ⁽³⁾ e dal Hintze ⁽⁴⁾, ho potuto constatare che l'SiO₂ raggiunge al massimo valori che si aggirano intorno al 60%; a ciò giustamente si contrappone lo scarso valore dell'Al₂O₃ e anche del TiO₂, che nella scala delle actinoliti sembra decrescere col decrescere dell'Al₂O₃. Scarse sono le quantità di FeO e Fe₂O₃, che aumentano col diminuire della silice come ho rilevato io stessa in altre actinoliti già studiate. Il sodio e il potassio che entrano nel reticolo in relazione alla presenza di tetraedri AlO₄, dovrebbero essere in quantità più basse, ma è probabile che una piccola percentuale di sodio sia vicariante col calcio, data l'affinità dei loro raggi ionici; d'altronde, l'esperienza sulla solubilità del minerale che riporterò più sotto, con le relative analisi della parte disciolta e di quella insoluta, tolgono ogni dubbio di eventuale inesattezza analitica.

(3) DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*. Band II, 1^o teil. Dresden 1914.

(4) HINTZE, *Handbuch der Mineralogie*. Band Zweiter, Leipzig 1893.

La formula del minerale come risulta dalla precedente tabella, calcolata secondo il sistema attualmente in uso e accennato in una mia precedente Nota ⁽⁵⁾, è:



Il leggero difetto dell'aggruppamento x può essere spiegato dalla presenza di Ti, Cr, Fe^{III} in sostituzione di elementi bivalenti, mentre la presenza di potassio e sodio spiega l'eccedenza degli elementi octocoordinati. L'ossidrile è scarso, ma si conosce già da tempo la difficoltà di asportare completamente l'acqua negli anfiboli anche con temperature elevate. Inoltre è assai discusso il problema se sia l'H₂O o semplicemente l'H, che viene asportato durante la disidratazione; l'ossigeno nel secondo caso rimarrebbe nel minerale producendo ossidazioni su altri elementi.

Di notevole interesse è conoscere il comportamento dei diversi ioni di fronte al potere solvente dell'acqua.

A tal fine ho sottoposto circa 5 grammi di sostanza, grossolanamente polverizzata, a un prolungato dilavamento (per circa 20 giorni), quindi ho analizzato separatamente le acque di lavaggio e il residuo insolubile.

Mi è stato possibile pesare direttamente la somma degli ossidi portati in soluzione raccogliendo ed evaporando i filtrati del lavaggio in una capsulina di platino ed essicandoli in stufa, per la durata di 24 ore: l'ammontare di questi è risultato dello 0,96 %. Nella tabella, accanto alle percentuali delle singole parti analizzate, pongo la somma dei valori percentuali ottenuti e ripeto, quale termine di confronto, i dati analitici del minerale inalterato:

	parte disciolta		parte insoluta			minerale inalterato
SiO ₂	0,10	+	57,01	=	57,11	57,40
Triv.	0,03	+	4,72	=	4,75	4,63
MgO	0,07	+	22,15	=	22,22	22,09
CaO	0,31	+	12,21	=	12,52	12,83
K ₂ O	0,23	+	0,25	=	0,48	0,46
Na ₂ O	0,24	+	0,42	=	0,66	0,72
H ₂ O			2,45	=	2,45	1,88
	0,98	+	99,21	=	100,19	100,01
			o'' = o'''		0,21 o'' = o'''	0,21
					99,98	99,80

Rimarchevole è l'aumento dell'H₂O totale, aumento che si è costantemente verificato in tutte le mie esperienze di solubilità fino ad ora condotte su anfiboli. Escludo innanzitutto che ciò possa ascriversi alla incompleta sec-

⁽⁵⁾ C. ANDREATTA e R. PIRANI, *I minerali del gruppo dell'Ortler* - I. Actinolite e biotite di Val Madriccio. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe Sc. fis. mat. nat., vol. IX, pp. 320-324. Roma 1950.

chezza della polvere, giacché prima della determinazione dell' H_2O , ho lasciato il residuo in stufa alla temperatura di 40° per ben tre giorni. Si potrebbero avanzare diverse ipotesi a spiegazione di questo fenomeno: l'acqua potrebbe essere rimasta inglobata nei vuoti formati dall'asporto dei cationi, oppure avrebbe potuto causare un principio di idratazione nella parte più superficiale dei singoli granelli di polvere, con conseguente sostituzione di (OH) agli ossigeni del reticolo; né, infine, è da escludere che l'asporto dei cationi abbia semplicemente facilitato la liberazione degli (OH) prima saldamente legati.

In quanto ai cationi, la loro solubilità relativa risulta dalla seguente tabellina, dove sono indicati i rapporti fra le percentuali degli ossidi passati in soluzione e quelle del minerale primitivo.

SiO_2 . . .	0,174	CaO . . .	2,242
Triv. . .	0,648	K_2O . . .	50,000
MgO . . .	0,317	Na_2O . . .	33,333

Come già nell'actinolite di Val di Bresimo ⁽⁶⁾, all'elevatissima solubilità degli alcali e a quella relativa del calcio si contrappone la quasi insolubilità degli altri elementi, soprattutto della silice.

Non è stato possibile separare quantitativamente gli ossidi di alluminio, ferro e titanio; tuttavia ho accertato con sicurezza nel filtrato la presenza di Fe e Ti, quest'ultimo in minime tracce.

Fisiologia Vegetale. — *Azione inibente della florizina e della floretina sui sistemi deidrogenasici della pianta superiore*^(*). Nota di ERASMO MARRÈ, presentata^(**) dal Socio S. TONZIG.

L'impiego di inibitori metabolici per l'individuazione delle vie biochimiche condizionanti determinate funzioni va assumendo, in biologia animale come vegetale, a importanza sempre maggiore. Così, il progressivo sviluppo delle nostre conoscenze circa il metabolismo respiratorio appare in notevole misura legato alle caratteristiche di veleni specifici quali il cianuro, l'azide, l'ossido di carbonio, il dinitrofenolo; e, in campo vegetale, lo studio del meccanismo di azione delle sostanze antagoniste dell'auxina è venuto, negli ultimi anni, a costituire un capitolo a sé nell'ambito del problema maggiore del meccanismo di regolazione della crescita.

Nella grande categoria degli inibitori metabolici un posto di singolare importanza spetta alla florizina. In fisiologia animale questo glucoside è stato, fin dai tempi di Claude Bernard, ed è tuttora, oggetto di innumerevoli

(6) R. PIRANI, *I minerali del gruppo dell'Ortler*. - IV. *Antofillite e actinolite di Val di Bresimo. Solubilità di questa actinolite*. * Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei *, Classe di Sc. fis. mat., nat., vol. XIII, pp. 83-88. 1952.

(*) Dall'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

ricerche per la sua capacità di indurre una particolare forma di diabete, caratterizzata dall'incapacità dei tuboli renali di riassorbire il glucosio, in seguito al blocco, diretto o indiretto, dei meccanismi enzimatici coinvolti nella fosforilazione degli esosi. Per quanto riguarda la pianta, le poche ricerche esistenti dimostrano una chiara azione inibente del glucoside sulla crescita (plantule di grano, Marrè ⁽¹⁾, radici di granturco, Street e Lowe ⁽²⁾, coleotili di avena, Thimann e Marrè ⁽³⁾) e sul consumo di ossigeno (*Helodea canadensis*, Marrè ⁽⁴⁾). Inoltre la florizina appare dotata di un'intensa attività di stimolo sulla fotosintesi (in *Helodea* ⁽⁴⁾) forse connessa con la sua natura di composto ossido-riducibile, e di substrato di enzimi del tipo delle polifenolossidasi ⁽⁵⁾.

Circa il meccanismo biochimico di tali azioni sulla pianta mancano tuttora dati precisi. Per quanto, in particolare, riguarda la crescita, Street e Lowe hanno prospettato l'ipotesi che l'effetto inibente della florizina sia secondario al blocco dell'assorbimento di glucidi dal liquido di cultura: ipotesi peraltro contraddetta dai risultati di Thimann e Marrè sull'avena, dai quali appare come l'azione sulla distensione cellulare sia al tutto indipendente dall'assorbimento di zuccheri. Per contro, pare evidente il rapporto tra inibizione della crescita e quella dal consumo di ossigeno (per quanto i due fenomeni siano stati osservati su materiali differenti) e tale possibilità, presenta, nell'indagine sul meccanismo di azione del glucoside, una prima via di aggredibilità del problema.

Partendo da questo presupposto ho intrapreso lo studio dell'azione della florizina e dei suoi derivati sull'attività respiratoria. In questa prima Nota riferisco i risultati ottenuti con tecniche atte a mettere in evidenza, *in vivo* e *in vitro*, l'azione del glucoside e del suo aglicone sull'attività dei sistemi deidrogenasici della pianta superiore.

ESPERIENZE E RISULTATI.

A) *Azione della florizina « in vivo ».*

In queste esperienze ho utilizzato come *test* la reazione istochimica al tetrazolio, basata sulla capacità di questo composto di fungere da accettore dell'idrogeno proveniente dalla deidrogenazione enzimatica dei vari substrati respiratori.

Sezioni a fresco di frutticini di *Convolvulus* var. cult. in via di sviluppo o, in altra serie, embrioni di avena « Victory » all'inizio della germinazione venivano lavati in acqua corrente e portati in una soluzione contenente tampone ai fosfati 0,01 M, pH 7,5, cianuro di potassio 0,01 M, cloruro di trifetil-tetra-

(1) E. MARRÈ, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 26, 1304 (1950).

(2) H. E. STREET and J. S. LOWE, « Ann. Botany », 14, 307 (1950).

(3) K. V. THIMANN e E. MARRÈ, in corso di stampa.

(4) E. MARRÈ, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 26, 1302 (1950).

(5) E. MARRÈ, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 26, 1307 (1950).

zolio 1/000 e, nei saggi, florizina 0,001 e 0,003 M (concentrazioni finali). Dopo tre ore di permanenza al buio e a temperatura di circa 20°C, l'attività deidrogenasica veniva valutata dall'intensità del colore rosso sviluppatosi in seguito alla riduzione del tetrazolio. Dalla tabella I si rileva come la florizina induca, nei tessuti viventi, una netta inibizione dell'efficienza dei sistemi deidrogenasici. L'effetto è imponente per la concentrazione più elevata, minore, ma pur sempre evidente per quella inferiore. È importante osservare come le stesse concentrazioni esplichino effetti quantitativamente simili sulla crescita tanto di coleptili di avena che di embrioni di grano germinante ^(3, 7).

TABELLA I.

Attività deidrogenasica in tessuti vivi, in presenza o meno di florizina, valutata dall'intensità della reazione di riduzione del cloruro di trifeniltetrazolio.

Trattamento	Avena, embrioni	Frutti di <i>Convolvulus</i> sezioni
Controlli	Reazione intensa	Reazione intensa
Florizina 0,001 M	Reazione modesta	Reazione debole
Florizina 0,003 M	Reazione quasi nulla	Reazione nulla

B) *Azione sull'attività deidrogenasica « in vitro ».*

La determinazione dell'azione della florizina *in vitro*, cioè su estratti ottenuti dopo disintegrazione delle strutture cellulari, era suggerita dalla considerazione che l'effetto *in vivo* non costituisce, di per sé, la prova definitiva di un'azione diretta del glucoside sui sistemi enzimatici deidrogenasici, e, d'altra parte, non dà alcuna indicazione sulla diversa misura in cui le singole deidrogenasi possono essere colpite.

Gli estratti utilizzati in queste esperienze sono stati preparati tritutando in mortaio con sabbia di quarzo due-tre grammi di embrioni di avena germinante, in presenza di due-tre volumi di tampone ai fosfati 0,1 M, pH 7,6, filtrando su cotone e centrifugando per 10 m. p. a 800 giri per eliminare l'amido, le membrane, ed eventuali gruppi di cellule rimaste integre. Sull'estratto così ottenuto l'attività deidrogenasica veniva determinata in alcune esperienze col metodo colorimetrico al tetrazolio ⁽⁶⁾ in altre con quello classico di Thunberg al bleu di metilene (Umbreit et al. ⁽⁷⁾), nelle condizioni sperimentali indicate nelle tabelle. È da ricordare, nella valutazione dei risultati, che ambedue le tecniche usate determinano, più che l'attività delle singole deidrogenasi, quella di un sistema comprendente una deidrogenasi a coenzima piridinico e una flavoproteina (diaforasi ⁽⁷⁾).

(6) E. KUN and L. G. ABOOD, « Science », 109, 144 (1949).

(7) W. W. UMBREIT, R. H. BURRIS, and I. F. STAUFFER, *Manometric Techniques and Tissue Metabolism*. Minneapolis, Burgess (1949).

TABELLA II.

Attività deidrogenasica in estratti di embrioni di avena germinante in presenza o meno di substrati e di florizina. Metodo al trifeniltetrazolio. Attività in assenza di substrati aggiunti e di florizina presa come uguale a 100 e tutte le altre riferite ad essa. Condizioni della reazione: tessuto 20 %, KCN 0.005 M, cloruro di trifeniltetrazolio 1/1000, substrato, quando aggiunto, 0,05 M (concentrazioni finali). Temperatura 35° C, tempo di reazione 6 ore.

Substrato	Attività deidrogenasica							
	Senza inibitore		Florizina 0,001 M			Florizina 0,003 M		
	Totale	Dovuta al substrato	Totale	Dovuta al substrato	Inibizione	Totale	Dovuta al substrato	Inibizione
Estratto	100	—	56	—	44 %	25	—	75 %
Estratto Gl. 6-P.	227	127	133	80	37 %	50	25	80 %
Estratto Fr. 1-6-P	184	84	80	24	72 %	31	6	83 %
Estratto Piruvato	181	81	64	8	90 %	29	4	95 %
Estratto Citrato .	131	31	80	24	22 %	42	17	45 %
Estratto Succinato	173	73	164	48	34 %	64	39	46 %
Estratto Alcool .	150	50	72	12	66 %	33	8	84 %

I dati della tabella II, ottenuti mediante il metodo al tetrazolio, dimostrano l'intensa azione inibente della florizina sull'attività deidrogenasica *in vitro*, e come detta azione vari per i diversi substrati impiegati, ciò che presumibilmente significa che varie sono le deidrogenasi sensibili al glucoside. L'effetto inibente risulta massimo in presenza di piruvato, rilevante per il glucosio-6-fosfato, il fruttosio 1-6 fosfato e l'alcool: relativamente modesto per il succinato e il citrato: senonché i dati relativi a questi due substrati appaiono incerti, in conseguenza della limitata attività, nei nostri estratti, anche in assenza di florizina, delle deidrogenasi interessate e della natura non troppo sensibile della tecnica al tetrazolio ⁽⁶⁾. In assenza di substrati aggiunti si osserva ancora una notevole attività, evidentemente esplicantesi a carico di substrati inizialmente presenti nel tessuto. Tale attività endogena risulta, essa pure, decisamente inibita dalla florizina.

Le esperienze della tabella III forniscono la conferma, ottenuta, mediante la tecnica di Thunberg, dei risultati ottenuti col metodo al tetrazolio. Anche qui l'effetto del glucoside appare massimo in presenza di piruvato, minore, ma pure cospicuo, quando solo i substrati endogeni siano presenti.

TABELLA III.

Attività deidrogenasica in presenza e assenza di piruvato e di florizina. Metodo di Thunberg: l'attività deidrogenasica è inversamente proporzionale al tempo di decolorazione. Composizione dell'incubato come alla tabella precedente, salvo l'assenza del tetrazolio e la presenza di bleu di metilene 1/10.000.

Trattamento dell'estratto	Tempo di decolorazione in minuti primi
Estratto solo	10
» Florizina 0,001 M	19
» Piruvato 0,05 M	26
» » » Floriz. 0,001 M .	85
» » » Floriz. 0,003 M .	125

C) Azione della floretina.

La florizina, nei tessuti come negli estratti, può essere trasformata variamente e agire quindi anche, o esclusivamente, attraverso i suoi derivati. Una delle reazioni degradative più probabili appare quella idrolitica, liberante glucosio e floretina. Ho quindi studiato l'azione dell'aglicone, preparato dal glucoside mediante idrolisi in HCl 0.2N a 100°C per 15 m. p. e successiva precipitazione per raffreddamento della floretina, pressoché insolubile. L'effetto della floretina sull'attività deidrogenasica *in vitro* è risultato (Tabella IV) nettamente superiore (7-10 volte) a quello del glucoside intero. Il dato, mentre si inquadra nel concetto generale della minore attività dei glucosidi rispetto i loro agliconi, non esclude però la possibilità di un'azione diretta, seppur più blanda, della florizina in quanto tale. Su questo argomento, come in genere su quello dell'azione fisiologica dei derivati della florizina, intendo peraltro ritornare in una prossima Nota.

CONCLUSIONI. - Agli effetti del problema propostoci nella presente ricerca, e cioè del meccanismo dell'azione della florizina sulla respirazione e sulla crescita, i risultati delle esperienze sopra descritte possono così riassumersi:

I. La florizina inibisce, *in vivo* come *in vitro*, l'attività dei sistemi deidrogenasici. L'inibizione, pur variando per le diverse deidrogenasi, risulta notevole con tutti i substrati usati, come pure per quelli naturalmente presenti nei tessuti.

II. Esiste, per una data concentrazione dell'inibitore, una stretta corrispondenza tra azione sulle deidrogenasi, *in vivo* o *in vitro*, e l'effetto sul consumo di ossigeno e sulla crescita, quali sono stati osservati in precedenti ricerche.

III. L'aglicone della florizina, la floretina, esplica sull'attività deidrogenasica un'azione qualitativamente analoga, ma quantitativamente molto più intensa di quella della florizina stessa.

TABELLA IV.

Confronto fra l'azione della floretina e quella della florizina sull'attività deidrogenasica, misurata col metodo di Thunberg. Condizioni di esperienza come alla tabella precedente.

Trattamento dell'estratto	Tempo di decolorazione in minuti primi
Estratto Piruvato 0,05 M	21
» » » » Florizina 0,0003 M.	56
» » » » Florizina 0,0001 M.	28
» » » » Floretina 0,0001 M.	66

L'inibizione, largamente aspecifica, dei sistemi deidrogenasici, offre una ovvia spiegazione dell'effetto della florizina sul consumo di ossigeno. Lo stesso sembra possa dirsi per quanto riguarda la crescita: infatti, che l'inibizione delle deidrogenasi sia condizione sufficiente per quella dell'accrescimento risulta dall'essere le stesse concentrazioni minime attive nei due casi, e, d'altro lato, dall'ormai ben nota azione anti-crescita di sostanze tipicamente inibenti l'attività delle deidrogenasi, quali il fluoruro, l'iodoacetato (Christiansen e Thimann ⁽⁸⁾) l'arseniato (Bonner ⁽⁹⁾) il cloroacetato (Thimann ⁽¹⁰⁾). Pare quindi possa concludersi che l'effetto della florizina e del suo aglicone sulla crescita deriva direttamente dalla sua azione di blocco su qualche sistema deidrogenasico coinvolto in modo essenziale nei processi di accrescimento.

E qui si prospetta una possibilità che, se confermata, pare suscettibile di ampi sviluppi: possibilità suggerita, oltre che dai risultati di cui sopra, dalla considerazione della natura chimica dell'inibitore in questione.

L'aglicone della florizina, così attivo sulle deidrogenasi, risulta dall'unione della fuoroglucina con l'acido floretinico: ma questo altro non è che l'acido para-idrossi-fenilpropionico, o acido idrossi-idro-cinnamico, o acido di-idro-cumarico: in altri termini un composto che fa parte, con pieno diritto, del gruppo delle sostanze capaci di esplicare, nei riguardi dell'auxina, un'azione di inibizione competitiva (Thimann ⁽¹¹⁾). Alla luce di un tale accostamento la localizzazione biochimica dell'azione della florizina sulla crescita assume un significato suggestivo per le possibili conseguenze che esso prospetta nei riguardi del problema del meccanismo attraverso cui auxine e antiauxine esplicano la loro azione.

(8) G. G. CHRISTIANSEN and K. V. THIMANN, « Arch. Bioch. », 28, 117 (1950).

(9) J. BONNER, « Plant Phys. », 25, 181 (1950).

(10) W. D. BONNER and K. V. THIMANN, « Am. J. Bot. », 37, 66 (1950).

(11) K. V. THIMANN, in F. SKOOG, *Plant Growth Substances*. Univ. of Wisconsin Pres. (1951).

Biologia (Biochimica). — *L'acido citrico in relazione al calcio ed al fosfato inorganico nelle calcificazioni patologiche.*^(*) Nota di PAOLO BUFFA e LUCIANO COLAJANNI, presentata^(**) dal Socio G. VERNONI.

Nel 1952 uno di noi⁽¹⁾ ha trovato che nelle calcificazioni patologiche umane è contenuto acido citrico in concentrazioni considerevoli, molto superiori a quelle dei tessuti di origine delle lesioni calcificate e del medesimo ordine di quelle trovate da altri⁽²⁾ nel tessuto osseo e in altre strutture calcificate.

Le calcificazioni patologiche analizzate provenivano da processi morbosi i più disparati per natura e sede, processi infiammatori (tubercolosi, endocardite ecc.), tumorali (fibroma uterino), degenerativi (arteriosclerosi) ecc., e da organi e tessuti diversi per struttura, funzione e attività metabolica.

Dalla serie di calcificazioni patologiche analizzate risultava che l'ac. citrico è un loro costituente costante, tuttavia le concentrazioni variavano molto da caso a caso perché erano riferite al peso del tessuto umido e questo, evidentemente era calcificato in misura diversa.

Allo scopo di ottenere maggiori informazioni sul significato dell'ac. citrico nelle calcificazioni patologiche si è ora titolato il fosfato inorganico, l'ac. citrico ed il calcio *sul medesimo* frammento di tessuto calcificato per vedere se esiste un rapporto molecolare costante tra l'ac. citrico il fosfato inorganico ed il calcio, come esiste tra questi due costituenti minerali. Inoltre la stessa analisi è stata fatta su alcune lesioni arteriosclerotiche dell'aorta che spesso divengono sede di depositi calcarei, per indagare gli eventuali stadi iniziali della calcificazione.

MATERIALE E TECNICA. — Anche per questa ricerca il materiale è stato molto gentilmente fornito dall'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Roma e proveniva da individui deceduti da 24-48 ore. Per il trattamento dei tessuti da analizzare e le titolazioni si è seguita la tecnica descritta in⁽³⁾ con le seguenti lievi modifiche. Il materiale, appena ottenuto dalla sala incisoria, non veniva congelato con anidride carbonica solida poiché, evidentemente, i cambiamenti biochimici post-mortali nei residui viventi di tessuto avevano avuto tutto il tempo di avvenire; esso era invece rapidamente sezionato, pesato ed estratto con acido tricloroacetico all'8% (p/v) in stanza fredda a 0-20° C per ridurre la scissione idrolitica dell'acido fosforico da suoi derivati eventualmente presenti nei tessuti. Il peso delle placche calcifiche era compreso tra 19 e 93 mg., quello dei frammenti di tessuto variamente o non calcificati da 109 a 1592 mg. Il volume finale dell'estratto tricloroacetico era 50 ml. Per la titolazione del fosfato inorganico quando il pezzo da analizzare era una placca calcifica questo estratto veniva diluito fino a 10 volte, sempre con acido triclo-

(*) Dal Centro di Studio per la Fisiopatologia del C.N.R. e dall'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) P. BUFFA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XII, fasc. 3, p. 356 (1952).

(2) Vedi P. BUFFA, *ibid.*, vol. XIII, fasc. 6, p. 418 (1952).

(3) P. BUFFA e L. COLAJANNI, « Giornale di Biochimica », 2, 301 (1953).

roacetico all'8 % freddo. Per la titolazione del calcio, a seconda dei casi, o si usavano direttamente aliquote fino a 10 ml di estratto iniziale o diluito, o si concentravano aliquote superiori a 10 ml dell'estratto iniziale. Per la misurazione della densità ottica delle soluzioni di titolazione del fosfato inorganico e dell'ac. citrico si usava uno spettrofotometro Coleman mod. 14. Tutti i risultati sono la media delle determinazioni su due campioni separati. Talvolta non fu possibile analizzare subito il materiale, allora si conservarono a -10°C i frammenti pesati, anche per alcuni giorni, fino al momento delle titolazioni. I risultati sono espressi in mg di Ca, di P (fosfato inorganico) e di ac. citrico anidro per g di materiale umido.

IL METODO DI STUDIO. — Le calcificazioni patologiche contengono quantità molto variabili di acqua, di materiale proteico e probabilmente mucopolisaccarideo così che se si usano frammenti diversi, anche apparentemente simili, della medesima lesione calcificata per l'analisi dei diversi componenti, non si ottengono risultati che possono essere messi in relazione tra loro. Pertanto abbiamo elaborato un metodo, già applicato in un'altra ricerca ⁽³⁾, per determinare il fosfato inorganico, l'ac. citrico ed il calcio sul medesimo campione di materiale.

Vari risultati di analisi del calcio e del fosforo nelle calcificazioni patologiche riportati in letteratura furono ottenuti da materiale fissato e conservato [vedi per esempio ⁽⁴⁾]; ora in genere i liquidi usati per la fissazione e la conservazione dei tessuti sono di composizione tale da non fare escludere la presenza in essi di acidi o di altri solventi di componenti dei depositi calcarei. Per evitare questa possibile causa di errore noi abbiamo usato sempre materiale non trattato con alcun liquido. Inoltre l'analisi del calcio e del fosforo viene di norma condotta previo incenerimento a secco e a umido del campione, ciò che non consente di discriminare il fosforo legato al calcio (e ad altri cationi) come fosfato da quello presente in altri composti (esteri fosforici, fosfoproteine ecc.) eventualmente presenti nel tessuto calcificato.

Il metodo dell'estrazione a freddo del materiale con acido tricloroacetico da noi seguito consente di determinare il contenuto totale del calcio, quello del fosfato inorganico in presenza di altri composti fosforati e quello dell'ac. citrico sul medesimo campione di materiale umido e quindi di ottenere risultati che possono essere messi tra loro in relazione. Purtroppo questo metodo non consente la titolazione contemporanea anche del carbonato, che pure sarebbe utilissima, poiché la determinazione di questo componente (misurazione dell'anidride carbonica sviluppata dal campione a contatto con l'ac. tricloroacetico) altera i risultati di quella del fosfato inorganico. Infatti il prolungato contatto con l'acido a temperatura ambiente o superiore, necessario per titolare il carbonato, produce inevitabilmente l'idrolisi di composti fosforati eventualmente presenti nel campione.

Nella valutazione dei risultati bisogna tenere conto che il materiale era analizzato 24-48 ore dopo la morte del paziente. È molto probabile che nelle placche calcifiche e nelle lesioni abbondantemente calcificate i cambiamenti

(4) DOROTY R. MEEKER e H. D. KESTEN, *J. biol. Chem.*, **113**, 289 (1936).

di composizione post-mortali siano minimi e pertanto riteniamo che i risultati in questi casi possono essere considerati corretti per tutti e tre i componenti analizzati. Per le lesioni apparentemente non calcificate solo i risultati della analisi del calcio sono sicuramente corretti; quelli del fosfato inorganico sono probabilmente più alti a causa della scissione enzimatica e spontanea di composti labili dell'ac. fosforico eventualmente presenti nel tessuto, mentre per l'ac. citrico i dati sono incerti e devono anche essere accettati con riserva in considerazione del fatto, dimostrato da Buffa e Peters ⁽⁵⁾, che l'ac. citrico accumulato nel cuore del ratto intossicato con fluoroacetato, diminuisce rapidamente dopo la morte dell'animale.

RISULTATI. - I risultati sono riportati nella tabella I e riguardano sia il materiale calcificato sia quello apparentemente non calcificato.

1. *Materiale calcificato.* - Questa seconda serie di analisi conferma pienamente la prima ⁽¹⁾ poiché in tutti i casi di calcificazioni patologiche analizzate si è trovato l'ac. citrico in concentrazioni notevoli. Pertanto si può affermare che l'ac. citrico è un componente costante delle calcificazioni patologiche, come lo è dell'osso.

Se si considera il rapporto molecolare ac. citrico: P:Ca si rileva 1° che esso non è costante (il campo di variazione del rapporto ac. citrico: Ca è compreso tra 1:153 e 1:438, mentre quello ponderale Ca:P rimane pressoché costante); 2° che, nella serie di placche calcifiche arteriosclerotiche aortiche, esso appare indipendente dall'età e dal sesso, ma significativamente diverso in relazione alla sede della placca calcifica; infatti per le placche della porzione dell'arco il rapporto medio ac. citrico: P:Ca è 1:86:140, mentre per quelle della porzione addominale è 1:105:200 (i rapporti medi Ca:P sono rispettivamente 2,48 e 2,47); 3° che, nella serie di calcificazioni dell'*anulus fibrosus* della valvola mitrale cardiaca sembra che, parallelamente all'aumento dell'età, aumenti il grado di calcificazione del tessuto e aumenti pure la quantità del calcio e del fosfato inorganico rispetto a quella dell'ac. citrico.

Per quanto riguarda il rapporto ponderale Ca:P esso è in media 2,51 con un campo di variazione da 2,28 a 2,70 (il caso 13 B è stato escluso dal computo per la presenza di una grande quantità di materiale necrotico nel campione analizzato). Questo rapporto è del medesimo ordine di quello trovato da altri ^(6,7,8); la differenza tra 2,51 e 1,94, che è il rapporto Ca:P del fosfato tricalcico (il « sale osseo » ritenuto il componente principale anche dei depositi calcarei patologici) è da attribuirsi in parte alla notevole quantità di carbonato di calcio presente nelle calcificazioni patologiche ⁽⁹⁾, in parte al

(5) P. BUFFA e R. A. PETERS, « J. Physiol. », **110**, 488 (1949).

(6) B. KRAMER e M. J. SHEAR, citato da D. P. BARR, « Physiol. Rev. », **12**, 593 (1932).

(7) W. BAUER *et al.*, *ibid.*

(8) R. FONTAINE *et al.*, « Rev. orthop. », **36**, 3 (1950).

(9) H. WURM, citato da D. P. BARR, « Physiol. Rev. », **12**, 593 (1932).

fatto che, con il nostro metodo di analisi, non si titola il P totale, ma solo quello del fosfato inorganico.

2. *Materiale apparentemente non calcificato.* — Il piccolo numero di casi analizzati indica che non sembrano esservi differenze sostanziali di contenuto del calcio, del fosfato inorganico e dell'ac. citrico tra i vari tipi di lesioni arteriosclerotiche aortiche apparentemente non calcificate, pur essendo questi tre componenti spesso aumentati rispetto all'aorta normale. Tuttavia questi risultati dimostrano, in accordo con quello ottenuto sulla calcificazione renale da uranio nel ratto ⁽³⁾, che la calcificazione patologica non si attua lentamente, ma che — una volta realizzatesi localmente le condizioni adatte — essa avviene rapidamente.

SUL SIGNIFICATO DELL'ACIDO CITRICO NELLE CALCIFICAZIONI. — Malgrado siano già trascorsi 13 anni dalla scoperta di Dickens ⁽¹⁰⁾ che l'ac. citrico costituisce dall'1 al 2% in peso del tessuto osseo e malgrado che questo acido sia stato susseguentemente trovato in quantità variamente notevoli in parecchie altre strutture animali calcificate ⁽²⁾, pure il suo significato è ancora oscuro ⁽¹¹⁾.

Recentemente Hendricks e Hill ⁽¹²⁾ hanno affermato che esso non si troverebbe nell'interno del reticolo cristallino dell'apatite ossea, ma sarebbe situato, insieme ad altri componenti come il carbonato ecc., sulle superfici del reticolo stesso. In seguito Hendricks ⁽¹³⁾ ha precisato ulteriormente che questi componenti ossei, con la loro disposizione superficiale rispetto al reticolo cristallino, determinerebbero l'accrescimento dei cristalli di apatite.

In conclusione questi autori si limitano a precisare la localizzazione dell'ac. citrico nel « sale osseo » e a indicare il suo significato per l'accrescimento dei cristalli di apatite dell'osso.

Mentre non siamo in grado di esprimere alcun giudizio sulle vedute puramente cristallografiche di questi autori sull'ac. citrico osseo, riteniamo che alcuni fatti noti sull'osso e quelli da noi trovati sulle calcificazioni patologiche (che hanno una composizione simile a quella dell'osso per quanto riguarda il calcio ed il fosforo, cioè i costituenti fondamentali del « sale osseo »), siano a favore dell'ipotesi, già avanzata da uno di noi ^(1,2), che l'ac. citrico intervenga nei primi stadi della calcificazione sia dell'osso sia delle calcificazioni patologiche. Tali fatti sono la maggiore concentrazione relativa dell'ac. citrico trovata nell'osso dell'embrione di pollo rispetto all'osso dell'animale adulto ⁽¹⁴⁾ e la decrescente quantità di ac. citrico, rispetto a quella

(10) F. DICKENS, « Chem. and Ind. », 59, 135 (1940) e « Biochem. J. », 35, 1011 (1941).

(11) Vedi « Trans. Macy Conference on Metabolic Interrelations », 2, pp. 71 e 112 (1950).

(12) S. B. HENDRICKS e W. L. HILL, « Trans. Macy Conference on Metabolic Interrelations », 3, 173 (1951).

(13) S. B. HENDRICKS, *ibid.*, 4, 185 (1952).

(14) Riportato da M. J. DALLEMAGNE, « J. Physiologie », 43, 425 (1951).

Caso	Sesso e età (anni)	PARTE ANALIZZATA
<i>Materiale calcificato.</i>		
AORTA ⁽¹⁾ .		
5 C	F, 68	Porzione dell'arco, placca calcifica
5 D	»	» » » »
5 E	»	» » » »
5 F	»	» » » »
10 A	M, 90	» toracica, » »
5 B	F, 68	» addominale, » »
8 A	F, 70	» » » »
9 A	»	» » » »
12 A	F, 80	» » » »
13 D	M, 75	» » » »
ARTERIE ILIACHE COMUNI ⁽¹⁾		
3 A	M, 60	Porzione iniziale, placca calcifica
5 A	F, 68	» » » »
11 B	M, 68	» » » »
CUORE.		
6 A	F, 37	Valvola mitrale, <i>anulus fibrosus</i> calcificato
7 A	F, 41	» » » »
13 C	M, 75	» » » »
16 A	F, 84	» » » »
PLEURA ⁽²⁾ .		
2 A	M, 64	Placca calcifica ⁽³⁾
MILZA ⁽²⁾ .		
13 A	M, 75	Capsula, placca calcifica.
13 B	»	» zona necrotico-calcarea
<i>Materiale apparentemente non calcificato.</i>		
AORTA, LESIONI ARTERIOSCLEROTICHE.		
12 C	F, 80	Porzione dell'arco, placca mucoido-fibrosa
11 A	M, 68	» addominale, » »
16 B	F, 84	» toracica, » fibrosa.
18 B	M, 50	» » » »
3 B	M, 60	» addominale, » »
14 A	F, 60	» » » »
15 A	F, 55	» » » »
17 A	M, 56	» » » »
5 G	F, 68	» » » fibroso-lipoidotica
11 C	M, 68	» toracica » ateromatosa
18 A	M, 50	» » » »
12 B	F, 80	» dell'arco, ulcera ateromatosa
4 A	M, 60	» toracica, » »
11 D	M, 68	» addominale, » »

(1) Lesioni arteriosclerotiche.

(2) Lesioni di origine infiammatoria.

(3) All'esame istologico non risultava alcun

TABELLA I.

mg/g di materiale umido			Ca : P	Rapporto molecolare
Calcio	Fosforo	Ac. citrico		Ac. citr. : P : Ca
97,62	118,10	9,00	2,60	1 : 81 : 164
93,54	115,40	7,85	2,28	1 : 91 : 161
67,86	113,40	7,74	2,36	1 : 91 : 166
84,47	105,30	8,03	2,70	1 : 81 : 170
17,55	126,88	9,33	2,51	1 : 84 : 164
77,92	110,70	6,73	2,51	1 : 101 : 198
32,87	94,05	6,69	2,48	1 : 87 : 167
30,21	135,86	7,86	2,44	1 : 107 : 202
77,59	111,12	6,23	2,49	1 : 110 : 214
87,81	118,07	5,99	2,43	1 : 122 : 231
49,69	107,10	7,03	2,33	1 : 94 : 170
58,33	104,70	8,42	2,56	1 : 77 : 153
56,42	109,46	8,99	2,35	1 : 75 : 137
77,25	67,60	5,01	2,62	1 : 83 : 170
25,45	42,44	2,60	2,49	1 : 101 : 195
97,10	101,74	4,36	2,63	1 : 144 : 294
98,60	113,20	3,40	2,64	1 : 206 : 422
46,60	204,80	5,90	2,67	1 : 212 : 438
79,45	109,35	5,94	2,55	1 : 114 : 226
26,91	17,43	0,64	1,54	1 : 167 : 200
4,71	2,09	0,18	2,26	1 : 73 : 127
7,27	2,97	0,20	2,45	1 : 93 : 177
2,57	1,29	0,05	1,99	1 : 158 : 246
2,39	1,26	0,06	1,89	1 : 127 : 184
2,18	0,82	0,22	2,66	1 : 22 : 46
1,14	0,45	0,06	2,56	1 : 51 : 85
1,36	0,73	0,04	1,86	1 : 104 : 154
0,63	0,92	0,07	0,68	1 : 83 : 43
21,23	8,73	0,59	2,44	1 : 91 : 172
3,75	1,69	0,18	2,22	1 : 58 : 101
2,12	0,99	0,05	2,14	1 : 114 : 186
6,99	2,72	0,23	2,57	1 : 73 : 146
0,97	0,56	0,38	1,73	1 : 9 : 12
2,62	1,12	0,10	2,34	1 : 72 : 130

del fosfato inorganico e del calcio, trovata nell'*anulus fibrosus* della valvola mitrale cardiaca col progredire della calcificazione. Inoltre, a sostegno di questa ipotesi vi è la nostra osservazione ⁽³⁾ che, nella corteccia renale del ratto intossicato con nitrato di uranile, in un caso di calcificazione istologica iniziale si è trovata una notevole quantità relativa di ac. citrico. Infatti il rapporto ac. citrico: P: Ca risultava 1:90:63, cioè molto più elevato di quello trovato nelle calcificazioni patologiche non iniziali.

Allo stato attuale non siamo in grado di spiegare la differenza di composizione tra le placche calcifiche arteriosclerotiche dell'arco e quelle della porzione addominale dell'aorta.

Ringraziamo vivamente il prof. G. Bompiani direttore dell'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Roma ed il prof. A. Ascenzi per il materiale autopsico.

Biologia. — *Osservazioni spettrofotometriche sull'ooite in crescita di « Antedon rosacea »* Lamarck ^(*). Nota II di ENRICO URBANI, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

A continuazione della serie di lavori sulla fascia vitellogena di *Antedon rosacea* e sui nuclei vitellini di numerose specie animali ho riportato in una precedente Nota (1953) ⁽¹⁾ i risultati ottenuti con l'analisi fotometrica di oociti in crescita di *Antedon* colorati con azzurro A. Come è noto dai lavori di Pollister (1950) ⁽²⁾ questo colorante presenta una elevata specificità per gli acidi nucleici e poiché negli oociti in crescita non è presente DNA, le colorazioni che si ottengono possono essere attribuite a RNA. La fotometria di sezioni di oociti in vari stadi di accrescimento ha mostrato che la fascia vitellogena presenta un tenore in RNA superiore a quello del citoplasma; le misure quantitative hanno perciò confermato quanto avevo visto qualitativamente e danno la maggiore attendibilità alla ipotesi originaria di Cotronei (1910, 1911) ⁽³⁾ che la fascia vitellogena è costituita da una sorta di condensazione di sostanze basofile. Vannini (1951) ⁽⁴⁾ con un metodo diverso da quello da me impiegato è giunto ad eguale conclusione, che cioè nella fascia vitellogena si trova la maggior concentrazione di ribonucleoproteine citoplasmatiche. Nella precedente Nota, a conclusione dei risultati avuti, prospettavo l'utilità di una continuazione delle osservazioni facendo uso

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con un contributo del C.N.R. Ringrazio la Dr. M. L. Zacchei per la collaborazione nell'allestimento dei preparati.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) E. URBANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 14, 558 (1953).

(2) A. W. POLLISTER, « Rev. d'Hématologie », 5, 527 (1950).

(3) G. COTRONEI, « Boll. Soc. Nat. Napoli », 24, 155 (1910) e « Arch. Zool. », 5, 41 (1911).

(4) E. VANNINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 10, 256 (1951).

di altri coloranti adatti allo studio istochimico delle ribonucleoproteine: in questo lavoro sono esposti i dati ottenuti con la progettata estensione delle osservazioni.

Come è noto il metodo fotometrico consiste nella misura della quantità di luce assorbita dall'oggetto da analizzare: quando l'analisi è fatta in luce monocromatica si parla di spettrofotometria. La spettrofotometria, mezzo di indagine di alta utilità e precisione nella fisica, nella chimica e nella biochimica, offre il fianco a serie critiche quando viene impiegata su scala microscopica per l'esame anziché di un liquido o di una soluzione contenuta in una provetta, di una zona cellulare di una sezione incolore o colorata di tessuto (Ornstein, 1952)⁽⁵⁾. Numerosi sono i fattori che possono incidere su una interpretazione quantitativa espressa in valori assoluti anche perché è discussa l'applicabilità della legge di Beer-Lambert alle sezioni istologiche. Poiché lo spazio non permette un esame del problema che pure sarebbe di grande interesse, rinvio al Trattato di Lison (1953)⁽⁶⁾ dove si trova una ottima revisione critica, dell'argomento. Così per le precisazioni tecniche e critiche della fotometria in campo citologico rimando, tra la numerosa letteratura, ai lavori di Caspersson e Coll. (1950)⁽⁷⁾ per le osservazioni in luce ultravioletta e a quelli di Pollister (1952)⁽⁸⁾ di Vialli (1950)⁽⁹⁾ e di Pasteels e Lison (1950)⁽¹⁰⁾ per le osservazioni nel visibile.

Gli apparecchi usati da questi Autori consistono tutti, in linea generale, in un microscopio che viene illuminato con luce monocromatica e l'immagine del preparato citologico è proiettata su di uno strumento che permette di misurare la quantità di luce assorbita da una determinata struttura cellulare, sia perché in quella struttura esistono sostanze opache ad una certa lunghezza d'onda (acidi nucleici e alcune proteine nell'ultravioletto), sia perché la cellula è stata trattata con coloranti o reagenti che presentano affinità per certi composti chimici (Feulgen, bleu di toluidina, verde di metile, Millon, ecc.). Lo strumento che permette la misura della luce assorbita può essere una fotocellula o una lastra fotografica, come nell'apparecchio di De Lerna (1940)⁽¹¹⁾ che ha consentito a questo A. originali studi sulla fluorescenza. Recentemente anche Ghiara (1953)⁽¹²⁾ con l'apparecchio di De Lerna, ossia con la registrazione degli spettri su lastra fotografica, ha dimostrato con un serio ed interessante studio sulla metacromasia degli acidi nucleici che si può operare con risultati positivi a livello del nucleolo e dello ergastoplasma di cellule ghiandolari.

I risultati già pubblicati (1953)⁽¹⁾ erano stati ottenuti con un apparecchio ispirato ai tipi di Pollister e Ris (1947)⁽¹³⁾ e di Lison (1950)⁽¹⁴⁾ e che utilizzava la luce bianca o solamente delle bande dello spettro ottenibili con l'interposizione tra la sorgente luminosa ed il microscopio di un filtro. Così le determinazioni sulle sezioni di oociti colorati con azzurro A furono eseguite con luce bianca e controllate con la luce rossa trasmessa dal filtro PC5 dello spettrofotometro Coleman. Il dover lavorare con luce bianca o con la luce monocromatica fornita da un filtro costituisce un inconveniente quando si è in presenza di colorazioni molto deboli e delle quali si ignora a quale lunghezza d'onda si trovi il massimo di estinzione oppure che presentino due picchi di estinzione. Per questo motivo ho ulteriormente modificato l'apparecchio costruendone un tipo che ritengo meriti una sia pur sommaria descrizione.

(5) L. ORNSTEIN, *Lab. Invest.*, **1**, 250 (1952).

(6) L. LISON, *Istochimie et cytochimie animales*, Gauthier et Villars 1953.

(7) T. CASPERSSON, *Cell Growth and Cell Function*. W. W. Norton & Co. N. Y. 1950.

(8) A. W. POLLISTER, «*Lab. Invest.*», **1**, 231 (1952).

(9) M. VIALLI, «*Mon. Zool. Ital.*», Suppl. vol. 60 (1952).

(10) J. PASTEELS e L. LISON, «*Arch. de Biol.*», **61**, 445 (1950).

(11) B. DE LERMA, «*Boll. Soc. Nat. Napoli*», **51**, 17 (1940).

(12) F. GHIARA, «*Ricerca Scientifica*» (vol. Conv. di Genetica), **23**, 137 (1953).

(13) A. W. POLLISTER e H. RIS, «*Cold Spring Harb. Symp.*», **12**, 147 (1947).

(14) L. LISON, «*Acta Anatomica*», **10**, 333 (1950).

Esso consta (fig. 1) di un normale microscopio (M) il quale è stato sistemato su di uno spettrofotometro Coleman (C) in modo che la luce del monocromatore, cadendo su di uno specchio (S_1) (sistemato nell'interno di C, al posto della sede per i filtri) viene riflessa attraverso l'apertura del portavaschette (che viene tolto), traversa l'ottica del microscopio e per mezzo di un secondo specchio (S_2) posto sopra l'oculare viene inviata su di uno schermo in compensato che porta al centro un foro di 1,5 mm. Dietro il foro (come nell'apparecchio di Lison) si trova un fotomoltiplicatore elettronico (C.F.) 931 A RCA. Sarebbe interessante parlare a lungo di questi fotomoltiplicatori che rappresentano il più recente perfezionamento nel campo delle cellule fotoelettriche ma lo spazio non lo permette. La corrente che il 931 A è capace di emettere anche con luce debolissima non necessita di amplificazione e può essere inviata direttamente ad un galvanometro, che nel mio caso è quello a riflessione del Coleman. L'uso dei fotomoltiplicatori è indispensabile soprattutto quando si debbano fotometrare aree cellulari di 1 o 2 micron quadrati ed il loro impiego non è difficile se le condizioni di alimentazione sono state accuratamente realizzate. Essi necessitano di una tensione continua di 70-90 volts per

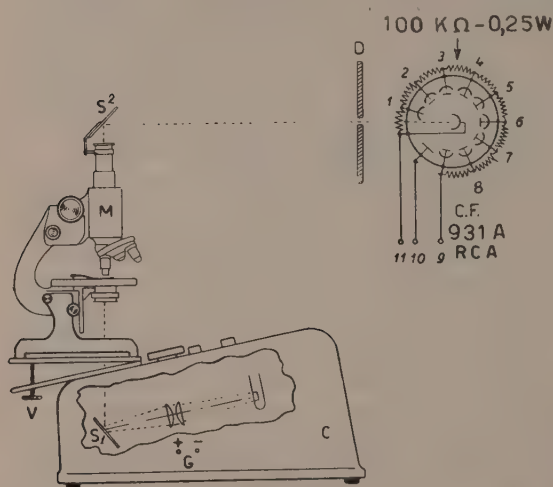


Fig. 1.

stadio (dall'11 che è il fotocatodo al 9 che è uno dei dinodi) e per questo i terminali del fototubo sono stati uniti con un partitore di tensione: applicando una differenza di potenziale di circa 1000 volts tra il fotocatodo e il 9 la tensione viene egualmente divisa tra tutti i dinodi. Tra l'anodo 10 e il dinodo 9 vengono forniti da 50 a 90 volts variabili per ridurre al minimo la corrente di buio. La corrente di buio è di solito di qualche centesimo di microampère, ma a volte può aumentare per un difettoso isolamento e per forte umidità dell'aria, comunque essa può venire compensata con i potenziometri del Coleman. Se il fotomoltiplicatore non è alimentato con pile è necessario venga

alimentato con corrente raddrizzata accuratamente stabilizzata per poter avere un segnale rigorosamente costante. Ritengo possa interessare lo schema elettrico dell'alimentatore da me usato (fig. 2). I terminali del 931 A RCA 9, 10, 11 vanno inseriti nelle corrispondenti prese 9, 10, 11 dell'alimentatore. Le prese G dell'alimentatore vanno collegate con le prese G del galvanometro del Coleman. Mettendo il commutatore del Coleman su Neph. si illumina il preparato con la lunghezza d'onda desiderata e si legge la risposta data dal fotomoltiplicatore sulla scala del galvanometro. Le misure sono state effettuate nel modo consueto ossia portando il segnale a 100 in una zona libera del portaoggetti e quindi misurando la quantità di luce trasmessa dalla zona cellulare colorata: in questo modo è stata calcolata la *densità ottica* o *Estinzione* (Pollister 1950)⁽²⁾ alle varie lunghezze d'onda.

Con l'apparecchiatura e con la metodica descritta è stata misurata la estinzione E del nucleolo della fascia vitellogena e del citoplasma degli oociti di *Antedon* alle varie lunghezze d'onda. I risultati ottenuti vengono brevemente riassunti e a maggior chiarimento riporto i grafici più rappresentativi delle misurazioni eseguite.

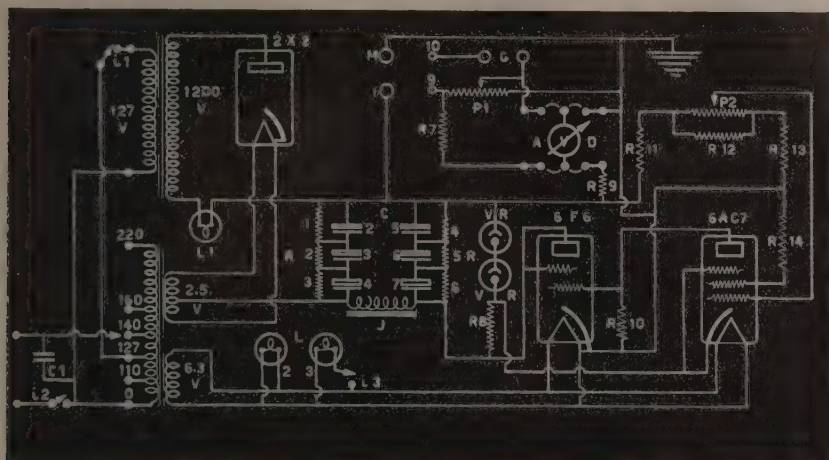


Fig. 2. - Schema elettrico dell'alimentatore per il 931 A RCA.

J = impedenza di filtro 150 ohm, 150. mA. - L1 - lampada (fusibile alta tensione) 0,05 A. - L2, L3 = lampade spia bassa e alta tensione 6 volt. - i2 = interruttore bassa tensione. - i1, i3 = interruttore in tandem 'alta tensione. CONDENSATORI: C1 = a mica 2.000 pF. - C2, 3, 4, 5, 6, 7 = elettrolitici 8 μ F. RESISTENZE: R1, 2, 3, 4, 5, 6 = 500 Kohm, 0,25 W. - R8 = 150 Kohm, 5 W. - R10 = 500 Kohm, 0,5 W. - R11, 12, 13 = 50 Kohm, 1 W. - R14 = 100 Kohm, 1 W. - VR = stabilo-volt 150. - P1 = potenziometro 100 Kohm. - P2 = potenziometro 1000 Kohm. VALVOLE: = 2X2 raddrizzatrice. - 6F6, 6AC7 = stabilizzatrici. VOLTMETRO in cc. per anodo o dinodi = V.

COLORAZIONE CON BLEU DI TOLUIDINA. — Le pinnule di Antedon sono state fissate in Bouin, sezionate a 7 μ e colorate con bleu di toluidina in soluzione acquosa al 0,5 ‰. La colorazione degli oociti è molto simile a quella che si ottiene con azzurro A. Dal grafico (fig. 3) risulta come la concentrazione del colorante, che rivela in questo caso l'RNA, sia molto più elevata nella fascia vitellogena e le curve spettrali di estinzione di questa, del citoplasma e del nucleolo presentano identico andamento con un solo massimo di E verso 620 m μ . È interessante a questo punto ricordare che proprio con il bleu di toluidina Cotronei (1910, 1911)⁽³⁾ mise in evidenza il comportamento basofilo della fascia vitellogena. Il bleu di toluidina nel materiale fissato in Bouin e alla concentrazione indicata non ha dato metacromasia, tenendo presenti i risultati di Ghiara (1953)⁽¹²⁾ sull'ergastoplasma si prospetta interessante uno studio più approfondito di questa colorazione su materiale fissato diversamente e trattato con soluzioni di colorante a pH diversi.

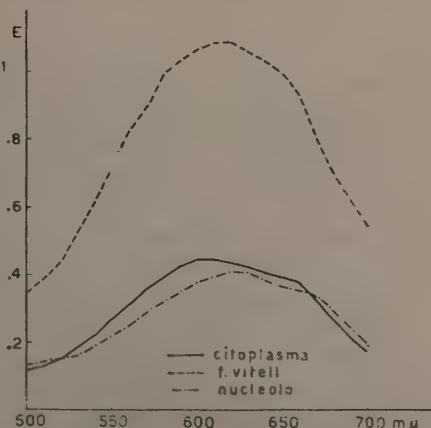


Fig. 3.

COLORAZIONE CON VERDE DI METILE-PIRONINA. - Le pinnule di *Antedon* sono state fissate in Zenker con acido acetico al 2 %, sezionate a $7\ \mu$ e colorate con verde di metile-pironina in soluzioni tamponate secondo il metodo di Gerola e Vannini (1948)⁽¹⁵⁾. Vannini (1951)⁽⁴⁾ con questo metodo ha potuto mettere in evidenza che la fascia vitellogena, quando è presente, contiene la maggior concentrazione di RNA. Egli ha potuto stabilire con un apprezzamento soggettivo del colore che le strutture prendono nella miscela di verde metile pironina a vari pH, che più elevata è la concentrazione in ribonucleoproteine di un distretto cellulare più il passaggio dalla colorazione rossa alla colorazione verde avviene a pH alcalini, questo anche

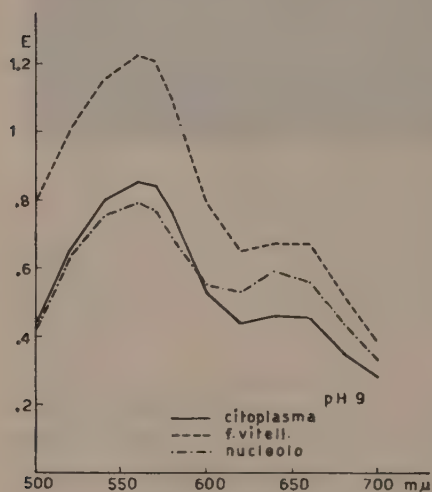


Fig. 4.

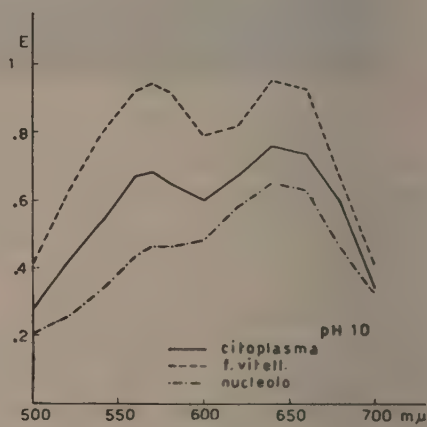


Fig. 5.

in assenza di DNA e con differenze del pH di viraggio dovute al fissativo usato. Ovviamente l'apprezzamento soggettivo del colore limita la precisione del metodo; con la spettrofotometria invece di preparati così colorati è possibile tradurre in estinzione le variazioni di intensità e di tonalità date dalla miscela dei due coloranti. A pH 9 (fig. 4) le curve riguardanti la fascia vitellogena ed il citoplasma hanno lo stesso andamento con un picco intorno a $560\ m\mu$ (pironina) ed un plateau di E moderata intorno a $650\ m\mu$ (verde di metile), il nucleolo invece mostra un primo picco intorno a $560\ m\mu$ ed un secondo più moderato intorno a $640\ m\mu$.

A pH 10 (fig. 5) le curve riguardanti la fascia vitellogena ed il citoplasma hanno lo stesso andamento con due picchi corrispondenti ai due colori, con E maggiore quello della pironina della fascia vitellogena; nel nucleolo è evidente il solo picco corrispondente al verde di metile.

(15) F. M. GEROLA e E. VANNINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 5, 77 (1948).

A pH 11 (fig. 6) le tre curve non presentano un netto comportamento differenziale. Da questi dati si desume che nella fascia vitellogena si trova la maggior concentrazione di RNA indicata e dalla elevata E dovuta alla pironina e dal ritardo con il quale a pH più alcalino diminuisce l'estinzione della fascia rispetto alla estinzione del citoplasma e del nucleolo. Ho parlato di concentrazione di RNA, rivelabile con questo metodo, o se si vuole di ribonucleoproteine secondo l'interpretazione di Vannini. Penso però si possa in base all'esame delle curve che sono espressione di differenze quantitative e qualitative di colore considerare anche, fra le altre, l'ipotesi che le ribonucleoproteine della fascia vitellogena siano diverse o si trovino in una differente condizione di quelle del nucleolo e forse anche di quelle citoplasmatiche: indice di questa diversità sarebbe il loro comportamento differenziale rispetto alla stessa miscela di colorante a diverso pH.

Data la concordanza di risultati finora ottenuti sono passato allo studio delle proteine dell'ooite di *Antedon*, sempre nello stadio nel quale è presente la fascia vitellogena.

COLORAZIONE CON BLEU DI BROMOFENOLO. — Esistono diverse tecniche per la evidenziazione citochimica

delle proteine. Già in altri miei lavori (Urbani, 1949) ⁽¹⁶⁾ soprattutto in seguito ai risultati ottenuti con la fotografia in luce ultravioletta a 275 m μ (Caspersson) e con la reazione di Millon ero arrivato alla conclusione che nella fascia vitellogena e nei nuclei vitellini in generale è presente uno stroma proteico al quale si trova combinato l'RNA o come gruppo prostetico o associato in maniera non meglio precisata. A continuazione di quelle osservazioni ho ripreso lo studio del problema.

Mazia, Brewer e Alfert (1953) ⁽¹⁷⁾ hanno applicato la colorazione con bleu di bromofenolo, usata nella elettroforesi su carta, a materiale citologico con ottimi risultati ed hanno studiato le caratteristiche spettrali del colorante combinato con le proteine cellulari: per i particolari della tecnica rimando perciò al lavoro di questi Autori.

Le pinnule di *Antedon* fissate in Bouin e sezionate a 7 μ , colorate con il bleu di bromofenolo hanno mostrato che negli oociti il nucleolo presenta

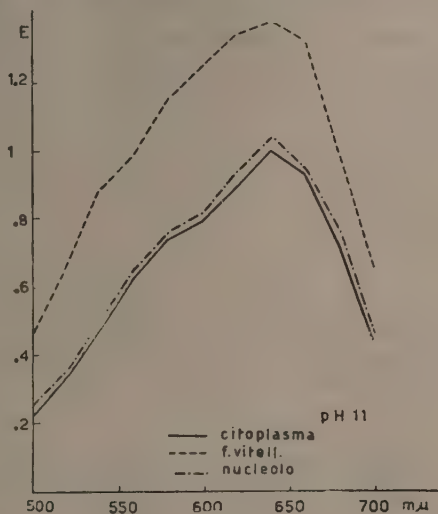


Fig. 6.

(16) E. URBANI, « Riv. di Biologia », 41, 331 (1949).

(17) D. MAZIA, P. A. BREWER e M. ALFERT, « Biol. Bull. », 104, 57 (1953).

l'estinzione più alta ($E = 1,24$) a $610 \text{ m}\mu$; E minore (1.11) presenta alla stessa lunghezza d'onda la fascia vitellogena e ancora minore il citoplasma (.39). Le curve (che non vengono riportate) mostrano che vi sono differenze solamente nella intensità del colore delle varie zone esaminate. La fascia vitellogena mostra di possedere una componente proteica ma per ora è impossibile precisare di che tipo di proteine si tratti e se esse siano diverse qualitativamente nelle varie strutture cellulari esaminate.

REAZIONE DI MILLON. - La reazione di Millon secondo Bensley è stata eseguita su sezioni di 10μ di pinnule fissate in Bouin o in alcool acetico secondo Pollister. I risultati ottenuti sono leggermente diversi a seconda

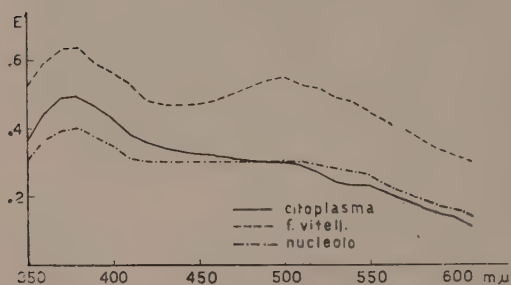


Fig. 7.

del fissativo impiegato. Nel materiale fissato in Bouin compare una colorazione rosso arancio piuttosto forte ed il risultato della spettrofotometria è illustrato nel grafico (fig. 7). È evidente come l'estinzione maggiore è data dalla fascia vitellogena che presenta due picchi a volte ben netti a volte meno

e che dovrebbero corrispondere

al composto mercuriale del triptofano e della tirosina (intorno a $360 \text{ m}\mu$) e della tirosina (intorno a $480 \text{ m}\mu$). Nucleolo e citoplasma mostrano invece un solo picco. Con il materiale fissato in alcool acetico si ha a volte una colorazione più intensa delle strutture ma nella fascia vitellogena non si evidenziano bene le due punte di estinzione (fig. 8). Sarà neces-

sario, per trarre conclusioni precise sul significato delle curve spettrali di estinzione, fare delle misure su materiale variamente fissato ed eventualmente con reattivo di Millon preparato secondo altre formule (Pollister). I risultati qui esposti mostrano che la concentrazione in proteine contenenti aminoacidi aromatici è superiore nella fascia vitellogena rispetto al nucleolo

e al citoplasma. L'andamento delle curve spettrali di estinzioni può far pensare che le proteine della fascia vitellogena siano qualitativamente diverse o si trovino in differenti condizioni di quelle del citoplasma e del nucleolo, ma questa ipotesi necessita di ulteriori conferme.

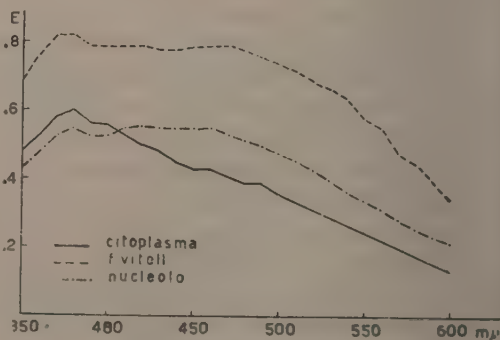


Fig. 8.

CONCLUSIONI. — Lo studio spettrofotometrico degli oociti di *Antedon rosacea* allo stadio di accrescimento caratterizzato dalla presenza della fascia vitellogena ha mostrato che in questa formazione è presente RNA in quantità maggiore che nel nucleolo e nel citoplasma. L'analisi delle ribonucleoproteine lascia pensare alla possibilità che questi composti siano non solo quantitativamente ma anche qualitativamente diversi nella fascia vitellogena e nel nucleolo e forse anche nel citoplasma. In effetti nucleolo e fascia vitellogena che si trovano in distretti cellulari differenti e che hanno sicuramente un differente metabolismo, in quanto il primo è un organello stabile mentre il secondo è transitorio, dovrebbero avere anche una differente composizione biochimica.

La metodica della analisi spettrale applicata nel presente lavoro si prospetta di grande utilità per i risultati positivi ottenuti e per ulteriori possibilità di indagine nello studio citochimico degli oociti in crescita.

CONGRESSI

Convegni Internazionali. — *Relazione (*) sul Convegno Internazionale di Polarografia a Bressanone* del Corrisp. GIOVANNI SEMERANO.

Durante i corsi estivi dell'Università di Padova ha avuto luogo in Bressanone (26-27 agosto 1953) la seconda riunione di Polarografia organizzata dall'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova e dal Centro di Polarografia del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Al Convegno hanno preso parte una sessantina di cultori di polarografia provenienti da Università italiane e straniere e da laboratori dell'industria e sono state presentate numerose comunicazioni riguardanti vari capitoli della polarografia moderna.

Particolarmente da menzionare le seguenti:

Dott. Paul Federlin (dell'Istituto di Chimica organica dell'Università di Strasbourg). — *Il problema delle aldeidi in polarografia.*

Dott. Ferdinand Von Sturm (dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Bonn a. Rh.). — *Ricerche polarografiche in solventi organici. — Massimi polarografici e loro soppressione. — Contributi e spiegazioni della struttura di N-rodanati ed eterocicli.*

Dott. Giovanni Giacometti (dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova). — *Previsioni sul comportamento polarografico delle sostanze organiche.*

Dott. Pietro Lanza (dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova). — *Solventi, elettroliti, tamponi in polarografia.*

Dott. Giuseppe Gualandi (dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma). — *Misure amperometriche di aerazione e respirazione di sistemi biologici.*

(*) Svolta nella seduta del 14 novembre 1953.

Dott. Giacomo Costa (dell'Istituto di Chimica dell'Università di Trieste). - *Polarografia degli azossicomposti.*

Dott. Paolo Favero (dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova). - *Contributo delle tecniche oscillografiche ai problemi della polarografia.*

Dott. E. Werner (del I° Istituto Chimico dell'Università di Vienna). - *Studio polarografico di soluzioni del sale di Schlippe* ($\text{Na}_3\text{SbS}_4 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$).

Dott. Antonio Indelli (dell'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Ferrara). - *Sull'applicazione della polarografia allo studio della corrosione.*

Dott. Elena Fornasari (dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova). - *Massimi di corrente e influenza esercitata dai soppressori sui diagrammi polarografici.*

Dott. Mario Dolcetta (dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova). - *La sostituzione dell'elettrodo a goccia con microelettrodi solidi.*

Dott. Luciana Griggio (dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova). - *Curve polarografiche e natura del processo elettrodico. - Gradini multipli e loro interpretazione.*

Il Convegno si è concluso con una relazione del prof. Giovanni Semeraro che ha illustrato i risultati conseguiti dal corso estivo di 10 lezioni teoriche e di esercitazioni pratiche di polarografia ordinaria e oscillografica svolte nelle due settimane precedenti il Convegno. Egli ha inoltre posto in evidenza alcuni aspetti organizzativi della ricerca polarografica in Italia e all'estero.

È stato così trattato il problema della documentazione, quello della specializzazione delle varie Scuole nelle diverse tecniche e sono stati indicati gli indirizzi di ricerche più consigliabili per il prossimo futuro.

Dopo aver riferito sui risultati delle discussioni avute a Stoccolma, in occasione del Congresso Internazionale di Chimica, in senso alla Sottocommissione per i dati polarografici della Commissione di Chimica Analitica della Unione Internazionale di Chimica Pura e Applicata, il prof. G. Semeraro ha ricordato le varie iniziative in atto, sia all'estero che presso il Centro di Studi di Padova del Consiglio Nazionale delle Ricerche, allo scopo di semplificare ed organizzare il lavoro dei ricercatori interessati a questo genere di misure.

Alla seduta inaugurativa del Convegno hanno presenziato il prof. G. B. Bonino e rappresentanti dell'Università di Padova e di altre Università italiane.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Francesco Vercelli

tenuta (*) dal Socio MARIO TENANI

Or è circa un anno, il 24 novembre 1952, moriva in Camerano Casasco, dopo breve degenza, il nostro consocio prof. FRANCESCO VERCELLI.

Egli era nato il 22 ottobre 1883 a Vinchio, presso Asti, da Andrea e Laura Picco; le modestissime condizioni economiche della famiglia numerosa e le scarse risorse scolastiche del piccolo Comune montano, gli avrebbero impedito la continuazione degli studi, se la intelligenza e la serietà dimostrate fin dalle prime classi elementari non gli avessero procurato l'aiuto dei Fratelli delle Scuole Cristiane di Torino, che lo accolsero e lo educarono nei loro Collegi.

Soltanto nel 1908, dopo il conseguimento della laurea in fisica con pieni voti legali, e, nel 1909, della laurea in matematica con lode presso l'Università di Torino, il prof. Somigliana, e i suoi stessi benefattori, riuscirono ad indurlo, riluttante, a tentare la carriera scientifica lasciando l'oneroso incarico di istitutore che, per riconoscenza, continuava ad esercitare.

E in tal modo nel decennio 1909-1919, Vercelli fu assistente nel Politecnico di Torino, e, dal 1912, anche nell'Università; e, contemporaneamente, ebbe l'incarico della meccanica razionale e dell'analisi nell'Accademia Militare di Torino.

Vercelli fu uno dei pochissimi tra noi che, al suo tempo, in mancanza di una vera e propria scuola geofisica superiore, si siano potuti sviluppare in modo completo, quasi spontaneamente, in tutti i campi in cui cominciava a suddividersi la geofisica, senza passare la onerosa trafila dei Servizi geofisici, come spesso è tutt'ora necessario.

Egli ebbe la fortuna di avere dal Somigliana, nel 1910, l'indicazione di una raccolta di osservazioni sulle *sesse*, che, secondo le previdenti indicazioni date da Vito Volterra nel 1898 alla Soc. It. di Fisica, era stata iniziata sul Lago di Garda dal Chistoni, e che era allora matura per l'applicazione delle recentissime considerazioni idrodinamiche svolte da Chrystal per il lago di Ginevra. Il Vercelli, utilizzando intelligentemente alcuni tentativi già fatti dal Valentini e dal Defant in Austria, e dal dott. G. Teglio in Italia, seppe condurre a termine con pieno successo, un decisivo confronto dei periodi delle oscillazioni del Garda, calcolati in base ai rilievi, a suo tempo

(*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

eseguiti dal nostro Istituto Idrografico, con i periodi che egli stesso aveva direttamente dedotti dalle ora dette osservazioni, applicando a queste ultime il laborioso metodo delle residuazioni; un metodo di analisi e di calcolo dei periodi già introdotto dal Lagrangia, e da breve utilizzato anche dal Chrystal [1, 2, 3, 4].

Quasi contemporaneamente troviamo il Vercelli impegnato in ricerche sulla *distribuzione orizzontale della temperatura nel lago di Como*, in base alle osservazioni eseguite dal Somigliana, dal Cantone e da altri [6]; e in ricerche fisico-matematiche [7, 8, 11, 12] di carattere classico, riguardanti la *distribuzione stazionaria della temperatura*, problema retto, secondo le conclusioni di Fourier, dalle note equazioni di Laplace.

Fissate opportunamente le condizioni al contorno e determinati i coefficienti degli sviluppi in serie delle soluzioni delle dette equazioni col metodo dei minimi quadrati, il confronto delle temperature così calcolate con quelle effettivamente misurate nel traforo del Sempione ebbe esito soddisfacente, mostrò il felice risultato della ricerca e la probabilità della sua applicazione al traforo dello Spluga, di cui allora si parlava.

Considerazioni che, per un certo lato, si riattaccano a questi problemi, furono poi riprese molto più tardi dal Vercelli, che riuscì a determinare l'effetto perturbatore prodotto dalle oscillazioni termiche esterne sulla temperatura dell'aria osservata nelle grotte di S. Canziano (1931, [63]).

L'interessante di questa ricerca giovanile sta in ciò, che, nell'anno successivo, 1912, per controllare la validità della formula fondamentale che Vercelli aveva applicata anche in altre considerazioni sul raffreddamento dei pianeti [12], egli esponeva il principio [13] di un nuovo metodo di misura del coefficiente di conduttività termica delle rocce basato sulla formula stessa; ed eseguendo accurate esperienze sotto la guida di un altro dei grandi maestri di cui andava orgoglioso, il Naccari, la confermava, mostrando che i valori del detto coefficiente così ottenuto risultavano concordantissimi con quelli noti, ottenuti indipendentemente, per vie del tutto diverse, da vari autori.

Con questi promettenti lavori il Vercelli conseguiva nel 1915 la libera docenza in Fisica Terrestre, ed entrava nella vita scientifica.

Già trattando delle sesse, il Vercelli aveva avuto modo di rendersi padrone dei metodi dell'analisi periodale, sia come era stata applicata dal Chrystal per il suo caso particolare, sia come più ampiamente essa si era sviluppata in lavori precedenti a quelli del Chrystal, nei riguardi della cosiddetta analisi armonica delle maree.

Tra i due casi c'è una differenza evidente: mentre le oscillazioni forzate di marea sono prevedibili, nel senso ordinario di questa parola, perché le forze newtoniane che le generano hanno esistenza continua, quelle gravitazionali delle oscillazioni libere di sessa non lo sono, perché ignota è la legge secondo la quale si ripetono e succedono le cause (colpi di vento, scuotimenti del bacino) da cui prendono origine; ma quando quelle forze esi-

stono, hanno un'espressione analitica nota e ben definita in funzione del tempo, pur non essendo prevedibili. Non per questo si riterrà che la scomposizione non sia stata utile e istruttiva per la scienza idrodinamica.

Di fronte alle incoraggianti conferme della teoria idrodinamica delle sesse che il Nostro Vercelli aveva ottenuto sul Garda (e poi sul Lago Maggiore [15]), egli si deve essere chiesto se per avventura molti altri fenomeni naturali di carattere oscillatorio, anche non esattamente periodico, le cui cause ci sono completamente ignote, non siano invece prodotte da cause periodiche di cui sia possibile trovare la ragione nella forma e nelle dimensioni del mezzo, come in entrambi i casi sopra esposti; sia che poi ciò ne permetta la previsione, come nel caso delle maree; sia che, anche non permettendo la previsione, ci conduca tuttavia a comprendere meglio le cause naturali del fenomeno, come nel caso delle sesse.

Qui si delinea il carattere del lavoro geofisico vero e proprio cui fu dedicata la vita del Nostro; e così assistiamo ai primi tentativi entusiastici nel nuovo ricercatore che, nel 1915, si lanciava, ormai da solo, a compiere il primo volo.

Il fenomeno a cui, il Vercelli si rivolse per primo [14, 16] fu quello delle *oscillazioni della pressione atmosferica* in un luogo determinato, cominciando a determinare i periodi delle oscillazioni componenti mediante il procedimento analitico già usato, delle *residuazioni*. Il risultato apparve subito molto incoraggiante, perché, sin da principio, si trovò che i periodi dedotti dalle osservazioni venivano a raggrupparsi intorno a valori ben definiti, e a ripetersi con evidente costanza.

Per quanto fosse difficile il darsi una ragione fisica dei periodi così trovati, è facile immaginare che un simile risultato non poteva che incoraggiare il giovane ricercatore a tentare la sintesi, a verificare cioè se le funzioni periodiche trovate permettessero una estrapolazione nel futuro.

Come il Vercelli stesso ebbe magistralmente ad esporre più tardi (1921, [21, 22, 23]) in un suo articolo: *Sulla dinamica delle oscillazioni barometriche*, tale idea era tutt'altro che estranea alle tendenze del tempo nei riguardi del problema della previsione del tempo.

E da quell'anno 1915, l'idea dominante del lavoro di Vercelli nel campo meteorologico fu la ricerca dei periodi delle variazioni periodiche della previsione barometrica e della prova sperimentale della loro realtà fisica; sia, al solito, che essi potessero servire a eventuali estrapolazioni o previsioni, sia che il loro uso dovesse limitarsi alla ricerca delle cause delle variazioni barometriche.

Ma poco dopo questi inizi egli venne chiamato sotto le armi come Ufficiale di Artiglieria per partecipare alla guerra 1914-18: dapprima presso il Poligono di Ciriè, e poi presso il Comando Supremo, ove venne adibito allo Ufficio meteorologico ed ebbe occasione di riprendere e sperimentare il suo procedimento di analisi dei barogrammi e della loro sintesi, per la previsione delle pressioni [17, 18, 20].

Una brillante relazione del Comando della III^a Armata testimonia come con importanti e riuscite applicazioni, egli si fosse in breve acquistato il più ammirato interessamento e il più entusiastico incoraggiamento del Comandante della sua Armata, il Duca di Aosta. Non appena terminata la guerra, il Vercelli fu addetto al nascente Osservatorio Geofisico di Trieste, che il Comando Talassografico Italiano veniva organizzando, dopo averlo staccato dal precedente Osservatorio Marittimo Triestino.

Questa istituzione cittadina [nata nella metà del 700 come gabinetto per le esigenze dell'insegnamento nautico, che vanta una raccolta di dati meteorologici che risale ai primi dell'800 e raggiunge dal 1841, per opera del prof. Vincenzo Gallo, forma e estensione moderna; che continua, onorata sotto i successori Ferd. Osnaghi (1868-91) ed Edoardo Mazelle (1892-1918): cui spetta il vanto di aver ripresa dal 1870, sempre per merito del prof. Gallo, la pubblicazione iniziata nel 1841 delle effemeridi astronomiche in lingua italiana, in affermazione della italianità della Marina Mercantile dell'Impero], era assurta ad alta fama fra i nascenti istituti geofisici e si era conservata intatta e ordinata, in perfetto funzionamento, attraverso le dure prove della prima guerra mondiale. Così l'avevo trovata io stesso, nel novembre 1918, come incaricato della prima occupazione militare della Villa Basevi, ove aveva sede dal 1898.

Nel nuovo Istituto, trasferito nel 1920 alla sede attuale, vennero poi riunite anche attribuzioni di carattere geofisico che, sotto il governo austriaco, erano affidate all'Istituto Idrografico di Pola; noto per gli studi di Sterneck e per quelli talassografici di Kesslitz sul mare Adriatico.

Nel nuovo Istituto il Vercelli cercò innanzi tutto di risolvere [24] l'annoso problema della *influenza dei fattori meteorologici sugli innalzamenti di marea*; Vercelli considerò le differenze tra le maree previste col metodo armonico e le maree registrate al mareografo, come dovute ad oscillazioni di sessa generate dal sorgere di cause meteorologiche (venti forti, temporali, ecc.); ne determinò i periodi col metodo del Chrystal, e, dimostrò che esse potrebbero permettere una previsione, se fosse facile prevedere altrimenti l'insorgere di queste cause; in pratica, lo studio poteva servire e servì a dimostrare la causa e a valutare i limiti e le caratteristiche delle possibili differenze tra la marea effettiva e la sua previsione armonica: il che non è poco. Analogo procedimento applicò alla soluzione di un curioso problema riguardante le maree e le sesse nel porto di Zara [102].

Ma il suo lavoro principale fu, in quel tempo, dedicato a completare la ricerca dei periodi delle *oscillazioni della pressione*; in breve, nel 1923, con l'aiuto di mezzi meccanici rapidissimi, ideati da un nostro geofisico immaturamente scomparso, Cesare Fabris, e dall'ing. Dom. Tavanti, il Vercelli, dopo aver studiata [30-33] l'applicabilità nei limiti pratici della teoria della residuazione al caso di oscillazioni fortemente smorzate o di inizio improvviso, espone i risultati del paziente esame di ben 20 anni di accuratissime registrazioni barometriche dell'Osservatorio Meteorologico della Università di Ferrara (raccolte da un mio indimenticabile maestro, il

prof. G. Bongiovanni), di Cuba, di Trieste, di Cervignano, e per intervalli minori, ma simultanei, di molte stazioni italiane ed estere, sia dell'Europa, sia di altri continenti.

Nelle curve esaminate il Vercelli poté accertare l'esistenza frequente di oscillazioni caratteristiche con periodi da 2 a 3 giorni nelle alte latitudini; con periodi da 4 a 6 giorni nelle latitudini medie; e, ovunque, di onde a periodo lungo, di 8, 16, 30 giorni; e di un'onda annua. Aiutato dal professor Fabris e dal dott. Alpago, con costanza ammirevole, proseguì, con sorte varia anche il lavoro di sintesi, per la previsione; il cui esito, risultò infine dipendente, in modo essenziale, dai criteri riguardanti la possibilità del sorgere improvviso di onde di periodo ormai noto e di smorzamento variabile; e della persistenza di onde aventi i soliti periodi. Si tratta di un lavoro poderosissimo, anche se non definitivo; dopo il quale, questa prima fase dell'attività del Nostro, nel campo delle ricerche periodali sulla pressione barometrica, si arrestava per qualche tempo, assorbita da problemi talassografici, alla cui soluzione il nome del Vercelli resterà permanentemente legato, accanto a quello dei nostri massimi cultori di quella disciplina.

La prima delle grandi imprese che si presentava all'attività del Comitato T. I., fu l'organizzazione di uno studio definitivo delle *correnti* periodiche di marea *dello stretto di Messina* [34, 35, 36, 45].

Dedicandosi con entusiasmo a questi nuovi problemi, il Vercelli, ammaestrato da alcuni precedenti onorevolissimi del prof. Ludovico Marini, vi portò lo spirito in cui era stato educato dai suoi maestri; di attenersi soprattutto a ricerche quantitative in vista di dirette applicazioni alla risoluzione di problemi pratici. Ecco alcune sue parole scritte in questo tempo (p. 202 di « Atti Sips » Bologna), la cui verità si è dimostrata indiscutibile: « In oceanografia, più che in altri campi della scienza, il segreto del successo sta, non nella preventiva abilità di una norma presto acquisita, ma nella remota preparazione spirituale e nella chiarezza delle idee sui problemi che si affrontano; non rombanti programmi rispecchianti l'indice di un trattato; non prestabiliti ordini di lavoro con date ed epoche vanamente fissate in anticipo, ma impostazioni di direttive bene inquadrare nell'ambito di definiti argomenti; ma la fatica di scrutare momento per momento lo svolgersi dei fenomeni, per adattare in conseguenza l'ordine dei lavori, precisamente come fa il savio capitano di fronte alle ignorate mosse del nemico ecc. ».

Il programma, assai semplice, da lui proposto [28], approvato da L. De Marchi, dall'Alessio, dall'Issel e dal Brunelli, illustri membri di questa Accademia, e successivamente attuato, consisteva nel raccogliere una registrazione continuativa per 15 giorni (sufficiente per il calcolo delle costanti armoniche [26] della corrente marina alternativa, che, col nome di « montante » e « scendente », si alterna nello stretto), ancorando una nave nel centro della soglia, nel punto più stretto, tra Ganzirri e P. Pezzo, in profondità di 106 metri, ove a tutte le quote il ritmo della corrente risultava regolare; e nella successiva determinazione della differenza tra le correnti esistenti nei punti

di quella verticale e le correnti simultanee nei punti omologhi delle verticali di altre posizioni opportunamente scelte nello stretto; compiendo contemporaneamente tutte le verifiche chimiche e biologiche che la tecnica oceanografica consiglia, e di cui erano incaricati il chimico prof. Picotti e il biologo prof. Sanzo. Il programma ebbe pieno successo con due campagne:

una iniziata in agosto del 1922, con la suddetta stazione di 14 giorni, e prolungatasi poi per tutta l'epoca invernale;

l'altra, di complemento e controllo, nella primavera-estate del 1923.

Il successo di questa prima crociera moderna, italiana, dopo quelle del Magnaghi, reso noto con due voluminose e dettagliate relazioni pubblicate dalla Comm. Internaz. per lo studio del Mediterraneo [40-47], e con la pubblicazione delle *Tavole di corrente* [43] per lo stretto di Messina, valse a richiamare sull'ancor giovane autore l'attenzione di tutto il mondo scientifico; in particolare, fece concepire l'idea di associare il Vercelli ad una analoga spedizione scientifica da eseguirsi nel 1924 e che concorresse analogamente, dal punto di vista scientifico e nautico, al lavoro da lunghi anni svolto dalla nostra Marina, per la *conoscenza nautica del Mar Rosso*.

In questo mare, la pratica della navigazione aveva per problema urgente la conoscenza delle sue correnti: queste avevano sempre costituito una preoccupazione per i naviganti; tantoché, all'epoca della spedizione, sulle carte inglesi, attraverso quel mare, si leggeva ancora la leggenda *Correnti trasversali pericolose*; era questa l'ultima traccia, nelle carte nautiche moderne, delle antiche iscrizioni, come « Hic sunt leones, ecc. », che caratterizzavano le regioni inesplorate.

Pel nostro geofisico, il Mar Rosso era un canale abbastanza regolare, lungo circa 1200 miglia, ossia più di 2000 Km., che per la forma regolare dei suoi contorni superficiali, se non proprio per la regolarità dei suoi fondali abbastanza complicati, si presentava molto opportuno per un confronto tra le teorie idrodinamiche, nate con lo studio delle sesse, e l'esperienza.

Considerazioni analoghe a quelle del Chrystal, avevano permesso allo americano R. A. Harris, di prevedere come fra i periodi propri di oscillazione di questo mare, vi fossero periodi concordanti con quelli delle componenti armoniche principali della marea, atti a mantenere dunque le dette sesse permanenti.

Vercelli procedette anzitutto alla collocazione di ben 11 mareografi sulle due coste, orientale ed occidentale, del mare: eseguito il calcolo delle costanti armoniche, egli poté constatare che le ampiezze e le fasi delle onde semidiurne, che sono anche le più cospicue, dimostravano che [39, 46], conformemente alle sue dimensioni, il mare è sede di una oscillazione trinodale, come era stato previsto teoricamente: in altre parole, se si immagina il Mar Rosso attraversato da tre trasversali (linee nodali): una a nord, allo sbocco del Golfo di Suez; una al centro proprio a metà del mare, tra Porto Sudan e Gedda; e una al sud, poco a sud di Assab; e si immagina il lungo mare diviso in tre parti presso a poco uguali centrate sulle dette trasversali, la oscillazione di marea della sua superficie può essere descritta come un'oscil-

lazione con moto di altalena, con periodo di 12 ore, delle singole tre parti, intorno alla loro linea centrale; per effetto di queste tre altalene, quando c'è alta marea a Suez, c'è bassa marea a Bab-el-Mandeb, e viceversa: sulle linee nodali naturalmente la marea è nulla; la sua ampiezza cresce quasi proporzionalmente alla distanza delle linee nodali.

Come è facile intuire, e come le misure raccolte confermarono, proprio sulle predette linee nodali, si dovevano avere correnti alternate di massima velocità e portata; e per quanto il Mar Rosso sia a latitudine piuttosto bassa, la forza di Coriolis, dovuta alla rotazione terrestre, è ivi tuttavia capace di deviare queste correnti dalla loro direzione assiale, originando sensibili correnti trasversali alternate, dirette per 12 ore verso la sponda orientale, e per 12 ore verso quella occidentale.

Queste correnti risultarono perfettamente sufficienti a giustificare le deviazioni denunciate dai naviganti ed a spiegare le apparenti contraddizioni dei loro racconti, come è facile dedurre da considerazioni elementari.

Queste constatazioni veramente importanti basterebbero a giustificare l favore con cui furono accolte le conclusioni del Vercelli, subito pubblicate, nel 1924 stesso, negli «Annali Idrografici» di Genova [39].

Ma dal punto di vista scientifico, e anche dal punto di vista pratico, come si è rilevato in questi giorni nelle ricerche dell'UNESCO sui climi aridi, non furono meno importanti le conclusioni riguardanti il bilancio idrico del mare; nel Mar Rosso, l'apporto dei fiumi e delle precipitazioni è, notoriamente inferiore alle perdite per evaporazione di ben 3,5 metri all'anno; l'interesse di uno studio delle correnti nello stretto di Bab-el-Mandeb, era evidente ed era acuito dal fatto che, (in base alle importanti osservazioni meteorologiche di questa crociera, e in applicazione di una corretta teoria della propagazione dell'assorbimento del calore solare sviluppata dal Nostro, [42, 50]), Egli aveva stabilito che il calore solare assorbito annualmente non era assolutamente sufficiente a giustificare tutta quella enorme evaporazione, ed era quindi necessario ammettere che dall'Oceano Indiano entrasse continuamente nel mare una continua corrente di acqua più calda.

Per l'epoca invernale, lo studio fu eseguito, durante la crociera di cui parliamo, ancorando per 14 giorni una nave in 170 metri di fondo, nel centro del canale compreso tra l'isola di Perim e la costa africana, in modo da poter registrare le correnti alle varie quote, e stabilire, in base alle costanti armoniche ed alle caratteristiche chimico-fisiche di quelle acque, il regime delle correnti. Come era prevedibile [54-55], e come è stato poi confermato anche più tardi, dal Tompson, della John Murray Exp., 1933-34, durante l'inverno, accelerati dal monsonone da SW, gli strati superiori, più caldi, dal Golfo di Aden entrano nel Mar Rosso, mentre a grande profondità esce una corrente ad alta salinità che serve a smaltirne l'eccesso di sale prodotto dall'evaporazione.

Il Vercelli stesso cercò poi di perfezionare le sue deduzioni tratte dalla fortunatissima crociera invernale: e così, 5 anni dopo, nel 1929 [58-64], egli tornò nel Mar Rosso in epoca estiva, cercando di confermare con nuove

misure, nonostante le difficoltà offerte da questa stagione, le regole pratiche ad uso dei naviganti che già aveva stabilito; eseguendo nuovi studi, sulle correnti sulle linee nodali e [65] nel golfo di Suez, a conferma di illazioni di Poincaré, di Defant e di Sternek, e, ritentando infine a Bab-el-Mandeb un secondo ancoraggio di grande profondità, che però fu dovuto abbandonare dopo 4 giorni.

I risultati ottenuti in questa seconda spedizione e nella prima nel golfo di Suez, furono poi inquadrati nelle trattazioni generali del Poincaré dalla signora Chandon, in una pregevole tesi di laurea in matematica a Parigi.

Fu questa la quarta ed ultima crociera di grande portata del Nostro Vercelli; sarebbe difficile fornire analoghi dettagli sulle minori.

In alcune di queste Egli si propose di verificare sperimentalmente una teoria da lui svolta nel 1926 [41] sulla propagazione delle *radiazioni solari* nelle acque marine [77, 78, 79, 91], mediante un suo speciale fotometro fotografico [99] che permette di compiere rapidamente sei misure a quote diverse prima di essere estratto, e di misurare ad ogni quota, l'intensità della luce proveniente dall'alto e di quella diffusa. Queste sue esperienze, a Capri nel 1934 [80], a Rodi [95] nel 1939, a Venezia [99] nel 1939, sono oggi citate come classiche in tutti i manuali moderni di oceanografia; anche le analoghe determinazioni del coefficiente di estinzione, eseguite dallo stesso Vercelli utilizzando opportunamente pile termoelettriche di Moll, sono risultate preziose per la determinazione delle leggi diversissime che regolano il riscaldamento e il raffreddamento annuo sia dell'acqua salata del mare, sia dell'acqua dolce dei laghi.

Molte osservazioni sulle leggi del riscaldamento e del raffreddamento radiazionale dell'acqua furono appunto eseguite dal Vercelli nelle calme acque dolci di molti *laghi alpini* [96], stabilendo che, in tali casi più semplici, solo nello strato di salto, la temperatura è direttamente determinata dalla quantità di calore assorbito *in situ*: negli altri strati dipende essenzialmente dalla convezione. Le corrispondenti leggi valevoli per l'acqua salata, ove le variazioni di densità non sono dovute solo alle variazioni di temperatura, ma anche alle variazioni di concentrazione del sale conseguenti all'evaporazione, sono *oggi* oggetto di estese ricerche, importantissime per la propagazione del suono e degli ultrasuoni negli strati superficiali e di interessantissime considerazioni idrodinamiche non ancora esaurienti, che possono considerarsi continuazioni dirette dell'opera del Vercelli.

Interessantissima fu l'attività del Vercelli nei riguardi della *Laguna Veneta*; a Lui si deve una conoscenza più diretta dell'azione delle correnti di marea nell'impedire l'interrimento dei porti e dei canali della Laguna stessa [115]; studiando appunto la trasparenza delle acque, egli stabilì come la torbida viene riportata in mare, e la laguna viene liberata dai sedimenti che ne procurerebbero la morte. Sulle ricerche lagunari del Vercelli sono basate le importanti *Tavole delle correnti* del Canale Porto del Lido, pubblicate mensilmente dal Magistrato alle acque, e le modernità che oggi vengono a potenziare gli antichi «lavorieri» delle valli lagunari.

Vorremmo ora rievocare la sua figura di ricercatore nella sua attività nell'Istituto di Trieste, che giustamente oggi porta il Suo nome.

Anche durante le Sue necessarie assenze per le grandi crociere, dal 1926, in quell'Istituto si era venuto creando un centro di ricerche per l'applicazione dei Suoi metodi di analisi alle più svariate questioni; basterà ricordare le poderose ricerche di Padre Gemelli sulle vocali, del prof. Sella, del Luzzato-Fegiz sulla natalità, e di altri numerosi; e il Suo ardore di ricerca non si acquetava [51, 57, 60].

Nel 1928, ripresentando a Torino le considerazioni generali sul metodo della residuazione, che nel frattempo aveva trovato all'estero esposizioni apparentemente molto diverse da quelle di Chrystal, da parte di vari autori (Rubinstein, 1922; Streiff, 1922; Bernstein, 1927), il Vercelli rilevò la convenienza di seguire un procedimento di calcolo numerico detto di *esaustione*, che, pur essendo concettualmente e sostanzialmente equivalente a quello di residuazione, permetteva di eliminare le incertezze dei processi grafici.

Negli anni successivi il Vercelli espose altri perfezionamenti a tale procedimento, utilizzando le proprietà della simmetria e dell'anti-simmetria delle curve, ed altri accorgimenti atti ad abbreviare l'esame analitico [62, 70, 76]; finalmente, nel 1938, richiamandosi ai procedimenti di perequazione in uso nella statistica, compilava una *guida pratica* seguendo la quale si possono eliminare: o le componenti a periodo molto breve (per la perequazione, o lisciamiento della curva originale); o quelle molto lunghe (pel calcolo dello asse medio); oppure si possono selezionare o filtrare le componenti singole con periodo relativamente breve, o quelle singole con periodo relativamente lungó [101].

Per ogni combinazione è pure facile determinare l'ampiezza della banda isolata.

Il procedimento non risulta naturalmente esatto quando le componenti esistenti non siano sinusoidali o non abbiano una ampiezza costante nel tempo; ma anche quando esso risulta teoricamente insostenibile, può talvolta risultare praticamente approssimato, anche, quando trattasi di onde componenti smorzate o di ampiezza variabile. La soluzione non appartiene alla matematica rigorosa, ma deve allora essere controllata ed è in parte affidata all'intuito e al buon senso.

Per evitare facili errori materiali nei laboriosi calcoli, il Vercelli ideò anche un *apparato analizzatore* [98, 100] di sicuro e perfetto funzionamento.

Effettivamente moltissime applicazioni della guida e dell'analizzatore, sono state coronate da successo; e sulla importanza di questa constatazione è inutile che mi dilunghi, quando nel campo dell'ingegneria, nell'analisi delle vibrazioni, nell'interpretazione degli oscillogrammi, è ormai generale il ricorso ad analisi di questo tipo, con vantaggi pratici inestimabili.

In molte occasioni il Vercelli non mancò di occuparsi anche dei metodi della *geofisica applicata*, e specie dei metodi della prospezione elettromagnetica [52]: cominciò nel 1927, coadiuvando i geofisici che iniziavano la prospezione della valle Padana; nel 1928, dirigendo in campagna i lavori di una

squadra geoelettrica da lui costituita, e partecipando poi, come consulente, ad una commissione consultiva dell'AGIP; in tale veste visitò nel 1938-39 le principali Società Americane di Geofisica Applicata, traendone motivo per occuparsi dei metodi *sismici* di prospezione [97]. Del resto, dal 1931 Egli si era già occupato di *sismologia* a Trieste: si può dire che in quella stazione sismica ha avuto origine una vera scuola moderna di studi sismici italiani, i cui risultati sono ormai ben noti; egli stesso si occupò dei metodi per la determinazione delle *profondità epicentrali* [82] e, ultimamente, dal 1951 in poi, di *microsismi* [119, 120, 121] e della loro importanza in meteorologia.

Naturalmente il Vercelli, non si occupò soltanto dei problemi massimi che abbiamo potuto accennare: si può dire che Egli si occupò con successo di tutti i problemi della geofisica [75 *bis*, 93, 116, 126, 90, 112, 114, 113, 124, 72, 68, 123].

Egli ci lascia due grosse opere divulgative: *L'aria* [74] (1^a edizione 1933 e 2^a 1952); *Il mare, i laghi ed i ghiacciai* [118], che rimarranno a ricordare nei tempi la Sua meravigliosa attitudine ad esporre con sobrietà e precisione, in modo dilettevole ed efficacissimo, tutte le nostre conoscenze attuali di fisica dell'atmosfera e dell'idrosfera; e con queste opere, vorrei citare le Sue trattazioni dell'Enciclopedia Treccani, i Suoi capitoli sui Mari Italiani [90], le Sue lezioni [48] e [44]. Non meno pregevole della sua chiarezza è il senso artistico che emana dalla scelta felice delle illustrazioni magnifiche di cui egli giustamente si compiaceva.

Del resto, alla poesia nelle scienze egli aveva sempre dedicato uno studio amorosissimo, raccogliendo dalle opere di Dante, e illustrandole, tutte le allusioni alle leggi della fisica [29]; anche nelle sue trattazioni più specializzate, non è raro trovare opportune citazioni classiche e poetiche che infiorano il suo stile.

Per le Sue eccezionali doti di ricercatore e diffusore del sapere, fu membro del C.N.R., della Commissione Geodetica Italiana, della Commissione Internazionale delle Maree, di molte organizzazioni scientifiche Nazionali e Internazionali e prese parte a numerosi Congressi in Italia ed all'Estero. Appartenne alle Accademie Pontificia, dei XL, delle Scienze di Torino e di Padova. A Trieste fu anche Consigliere Comunale nel triennio 1948-51, e Presidente della Società Adriatica di Scienze Nautiche e del Circolo di Cultura e delle Arti.

Nelle discussioni egli aveva la straordinaria abilità di ridurre i problemi alla loro essenza e di arrivare nel modo più rapido e suadente ad una possibile conclusione sintetica. Col suo aspetto modesto e sereno, con le Sue gioconde reminiscenze inesauribili, colla sua perfetta padronanza di sé sapeva infondere a chi gli parlava la fiducia, il senso di umana comprensione e confidenza che emana dalle persone corrette e leali. Credo non avesse nemici, né ne avesse mai avuto.

Il destino, che pur gli aveva concesso di godere paternamente le più preziose gioie familiari nella felicissima unione con la moglie Clementina Calverino, adorna delle medesime doti di bontà e di serenità, e con i figli

e la figlia Vittoria, non era stato buono con lui; sia nella sua infanzia, sia nella età matura, quando su di lui come su pochi si abbattono, in successione rapidissima, le più dolorose sventure: la morte del secondogenito Livio, tenente pilota, caduto nel cielo di Malta nel 1943; la morte del genero, ufficiale del G. N., scomparso con un Cacciatorepediniere al largo della Sardegna, dopo l'8 settembre 1943; il pericolo mortale sofferto in seguito alle ferite ed al seppellimento sotto le macerie del suo Istituto, nel bombardamento di Trieste del 10 giugno 1944, e la morte a 35 anni del primogenito ing. Enzo, per lo stesso male che doveva condurlo alla tomba. Ma ciò non aveva minimamente fiaccato il suo spirito; nel dopoguerra era stato giovanile animatore della ricostruzione del suo Istituto, e anima della creazione della Facoltà di Ingegneria e della Facoltà di Scienze di Trieste; e moltissimi al par di me, osservavano ammirati la sopportazione esemplare di tante sofferenze, che solo in qualche rarissimo momento potevano trasparire.

Lo studioso e il ricercatore, il cittadino esemplare, l'uomo buono che abbiamo cercato di rievocare rimarrà certamente caro ricordo in quanti hanno avuto la fortuna di conoscerlo, e luminoso esempio per quanti vorranno ben meritare della nostra patria.

PUBBLICAZIONI DI FRANCESCO VERCELLI

- [1] *Le teorie idrodinamiche delle sesse e loro applicazione al calcolo dei periodi e dei nodi delle sesse del Benaco*. «Mem. R. Ist. Lombardo», vol. XXI, fasc. I (1909).
- [2] *Le sesse del lago di Garda*. «Nuovo Cimento», ser. 5, vol. XX, agosto 1910.
- [3] *Le sesse*. «Natura», vol. I, p. 81, gennaio 1910.
- [4] *Les seiches du lac de Garde*. «Archives des Sciences» phys. et nat. de Genève», tomo XXX, p. 225 (1910).
- [5] *Risposta a una Nota del dott. Defant: «Sulle sesse del lago di Garda»*, «Nuovo Cimento», ser. 5, vol. XX, p. 357 (1910).
- [6] *Relazione e ricerche sulle osservazioni della temperatura del lago di Como fatte negli anni 1898-1905*. «Mem. R. Ist. Lombardo», ser. 3, vol. XXI, p. 145 (1911).
- [7] *Sulla previsione matematica della temperatura nei trafori alpini* (in coll. con C. SOMIGLIANA). «Mem. R. Acc. Scienze Torino», ser. 2, vol. LXIII, Sc. F.M.N., p. 327 (1912).
- [8] *Sulla previsione della temperatura nelle gallerie alpine*. «Giorn. di Geologia pratica», fasc. 2, 1913.
- [9] *Considerazioni complementari alla Memoria: «Sulla previsione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini»* di C. SOMIGLIANA e F. VERCELLI. «Atti R. Acc. Scienze Torino», vol. XLVIII, p. 836 (1913).
- [10] *Sulla determinazione dei coefficienti di conduttività termica mediante il raffreddamento di sfere*. «Nuovo Cimento», ser. 6, vol. VI, p. 427, dicembre 1913.
- [11] *Sulle temperature lungo la progettata galleria attraverso allo Spluga*. «Rend. R. Ist. Lombardo», ser. 2, vol. XLVII, p. 645 (1914).
- [12] *Sul gradiente termico alla superficie dei pianeti e sulla loro temperatura interna*. «Atti R. Acc. Scienze Torino», vol. XLIX, (1914).
- [13] *Sulla determinazione dei coefficienti di conduttività termica mediante il raffreddamento di sfere*. «Nuovo Cimento», ser. 6, vol. VIII, p. 403 (1914).
- [14] *Analisi armonica dei barogrammi e previsione della pressione barometrica*. «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. 5, vol. XXIV, I, p. 1120 (1915).

- [15] *Le sesse del Verbano*. « Rend. R. Ist. Lombardo », ser. 2, vol. XLVIII, p. 947 (1916).
- [16] *Oscillazioni periodiche e previsione della pressione barometrica*. « Mem. R. Ist. Lombardo », XXI, p. 309 (1916).
- [17] *Presagi meteorici in rapporto alle operazioni di guerra*. « Pubbl. Comando III Armata », gennaio 1918.
- [18] *Sul valore meccanico e fisico delle differenze e delle tendenze barometriche*. « Atti R. Acc. Scienze Torino », vol. LIII, p. 237 (1918).
- [19] *Il fattore atmosferico nei tiri di artiglieria*. L'« Aeronauta », I, 1918).
- [20] *Sulla oscillazione barometrica annua*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 5, vol. XXVIII, 2, p. 78 (1919).
- [21] *Forme tipiche di oscillazioni barometriche*. « La Meteorologia pratica », maggio-giugno 1920.
- [22] *Sulla previsione del tempo*. « Boll. Soc. Met. It. », 1921.
- [23] *Sulla dinamica delle oscillazioni barometriche*. « La Meteorologia pratica », fasc. 3-4, 1921.
- [24] *Sulla previsione dei termini di correzione nelle maree*. « Riv. Marittima », febbraio 1922.
- [25] *Un grande problema della natura alla luce delle nuove teorie*. « Riv. Marittima », marzo 1922.
- [26] *Costanti armoniche delle correnti di marea nello stretto di Messina*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 5, vol. XXXI, 2, p. 554 (1922).
- [27] *Temperature normali e anomalie termiche del clima di Trieste*. « Boll. Uff. Lavoro e Statistica », XLVII, trim. 3°, Trieste (1923).
- [28] *Crociera talassografica nello stretto di Messina*. « Riv. Marittima », gennaio 1923, p. 57.
- [29] *Le scienze fisiche e matematiche nelle opere di Dante*. « Riv. Marittima », febbraio 1923.
- [30] *Nuovi esperimenti di previsioni meteorologiche*. « Riv. Marittima », marzo 1923.
- [31] *Osservazioni sulla monografia del cap. F. Biazzi: « Sulla fisica del lago Maggiore »*, « Riv. Marittima », ottobre 1923, p. 91.
- [32] *Dati climatologici sulla pioggia a Trieste*. « Boll. Uff. Lavoro e Statistica », II, 2, Trieste (1924).
- [33] *Neue Versuche über meteorologische Voraussagen*. « Das Wetter », 10 (1924).
- [34] *I risultati delle crociere della R. Nave « Marsigli » nello stretto di Messina*. Nota I, *Le maree*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6, vol. I, p. 74 (1925).
- [35] *Idem*. Nota II, *Ricerche sulle correnti*. Ibid., p. 174 (1925).
- [36] *Idem*. Nota III, *Costruzione di tavole generali delle correnti per scopi nautici*. Ibidem, p. 220 (1925).
- [37] *La meteorologia come scienza*. « Scientia », vol. XXXVIII, p. 383 (1925).
- [38] *Scilla e Cariddi*. « Le Vie d'Italia », settembre 1925, p. 984.
- [39] *Campagna idrografica della R. Nave « Amm. Magnaghi » in Mar Rosso, 1923-24. Ricerche di Oceanografia fisica. Parte I, Correnti e Maree*. « Ann. Idrografici », vol. XI, p. 13 (1927), (vedi pure « Boll. n. 11 del Comit. Naz. It. Geod.-geofisico », p. 33, 1926).
- [40] *Crociera per lo studio dei fenomeni nello stretto di Messina. Parte I, Il regime delle correnti e delle maree*. « Comm. Intern. del Mediterraneo », Venezia 1925 (vedi pure « Boll. n. 11 del Comit. Naz. It. Geod.-geofisico », p. 27, 1926).
- [41] *Teoria della propagazione dell'energia raggiante nell'acqua*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6, vol. II, p. 198 (1925).
- [42] *Campagna idrografica della R. Nave « Amm. Magnaghi » in Mar Rosso, 1923-24. Ricerche di Oceanografia fisica. Parte II, Ricerche di ottica marina*. « Ann. Idrografici », vol. XI, p. 209 (1927).
- [42 bis] *Campagna idrografica della R. Nave « Amm. Magnaghi » in Mar Rosso, 1923-24. Ricerche di Oceanografia fisica. Parte III, Condizioni meteorologiche durante la crociera*. « Ann. Idrografici », vol. XI, p. 267 (1927).
- [43] *Tavole nautiche delle correnti nello stretto di Messina*. « Riv. Marittima », aprile 1926, p. 33.
- [44] *Lezioni di geografia matematica. Cartografia*. Litogr. per gli stud. dell'Università di Milano, 1926.
- [45] *I risultati delle crociere della R. Nave « Marsigli » nello stretto di Messina*. Nota IV, *Influenze dei fattori fisico-chimici sul regime delle correnti*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6, vol. III, p. 756 (1926).

- [46] *Sui risultati della campagna talassografica della « Magnaghi » nel Mar Rosso.* « Atti Soc. It. Progr. Scienze », XV riun. a Bologna 1926, p. 199.
- [47] *Crociere per lo studio dei fenomeni dello stretto di Messina.* Parte II, *Il regime fisico-chimico delle acque* (in coll. con M. PICOTTI). « Comm. Intern. del Mediterraneo », Venezia 1927.
- [48] *Lezioni di geografia fisica.* Litogr. per gli studenti dell'Univ. di Trieste, fasc. I e II, 1927.
- [49] *L'età della terra.* « Period. di Matem. », ser. 4, vol. VII, p. 129 (1927).
- [50] *Campagna idrografica della R. Nave « Amm. Magnaghi » in Mar Rosso, 1923-24. Ricerche di Oceanografia fisica.* Parte IV, *La temperatura e la salinità delle acque.* « Ann. Idrografici », vol. XI bis, p. 1 (1930).
- [50 bis] *Relazione sull'attività della Sezione di Oceanografia presentata all'Assemblea generale dell'U.I.G.G.* (Praga, settembre 1927). « Boll. n. 13 del Comit. Naz. Geod.-geofisico », p. 21 (1927).
- [51] *Cimanalisi e applicazioni.* « Atti Soc. It. Progr. Scienze », XVII riun. Torino, p. 322 (1928).
- [52] *Rilevi sperimentali su alcuni metodi geoelettrici.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6, vol. VIII, p. 342 (1928).
- [53] *La funzione potenziale compensatrice in un geoide ellissoidico di rotazione.* « Atti R. Acc. Scienze Torino », vol. LXV, p. 48 (1929).
- [54] *Il regime delle correnti nello stretto di Bab-el-Mandeb, in epoca estiva.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6, vol. X, p. 481 (1929).
- [55] *Lo studio degli stretti come vie di comunicazione fra i mari.* « Atti Congr. Intern. di Siviglia », 1929 (vedi pure « Boll. n. 18 del Comit. naz. it. Geod.-geofisico », p. 50, 1929).
- [56] *Osservazioni sulla Nota del prof. Oddone: « Sulla previsione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini ».* « Ann. Lavori Pubblici », fasc. 12, anno 1929.
- [57] *Metodo generale per l'analisi delle periodicità nei diagrammi statistici e sperimentali.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6, vol. XI, p. 625 (1930).
- [58] *Sui risultati della campagna oceanografica 1929 nel Mar Rosso.* « Atti Soc. It. Progr. Scienze », XIX riun. a Bolzano-Trento (1930).
- [58 bis] *Relazione sull'attività del R. Comitato Talassografico nell'esercizio 1928-29.* « Boll. n. 19 del Comit. naz. it. Geod.-geofisico », p. 42 (1930).
- [59] *Il regime del vento a Trieste nel decennio 1920-29.* « Riv. Mens. Città di Trieste », 1930.
- [60] *Osservazioni complementari sulla mia Nota: « Metodo generale per l'analisi delle periodicità nei diagrammi statistici e sperimentali ».* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6, vol. XII, p. 351 (1930).
- [61] *Onde barometriche e punti di simmetria.* « Boll. Comit. Naz. Geod.-geofisico », ser. 2, anno I, marzo 1931.
- [62] *Analisi delle periodicità nei diagrammi (Cimanalisi).* « Atti Ist. Naz. Assicurazioni », vol. III (1931).
- [63] *Il regime termico nelle grotte di San Canziano.* « Le grotte d'Italia », V, aprile-giugno 1931.
- [64] *Le esplorazioni talassografiche del Mar Rosso.* « Atti I Congr. Studi Coloniali », III (1931).
- [65] *Nuove ricerche sulle correnti marine del Mar Rosso.* « Ann. Idrografici », vol. XII, Genova (1931).
- [66] *Ricerche talassografiche italiane nei loro rapporti con la navigazione.* « Congr. Intern. di Nav. », Vienna 1931.
- [67] *La temperatura dei laghi.* « Bull. Conseil Intern. Recherches », n. 16, Sect. Hydrol. scient. », (1931).
- [68] *Alcuni problemi di geografia e di fisica del mare.* « Scientia », vol. LI, p. 137 (1932).
- [68 bis] *Penetrazione delle radiazioni nell'acqua marina.* « La Ric. Scientifica », anno III, febbraio 1932, p. 177.
- [69] *Ciò che sappiamo delle maree dell'Adriatico.* « La Ric. Scientifica », anno III, maggio 1932, p. 553.
- [70] *La perequazione dell'analisi delle curve.* « Boll. Comit. Naz. Geod.-geofisico », vol. II, n. 8 (1932).
- [71] *I tremiti della Terra.* « Scientia », vol. LII, p. 193 (1932).

- [72] *I nuovi problemi della stratosfera*. «Atti Soc. It. Progr. Scienze», XXI riunione a Roma (1932).
- [73] *Le nuove vedute sulla composizione dell'atmosfera*. «La Ric. Scientifica», anno IV, febbraio-1933, p. 133.
- [74] *L'Aria nella natura e nella vita*. I ediz. UTET, Torino 1933.
- [75] *Le ricerche geofisiche nel campo delle esplorazioni speleologiche*. «Atti I Congr. Speleol. Naz.», giugno 1933.
- [75 bis] *Marée et niveau moyen*. «Rap. Com. Intern. Explorat. Scient. Mediterr.», vol. VII, 1933.
- [76] *Metodi pratici per l'analisi delle curve oscillanti*. «La Ric. Scientifica», anno V, fasc. 7 (1934).
- [77] *La luce nel mare*. «Scientia», vol. LV, aprile 1934 (vedi pure «La Ric. Scientifica», anno V, I, p. 543, maggio 1934).
- [78] *Sulla propagazione delle radiazioni solari attraverso l'acqua*. «James Johnstone Memorial Volume», p. 340, Liverpool 1934.
- [79] *Cenni preliminari sulle nuove determinazioni delle costanti ottiche nelle acque marine*. «La Ric. Scientifica», anno V, 2, novembre 1934, p. 344.
- [80] *Le recenti misure subacquee di radiazione solare nel mare di Capri*. «Atti Soc. It. Progr. Scienze», XXIII riun. a Napoli (1934), p. 110.
- [81] *Organizzazione per lo studio delle radiazioni solari in Italia*. «Boll. Comit. Geod.-geofisico del C.N.R.», ser. 2, anno V, n. 8 (1935).
- [82] *La determinazione delle profondità ipocentrali*. «Boll. Comit. Naz. Geod.-geofisico», ser. 2, anno V, p. 15 (1935).
- [83] *Le previsioni meteorologiche nelle escursioni*. «Club Alpino Ital.», agosto 1935.
- [84] *Analisi delle sesse termiche nella Bahía de Palma de Mallorca*. «Notas y Resum., Inst. Españ. de Ocean.», n. 93, 1936.
- [85] *In memoria di Luigi De Marchi*. «Boll. Comit. Naz. Geod.-geofisico del C.N.R.», ser. 2, anno VI, p. 1 (1936).
- [86] *Commemorazione del Sen. prof. Luigi De Marchi*. «Atti R. Ist. Ven.», tomo XCVI, part I, p. 81 (1937).
- [87] *Onde, sesse e maree interne*. «Scientia», vol. LXI, p. 273 (1937).
- [88] *Ricerche talassografiche nei mari delle colonie italiane*. «Atti Soc. It. Progr. Scienze», XXV riun. a Tripoli (1936).
- [89] *Schemi di calcolo per l'analisi dei diagrammi oscillanti*. «La Ric. Scientifica», anno VIII, fasc. 11-12, p. 609 (1937).
- [90] *I mari italiani*. Cap. II (p. 29) del volume *Italia* dell'opera *Terra e Nazioni*, Vallardi, Milano 1936.
- [91] *La propagazione delle radiazioni solari nelle acque marine*. «La Laguna di Venezia», vol. I, parte II, tomo V (1937).
- [92] *Le variazioni attuali del medio livello marino*. «Commission int. pour l'espl. scient. de la Mer Méditerranée», Rapports, vol. XI, p. 215 (1937).
- [93] *Misure sulla penetrazione della luce nelle acque di Rodi*. «R. Comit. Talass. Ital.», Memoria 256 (1938).
- [94] *Terremoti naturali e terremoti artificiali*. «Sapere», marzo 1938, p. 156.
- [95] *La penetrazione delle radiazioni luminose nell'acqua di mare*. «R. Comit. Talass. Ital.», Memoria 271 (1939).
- [96] *Misure subacquee di radiazione di alcuni laghi alpini*. «Boll. Pesca, piscic. e idrob.», 5 (1939).
- [97] *L'esplorazione geofisica dei campi petroliferi*. Da *I combust. ital. ed il loro impiego*, «R. Acc. Scienze Torino», 1939.
- [98] *Analizzatore meccanico delle curve oscillanti*. «Comment. Pont. Ac. Sc.», vol. III (1939).
- [99] *Colore e trasparenza delle acque nella Laguna di Venezia*. «Atti R. Ist. Ven.», tomo XCIX Cl. Sc. M. N., p. 53 (1939).
- [100] *Analizzatore meccanico*. «La Filotecnica», n. 1 (1940).
- [101] *Guida per l'analisi delle periodicità nei diagrammi oscillanti*. «Comit. Talass. It.», Mem. 285 (1940).

- [102] *Le maree e le sesse nel porto di Zara*. « La Ric. Scientifica », anno XII, gennaio 1941, p. 32.
- [103] *Onde atmosferiche*. « Scientia », vol. LXXI, p. I (1942).
- [104] *Ricerche sulla struttura e sulla previsione dei barogrammi*. « La Ric. Scientifica » febbraio-marzo 1942, p. 99.
- [105] *Convegno geofisico nell'Università di Padova*. « Riv. geomineraria », n. 2-3, 1943.
- [106] *Periodicità e previsioni barometriche*. « Riv. Meteor. Aeron. », luglio 1943.
- [107] *Caratteristiche delle onde barometriche*. « Comment. Pont. Ac. Scienze », vol. X, n. 1 (1945).
- [108] *Analisi periodale dei diagrammi*. « Tecnica Ital. », n. s., vol. I (Trieste (1946).
- [109] *Giovanni Agamennone nel suo 90° compleanno*. « Geofisica pura ed applicata », vol. XII, fasc. 3-4 (1948).
- [110] *Relazioni fra attività solare e fenomeni meteorologici e climatici, con speciale riguardo ai lavori compiuti in Italia* (in coll. con S. POLLI), « Acc. Naz. Lincei, Problemi attuali di Sc. e Cult. », quaderno 7, p. 75 (1949).
- [111] *Il superamento delle altezze e delle profondità nelle esplorazioni geofisiche*. « Atti Ist. Ven. », tomo CVII, parte I, p. 41 (1949).
- [112] *Periodicità dendrologiche e cicli solari*. « Annali di geofisica », vol. II, n. 4, p. 477 (1949).
- [113] *Sui fattori tellurici delle epoche glaciali*. « Quaderno di studio n. 16. Acc. Naz. Lincei », p. 37 (1950).
- [114] *La dendrologie*. « Scientia », vol. LXXXV, p. 16 (1950).
- [115] *Trasparenza e colore delle acque della laguna di Venezia*. « Archivio di Oceanogr. », VII, I (1950).
- [116] *Livelli marini e sfacelo dei ghiacciai*. « La Ric. Scientifica », anno XXI, aprile 1951, p. 497.
- [117] *Il moto dei ghiacciai*. « Scientia », vol. LXXXVI, p. 13 (1951).
- [118] *Il mare, i laghi e ghiacciai*. UTET, Torino 1951.
- [119] *Le problème des microséismes*. « Pont. Acad. Scientiarum », Roma, Semaine d'étude sur le problème des microséismes, 1951.
- [120] *Onde microbariche e generi dei microsismi* (in collab. con C. MORELLI). Ibidem.
- [121] *Osservazioni sui rapporti fra onde microbarometriche, mareografiche e microsismi* (in collab. con F. MOSETTI). Ibidem.
- [122] *Commemorazione del m. e. Ernesto Laura*. « Atti Ist. Ven. » vol. CXIII, parte I, p. 53 (1952).
- [123] *Vicende dell'idrosfera*. « Scientia », vol. LXXXVII, p. 69 (1952).
- [124] *Le ignote risorse alimentari del mare*. « La Ric. Scientifica », aprile 1952, p. 637.
- [125] *L'Aria nella natura e nella vita*. 2ª ediz. UTET, Torino 1952.
- [126] *Les variations actuelles des niveaux moyens de la Mer*. « Atti IV Congr. Int. del Mare », Ostenda 1951; pubbl. Amm. Marina Belga.

Relazione sull'attività scientifica dell'Ist. Geof. di Trieste:
in « Ricerca Scientifica ».

- Anno 1935 (pubbl. aprile 1936 p. 321);
 » 1936 (» marzo 1937 » 241);
 » 1937 (» aprile 1938 » 348); triennio 1935-37
 » 1938 (» aprile 1939 » 354); (pubbl. giugno 1938, p. 621)
 » 1939 (» marzo 1940 » 198);
 » 1940 (» genn. 1941 » 114).

idem « Centro Studi Talassografici ».

Anno 1946 (pubbl. luglio-agosto 1947. p. 1099 (« Ric. Scient. e Ric. », anno XVII)

Anno 1947-48 (Pubbl. ottobre 1948 p. 1286);

- » 1948-49 (» aprile 1950 » 461);
 » 1950-51 (» maggio 1952 » 922).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente porge il suo saluto a tutti i Colleghi e, in particolare, ai nuovi Soci, presenti alla seduta.

Comunica poi che hanno ringraziato per la nomina i Soci Nazionali Geremia d'Erasmo, Rodolfo Margaria, Corradino Mineo, Giovanni Sansone, Beniamino Segre; i Soci Corrispondenti Pietro Caldirola, Attilio Colacevich, Dario Graffi, Giuseppe Moruzzi; il Socio Straniero Fernando de Castro.

Il Prof. Giordani informa i Colleghi che nei mesi trascorsi dal giugno ad oggi sono purtroppo deceduti: in data 23 agosto, il Socio Corrispondente Alfredo Pochettino della Categoria III, Sezione Fisica, Professore di Fisica sperimentale nell'Università di Torino; in data 24 agosto, il Socio Corrispondente Prof. Attilio Colacevich della Categoria II, Sezione Astronomia, Direttore dell'Osservatorio Astronomico di Napoli, eletto Socio nello scorso mese di giugno; in data 4 settembre, il Socio Straniero Prof. Karl Willy Wagner della Categoria I (Matematica, Meccanica e Applicazioni); in data 23 ottobre, il Socio Straniero Prof. Maurice Lugeon della Categoria IV (Geologia, Paleontologia, Mineralogia e Applicazioni).

Il Presidente invia un pensiero di reverente omaggio alla memoria degli insigni Colleghi scomparsi e annunzia che essi saranno commemorati nelle prossime sedute della Classe.

Il Presidente dà poi la parola al Socio Tenani che rievoca la figura e l'opera del compianto Collega Francesco Vercelli.

Il Presidente ringrazia il Socio Tenani per le sue elevate e commosse parole e rinnova ai familiari del prof. Vercelli, presenti alla commemorazione, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'insigne scienziato.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che sono presenti alla seduta il matematico E. R. Lorch e lo zoologo e genetista L. C. Dunn, entrambi professori alla Columbia University di New York, che si tratterranno qualche tempo in Italia per dedicarsi a studi e ricerche, rispettivamente nel campo della matematica e in quello della genetica umana. Ai due illustri ospiti il Prof. Giordani porge il caldo saluto della Classe e suo personale.

Il Presidente informa la Classe che il Ministero della Pubblica Istruzione, al quale furono a suo tempo trasmessi i voti formulati dall'Accademia, nelle adunanze tenute dalle due Classi il 10 gennaio e il 14 febbraio del corrente anno, per la integrità del patrimonio forestale e di bellezze naturali della tenuta di S. Rossore, ha provveduto ad interessare in merito il Ministero delle Finanze - Direzione Generale del Demanio - e il Ministero dell'Agricoltura e delle Foreste e ha ora comunicato all'Accademia le risposte dei suddetti Dicasteri.

Quello dell'Agricoltura e delle Foreste, premesso che fin dal 1948 aveva riconosciuto l'opportunità che i boschi della tenuta di S. Rossore passassero al patrimonio dell'Azienda di Stato per le Foreste Demaniali, al fine di consentire una rigorosa tutela dell'equilibrio biologico della zona, nonché l'integrità di quel patrimonio forestale e di quello ambiente naturale nel suo complesso, ha confermato tale opinione, formulando avviso contrario alla costituzione di un Parco Nazionale, il quale, oltre a risultare di limitata estensione, non potrebbe essere mantenuto bene, a causa delle scarse disponibilità finanziarie destinate dallo Stato per la conservazione e le necessità funzionali di tali Parchi che sono appena sufficienti per quelli già costituiti.

Il Ministero delle Finanze - Amministrazione dei beni demaniali già di dotazione della Corona - dopo aver rilevato che tutte le iniziative proposte sulla stampa circa il Parco di S. Rossore sono già cadute, perché gli organi politici, amministrativi e culturali che le avevano suggerite hanno riconosciuto l'opportunità e la necessità che la tenuta continui ad essere amministrata da un unico Ente e possibilmente da quello attuale, ha assicurato che continuerà a rivolgere tutte le sue cure alla predetta tenuta che avrà definitiva sistemazione, come tutti gli altri beni già di dotazione della Corona, mediante la legge speciale prevista dall'art. 13 della legge 9 agosto 1948, n. 1077.

Il Presidente crede che l'Accademia possa per il momento considerarsi soddisfatta dalle risposte dei due Ministeri e che, al massimo, si potrà ricordare la questione al Ministero delle Finanze - Amministrazione dei beni demaniali già di dotazione della Corona - al momento opportuno e cioè quando entrerà in vigore la sopra citata legge speciale.

Il Socio Zagar, per incarico del Collega Abetti, comunica che l'Osservatorio di Arcetri sta organizzando, analogamente a quanto è stato fatto per l'eclisse del 1952 nel Sudan, una spedizione per osservare l'eclisse totale di sole del 30 giugno 1954, visibile nella Svezia Meridionale. Per sopperire alle spese necessarie a tale spedizione, il Socio Abetti ha chiesto alla Presidenza dell'Accademia di concedere un contributo finanziario che verrà integrato con contributi di altri Enti. Tale concessione sarebbe di grande importanza per l'Osservatorio di Arcetri perché permetterebbe di mettere in prima linea, fra i promotori della missione italiana, l'Accademia dei Lincei, alla quale, come nelle precedenti eclissi del 1936 e 1952, saranno comunicati, per la pubblicazione, i risultati ottenuti.

Il Presidente propone che la Classe deliberi, in linea di massima, la concessione del contributo richiesto dal Prof. Abetti, deferendo al Consiglio di Presidenza ogni decisione circa l'ammontare del contributo stesso.

La proposta è approvata all'unanimità.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato, pervenuto all'Accademia in data 2 settembre c. a., della Signora Ada Maria Pellacani, contenente, come risulta dalla lettera di accompagnamento e dalle annotazioni sulla

busta del plico, una « relazione sopra una teoria cosmica comunicata al Consiglio Nazionale delle Ricerche fin dal 1940, pubblicata nel «Sogno di un pazzo» (romanzo Carabba-Lanciano 1940) con l'aggiunta inedita di una dimostrazione conclusiva comprovante l'enunciata teoria ».

Il Presidente presenta anche un altro plico suggellato consegnato all'Accademia in data 7 agosto c. a., dall'Ing. Roberto Gualtieri, contenente, come risulta da una annotazione sulla busta del plico, una nota su «Una alternativa al principio di Huygens ».

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli dei sopra citati plichi, delibera che gli stessi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente presenta il numero 8-9 (agosto-settembre 1952) degli «Atti della Rassegna Tecnica» della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino, che contiene, tra l'altro, articoli di elettrotecnica dedicati al Prof. Giancarlo Vallauri per il suo 70° anno ed è lieto di associarsi, a nome dell'Accademia, all'omaggio reso all'illustre Collega che ha dedicato tutta la sua vita e la sua fervida attività alla Scienza e alla Scuola.

Il Socio Segre offre in omaggio e presenta il 2° volume dei «Lavori della Società Matematica di Mosca», da poco apparso, mettendo in evidenza che esso contiene sette importanti Memorie di noti Matematici russi e ricordando che egli è stato incaricato di presentare all'Accademia il volume stesso dal Prof. S. Finikoff dell'Università di Mosca, da lui incontrato, assieme con il Prof. A. D. Alexandroff, Rettore dell'Università di Leningrado, al Simposio internazionale di Geometria differenziale svoltosi nel settembre scorso a Venezia, Padova, Bologna e Pisa.

Il Socio Segre osserva che è la prima volta che studiosi sovietici intervengono a Congressi internazionali di matematica nel mondo occidentale e, mentre constata con vivo compiacimento questa ripresa di contatti diretti con gli scienziati russi, fa voti per l'intensificarsi delle relazioni culturali fra l'Italia e l'U.R.S.S.

Il Socio Zagar, per incarico del Collega Abetti, presenta il volume contenente gli Atti dell'XI Convegno «Volta», svoltosi a Roma e a Firenze dal 14 al 19 settembre 1952, sul tema «Problemi della fisica solare», ponendo in evidenza che a tale Convegno hanno partecipato illustri scienziati italiani e stranieri e che i lavori hanno dato dei risultati veramente lusinghieri.

Sono state tenute, oltre la seduta inaugurale, altre sedute dedicate rispettivamente ai seguenti sottotemi: Atmosfera solare; Fotosfera e cromosfera; Protuberanze; Corona; Elettrodinamica solare; Campi magnetici solari; Radioemissioni solari; Nuovi metodi per lo studio del sole.

Il Socio Bianchi, anche a nome del Collega G. B. Dal Piaz, offre in omaggio e presenta il volume XVII (1951-52) delle «Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova» che inizia la nuova serie delle

Memorie dell'Istituto Geologico di quella Università, iniziate nel 1912 dal Collega Giorgio Dal Piaz e da lui dirette per oltre un trentennio. La nuova serie ha assunto il titolo di «Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia della Università di Padova», per aderire, nella veste e nella intestazione, al crescente apporto di lavori dell'Istituto Mineralogico nel campo delle ricerche petrografiche e minerarie e per attestare l'intima e feconda collaborazione fra i due Istituti affini, che ha tratto anche nuovo impulso dalla creazione del «Centro di studio per la petrografia e la geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche» presso l'Ateneo padovano. Il volume, che contiene complessivamente 12 lavori, comprende anche un importante contributo di Colleghi stranieri, che ha un particolare interesse perché rivolto all'illustrazione geologico-petrografica di un settore delle Alpi piemontesi.

Il Socio Pupilli offre in omaggio e presenta la prima versione in lingua inglese del Commentario del Galvani, tradotto dal Prof. Robert Montraville Green e contenente una introduzione dello stesso Socio Pupilli sulla vita e le opere del grande scienziato italiano.

Il Socio De Blasi offre in omaggio, a nome della Casa Sansoni, il V volume dell'«Enciclopedia Medica Italiana» edita, sotto la sua presidenza, dalla predetta casa nelle «Edizioni scientifiche», dirette, con la massima competenza, dai Proff. Benedetto e Federico Gentile. Dopo aver brevemente illustrato il V volume, il Socio De Blasi informa che è prossima la pubblicazione del VI.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno offerto opere in omaggio.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Cotronei, Segre, Picone, Tonzig, Vernoni, Bompiani, Signorini, Semerano, Caloi e Pensa.

Il Socio Picone presenta una Memoria dal titolo: «Sulle condizioni necessarie per un estremo nel calcolo delle variazioni».

Viene poi letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CALOI P. – Onde longitudinali e trasversali guidate dall'astenosfera.

SEGRE B. – Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hesiane. Nota II.

BERTOLINI F. – Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Nota I (pres. dal Socio M. PICONE).

COCCHI G. – Il moto laminare vario in tubi cilindrici di sezione circolare (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

FAVERO P. e VECCHI E. – Perfezionamento dell'apparecchiatura a sparpagliamento multiplo in polarografia oscillografica (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

FERRO R. - Cristallografia differenziale delle polveri. - Esami differenziali di primo ordine. Nota II (pres. dal Socio L. ROLLA).

FERRO R. - Cristallografia differenziale delle polveri. Analisi di polveri cristalline eterogenee. - Esami differenziali di secondo ordine. Nota III (pres. dal Socio L. ROLLA).

FUSCO R. e BIANCHETTI G. - Sintesi dell'azaadamantano (pres. dal Socio L. CAMBI).

IPPOLITO F., LUCINI P. e SPADA A. - Osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio, nella bassa valle dell'Agri (Basilicata) (pres. dal Socio G. D'ERASMO).

MASOTTI A. - Su alcune questioni di media nei moti centrali (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

PALUMBI G. - Prime osservazioni sulle connessioni fra corredo nervoso della leptomeninge e dei vasi encefalici e sostanza nervosa cerebrale (pres. dal Socio A. PENSA).

PERRI T. - Correlazione tra sistema nervoso ed arti. Esperienze di trapianto di abbozzi di arto in embrioni di *Bufo vulgaris* (pres. dal Socio G. COTRONEI).

PEYRONEL G. - Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota I (pres. dal Socio L. CAMBI).

PEYRONEL G. - Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota II (pres. dal Socio L. CAMBI).

PIRANI R. - I minerali del gruppo dell'Ortler. - IX. Actinolite e antofillite di Vedetta Alta. - Hochwart (Ultimo) e loro solubilità (pres. dal Corrisp. C. ANDREATTA).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 novembre 1953

AMAND Pierre St. — Vedi: BUWALDA John P. and AMAND Pierre St.

Atti del I Congresso Internazionale di Integrazione Scientifica sul tema «L'Unità cosmo-psico-biofisica». Trieste 18-19-20 settembre 1952. Trieste, Accademia Universale del Governo Cosmo-Astrofisico, 1953. Pp. 280, in-8°.

Atti del II Congresso Nazionale di Medicina Sociale. Genova, 4-5-6-7 ottobre 1951. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1952. Pp. 398, in-8°.

Atti e Rassegna Tecnica della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino. Fascicolo n. 8-9 (agosto-sett. 1952) contenente articoli di elettrotecnica dedicati

dagli Autori al Prof. Giancarlo Vallauri per il suo settantesimo anno.

BENIOFF Hugo. — *Seismographs*. Estr. da «Sphere», 1953, January-February.

BENIOFF Hugo and GUTENBERG Beno. — *Progress Report, Seismological Laboratory, California Institute of Technology, for 1951*. Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», vol. XXXIII, 1952, n. 5.

BOSSOLASCO Mario. — *Per l'unificazione dei servizi geofisici e meteorologici in Italia*. Estr. da «Geofisica e Meteorologia», vol. I, 1953, nn. 4-5.

BUWALDA John P. and AMAND Pierre St. — *The recent Arvin-Tehachapi, Southern Cali-*

- fornia, *Earthquake*. Estr. da « Science », vol. CXVI, 1952.
- BYERLY Perry. — *Fifteenth Award of the William Bowie Medal Citation*. Estr. da « Transactions of the American Geophysical Union », vol. XXXIV, 1953, n. 3.
- CAMERA DI COMMERCIO, INDUSTRIA E AGRICOLTURA. TORINO. — *L'altipiano di Poirino*. Torino, 1953. Pp. 101, in-8°, con tavv. (Quaderni di cronache economiche, X).
- COMEL Alvise. — *L'origine della Pedologia Climatica in Italia*. Estr. da « Atti dell'Accademia di Udine », s. 6ª, vol. XI, 1948-1951.
- CORUZZI Cesare. — *Il tabagismo e le altre intossicazioni voluttuarie*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1953. Pp. 174, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-sociali, 22).
- DAPONTE Antoine (PONTAX). — *L'Univers dévoilé. Nouvelle Synthèse Astronomique*. 2^{me} partie. Athènes, 1953. Pp. 200, in 8°, con figg.
- DE ANGELIS Pietro. — *Giovanni Faber Linceo, Primario in Santo Spirito in Saxia (1598-1629). Il microscopio*. Roma, 1953. Pp. 32, in-8° (Collane di Studi Storici sull'Ospedale di S. Spirito in Saxia e sugli Ospedali Romani).
- Enciclopedia Medica Italiana*. Vol. V: lettere H-L. Firenze, Sansoni, 1953. Pp. XII-2327, in-4°, con tavv. e figg.
- ERGIN Kazim. — *Amplitude of P_cP , P_cS , and S_cS and S_cP in deep-focus earthquakes*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XLIII, 1953, n. 1.
- *Energy ratio of the seismic waves reflected and refracted at a rock-water boundary*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XLII, 1952, n. 4.
- First Cape Catalogue of Stars for the Equinox of 1950-0*. London, Her Majesty's Stationery Office, 1953. Pp. 102, in-4°.
- GOMARASCA, Piero e QUARTI Bruno. — *Il Cancro*. Milano, Brioschi, 1953. Voll. 2, in-8°.
- GREEN Robert Montraville. — *Galvani on electricity*. Cambridge, Elizabeth Licht, 1953. Pp. XV-97, in-8°, con tavv.
- GUTENBERG Beno. — *Earthquakes: Past and Future*. Estr. da « Sphere », 1952.
- *Microseisms, microbaroms, storms and waves in Western North America*. Estr. da « Transactions of the American Geophysical Union », vol. XXXIV, 1953, n. 2.
- GUTENBERG Beno. — Vedi: BENIOFF Hugo and GUTENBERG Beno.
- LIEBENBERG Otto. — *Der Einfluss verschiedener Umweltfaktoren auf die Befruchtungsfähigkeit der Vattertiere*. Radebeul u. Berlin, Neumann, 1953. Pp. 87, in-8°.
- Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova*. Vol. XVII, 1951-52.
- Palaeozoologica Groenlandica*. Afhandlinger om oestgroenlandske vertebratfossiler indsamlede paa de af dr. Lauge Koch i aarene 1926-38 ledede ekspeditioner. Voll. IV-VI. Koebenhavn, 1950-52, voll. 3, in-8°.
- Parassitologia (1949-1950)*. Montevideo, Unesco, 1953. Pp. 287, in-8° (Latin American Contribution to Scientific Progress).
- PIERACCINI Gaetano. — *Lavoro femminile casalingo ed estracasalingo. Eugenica ed eutenica*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1953. Pp. 138, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-sociali, 21).
- POLACCO Giuseppe. — *Le vie dell'infinito*. Saggio di analisi elementare. Parte I. *Lo spazio piano*. Roma, U. Pinnarè, 1953. Pp. 253, in-8°.
- QUARTI Bruno. — Vedi: GOMARASCA Piero.
- ROSSINI Angelo. — *Dialogo sulla propagazione della luce e determinazione della massa del fotoforo (Fotone)*. II ed. Civitavecchia, 1953. Pp. 9, in-8°.
- RUSSO Achille. — *Alcuni risultati di studi biologici nel periodo 1892-1952*. Estr. da « Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 6ª, vol. XI, 1952-53.
- *Etiologia dei tumori ed i due fattori che vi collaborano. Identità di origine tra tumori e partenogenesi sperimentale*. Estr. da « Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 6ª, vol. IX, 1952-53.
- STEINHAUS Eward A. — *Diseases of Insects Reared in the Laboratory or Insectary*. University of California, 1953. Pp. 26, in-8°.
- SYMPOSIUM (PRIMO) INTERNAZIONALE DI CHIMICA MICROBIOLOGICA. Roma, 25-30 giugno 1951. — *Relazioni*. Roma Fondazione Emanuele Paternò, 1953. Pp. 372, in-8° (Rendiconti Istituto di Sanità, vol. XVI, fascicolo speciale).
- Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obščestva*. Moskva. T. II, 1953.

- UNION INTERNATIONALE DES PRODUCTEURS
et DISTRIBUTEURS D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE.
Neuvième Congrès. Rome, 15-23 septembre
1952. Milano, Stucchi, 1952. Vols. 3, in-4°.
- VAGLIASINDI Carmelo. — *La causa prima che*
fu comune a tutte le ère glaciali. Randazzo,
Art. Graf. Salerno, 1953. Pp. 24, in-4°.
- VALLAURI Giancarlo. — Vedi: *Atti e Ras-*
segna Tecnica della Società Ingegneri e
Architetti in Torino.
- VISCARDINI MARIO. — *Hypersophia. La strut-*
tura dell'Universo. Milano, Edizioni U.
H. U., 1953. Pp. 117, in 8°.
- WEIMER Th. — *Atlas de profils lunaires*.
Paris, Observatoire, 1952. Pag. 1 e 12 tavv.
- WRIGHT Wilfred L. — *Principia and*
Equations of Pandectic Meteorology. Los
Angeles, The Pacific Press, 1953. Pp. 55,
in 8°.

D. DE BLASI e U. AMALDI

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 dicembre 1953

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane.* Nota II ^(*) del Socio BENIAMINO SEGRE ^(**).

6. Proveremo ora che:

Se una curva armonica reale f , d'ordine n , ha in un punto reale O un punto r -plo, e se $2 \leq r < n$, allora l'hessiana h di f ha in O esatta molteplicità $3r - 4$. Più precisamente, la curva h passa per O con r rami lineari reali a tangenti distinte, che ivi ordinatamente toccano gli r rami di f . Se $r = 2$, non vi sono altri rami di h uscenti da O ; se $r > 2$, gli ulteriori rami di h di origine O sono immaginari, ed hanno come tangenti in O le due tangenti alla conica assoluto (4) uscenti da O , contate ciascuna $r - 2$ volte.

Sul piano ellittico (n. 3), possiamo assumere coordinate (x, y, z) tali che O abbia le coordinate $(0, 0, 1)$. Risulterà allora

$$(8) \quad f(x, y, z) = \varphi(x, y) \cdot z^{n-r} + \dots,$$

dove φ denota una forma di grado r (non identicamente nulla) nelle x, y , ed i puntini stanno per termini di grado superiore ad r nelle x, y . Attualmente, il complesso dei termini di grado più basso nelle x, y nello sviluppo dell'hessiano (2) di f è quindi dato da

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & (n-r)\varphi_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & (n-r)\varphi_2 \\ (n-r)\varphi_1 & (n-r)\varphi_2 & (n-r)(n-r-1)\varphi \end{vmatrix} \cdot z^{3n-3r-2} =$$

$$= -\frac{(n-r)(n-1)}{r-1} \varphi \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} \cdot z^{3n-3r-2}.$$

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1953.

(**) Continuazione della Nota I, apparsa in questo volume dei « Rendiconti », pp. 237-242.

Da qui segue subito il precedente enunciato, qualora si osservi che l'armonicità della (8) implica l'armonicità della $\varphi(x, y)$ e si rammentino i risultati del n. 2.

È chiaro che, nei punti sufficientemente vicini ad O in cui l'espressione (9) non si annulla, il segno di tale espressione coincide col segno dell'hessiano h di f . Tenuto conto del n. 2, si ha quindi che:

Nelle ipotesi suddette, le r tangenti di f in O spezzano l'intorno di O in $2r$ porzioni, nelle quali alternativamente $h(x, y, z)$ assume il segno $+$ ed il segno $-$. In nessun caso la curva h può avere in O un punto multiplo isolato.

7. Presa una qualunque curva armonica reale f d'ordine $n > 2$, avente una curva hessiana h determinata (d'ordine $3n - 6$), sia $O'(x', y', z')$ un punto reale arbitrario di h . Secondo quanto asserito nel n. 1, ci proponiamo di dimostrare che:

In un intorno di O' , la forma hessiana assume sia valori positivi che valori negativi.

In base al n. 6, basterà stabilire questo risultato nell'ipotesi che O' non sia un punto multiplo di f . Raggiungeremo tosto l'intento, dopo aver provato - nei nn. 8-10 - il seguente fatto geometrico più preciso.

Detta $r (\geq 1)$ la molteplicità di h nel punto O' , che supponiamo non sia punto multiplo di f , la curva h passa necessariamente per O' con r rami lineari reali, dotati in O' di r tangenti distinte.

Tenuto anche conto dei nn. 4, 6, da qui seguirà inoltre che

L'hessiana di una qualunque curva armonica reale risulta priva di punti reali isolati e di rami reali luoghi di punti multipli.

8. Poichè la penultima proposizione del n. 7 è manifestamente ovvia per $r = 1$, basterà dimostrarla per $r \geq 2$. A tal uopo osserviamo anzitutto che, l'ipotesi che O' giaccia su h , equivale a ciò che la conica polare di O' rispetto ad f , ossia la conica di equazione

$$(10) \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 f'_{ij} x_i x_j = 0$$

(ove - qui ed in seguito - gli apici stanno per indicare la sostituzione delle x', y', z' in luogo delle x, y, z), risulti indeterminata o dotata di punto doppio, O . Nel primo caso, il punto O' dovrebbe essere almeno triplo per f , ciò che è stato escluso. Potremo dunque limitarci al secondo caso, e supporre che O ed O' siano distinti, poichè altrimenti il punto O' - doppio per la relativa conica polare - sarebbe anche doppio per f , contro al supposto.

In forza del n. 4, la conica degenera (10) risulta armonica, e si spezza quindi in due rette reali e distinte uscenti da O , fra loro coniugate rispetto all'assoluto (4). Possiamo quindi introdurre sul piano

ellittico definito da quest'ultimo coordinate (x, y, z) , in guisa che le due rette suddette vengano ad avere le equazioni $x = 0$ ed $y = 0$, sicchè il punto O diverrà quello di coordinate $(0, 0, 1)$. La conica (10) si ridurrà così alla $xy = 0$, il che significa che attualmente risulterà:

$$(11) \quad f'_{11} = f'_{22} = f'_{33} = f'_{12} = f'_{23} = 0, \quad f'_{13} \neq 0.$$

In virtù delle (11), i primi quattro addendi nell'ultimo membro della (2) — uguagliati a zero — rappresentano curve aventi rispettivamente in O' molteplicità non inferiori a $3, 3, 3, 2$. Affinchè l'hessiana h ammetta O come punto r -plo, con $r \geq 2$, occorre quindi che la curva $f'_{12} f'_{33} = 0$ (ottenuta uguagliando a zero il restante addendo) — eppertanto altresì la $f'_{33} = 0$ — sia indeterminata oppure abbia in O' un punto almeno doppio. Tratteremo ora successivamente queste due alternative.

9. Se f_{33} *svanisce identicamente*, risulta integrando

$$(12) \quad f = \alpha(x, y) + z\beta(x, y),$$

dove α e β sono due forme binarie, necessariamente armoniche e dei gradi n ed $n-1$, la seconda delle quali non svanisce identicamente in virtù dell'ipotesi che non sia $h \equiv 0$.

D'altro canto, in forza della (12), f ha in O un punto $(n-1)$ -plo, ed inoltre risulta

$$-h = (\alpha_{11}\beta_2^2 - 2\alpha_{12}\beta_1\beta_2 + \alpha_{22}\beta_1^2) + \frac{n-1}{n-2}\beta(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)z;$$

sicchè la curva h , d'ordine $m = 3n - 6$, ha attualmente un punto $(m-1)$ -plo in O . Poichè O' è distinto da O e multiplo per h (n. 8), così la retta OO' (rappresentabile uguagliando a zero una forma lineare reale nelle sole x, y) dev'essere una componente di h , e quindi pure di $\beta(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2) = 0$. Ma l'hessiano $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$ della forma binaria armonica β non ammette alcun fattore lineare reale, e β non possiede che fattori lineari semplici (n. 2). Ne discende che la retta OO' figura come componente semplice della h , la quale consiste ulteriormente di una curva d'ordine $m-1$ passante $m-2$ volte per O . Affinchè h abbia un punto multiplo in O' , occorre che questa componente residua passi per O' ; e non vi può passare che semplicemente, e senza toccare ivi la retta OO' , non potendo essa contenere la OO' come componente. Dunque h ha ora in O' un *punto doppio a tangenti reali e distinte*, ciò che dimostra il penultimo teorema del n. 7 nelle ipotesi attuali.

10. Passiamo a studiare la seconda delle due possibilità distinte alla fine del n. 8; supponiamo cioè che, la forma $f_{33}(x, y, z)$ non annullandosi identicamente, la curva f_{33} possenga in O' un punto di esatta molteplicità $s \geq 2$. Dimostreremo che:

Allora risulta $r = s$, e le curve h, f_{33} ammettono necessariamente in O' le stesse tangenti.

Da qui seguirà subito il penultimo teorema del n. 7 nel caso presente, dopo aver osservato che la curva f_{33} è armonica (n. 4), ed aver rammentato il penultimo enunciato del n. 4.

Osserviamo anzitutto che, poichè per ipotesi la curva f_{33} ha un punto multiplo in O' , valgono le

$$(13) \quad f'_{133} = 0 \quad , \quad f'_{233} = 0$$

e la

$$(14) \quad f'_{333} = 0.$$

D'altronde dalla (1), derivando i due membri rispetto a z , si ricava l'identità $f'_{113} + f'_{223} + f'_{333} = 0$; sicchè, scrivendo che questa è soddisfatta in O' ed usufruendo della (14), si vede che dev'essere

$$(15) \quad f'_{113} = -f'_{223}.$$

Le (13), (15) mostrano che, se la forma f_{13} ha in O' derivate prime non tutte nulle, lo stesso è della f_{23} ; e viceversa. Ciò significa che le curve f_{13}, f_{23} hanno simultaneamente in O' un punto semplice od un punto multiplo (incluso nel secondo caso la possibilità che tali curve siano indeterminate, e cioè che le forme f_{13}, f_{23} risultino identicamente nulle). Proveremo però che, di fatto, la prima alternativa non può presentarsi.

Supposto invero che tale alternativa abbia luogo, e tenuto conto delle (13), le rette tangenti in O' alle curve f_{13}, f_{23} sarebbero ben determinate ed avrebbero precisamente le equazioni

$$(16) \quad f'_{113}x + f'_{123}y = 0 \quad , \quad f'_{123}x + f'_{223}y = 0;$$

esse risulterebbero inoltre fra loro ortogonali, e quindi certamente distinte, in forza della (15). Il punto O' , quale intersezione delle (16), non potrebbe allora differire dal punto $O(0, 0, 1)$; e ciò contraddirebbe quanto ammesso nel primo capoverso del n. 8.

Vale dunque la seconda alternativa, ossia ciascuna delle forme f_{13}, f_{23} , se non svanisce identicamente, rappresenta - uguagliata a zero - una curva avente un punto multiplo in O' . In base alla (2), tanto basta per concludere nel modo enunciato al principio del presente numero, ove si supponga $s = 2$ od $s = 3$. Infatti in tale ipotesi, tenuto anche conto delle (11), si vede subito che i singoli addendi che compaiono nell'ultimo membro della (2), se non svaniscono identicamente, rappresentano - uguagliati a zero - curve dotate in O' di punto almeno quadruplo; fatta soltanto eccezione per l'ultima di dette curve, la quale possiede in O' un punto di molteplicità s (uguale a 2 od a 3) inferiore alle altre, avendo in O' le stesse tangenti della curva f_{33} . E da qui segue senz'altro quanto dianzi asserito.

Con analoga argomentazione si stabilisce il risultato voluto anche per $s > 3$, dopo aver provato che:

Se $s \geq 3$, tanto la curva f_{13} che la f_{23} o sono indeterminate od hanno in O' un punto almeno s -plo.

Dimostreremo questo risultato per assurdo, ammettendo che, per esempio, la f_{13} non risulti indeterminata ed abbia in O' un punto di molteplicità $t < s$; e si ricordi che dev'essere $t \geq 2$, in base a ciò che precede. La curva f_{13} è armonica, ed ammette quindi in O' t tangenti reali e distinte (n. 4), sicchè, essendo $t \geq 2$, O' risulta il solo punto comune a queste t rette. L'equazione complessiva di tali rette è

$$(17) \quad \sum \frac{t!}{a!b!c!} f'_{13i_1i_2\ldots i_t} x^a y^b z^c = 0,$$

dove la somma va estesa a tutte le soluzioni della $a + b + c = t$ in interi a, b, c non negativi, ed inoltre — dei t indici i — precisamente a vanno presi uguali ad 1, b uguali a 2, c uguali a 3.

Osserviamo ora che, se $c > 0$, $f'_{13i_1i_2\ldots i_t}$ risulta una derivata t -ma di f_{33} e — come tale — si annulla in O' in forza dell'ipotesi che la curva f_{33} abbia ivi molteplicità $s > t$. Nella (17), pertanto, ci si può limitare ai termini provenienti dal valore 0 della c ; sicchè il punto O' — che è il solo punto comune alle t rette (17) — non può differire dal punto $O(0, 0, 1)$. Questa contraddizione con quanto ammesso nel primo capoverso del n. 8, stabilisce la verità dell'ultimo enunciato; e ciò completa la dimostrazione del secondo (e quindi anche del primo) teorema del n. 7.

OSSERVAZIONE. — Supposta la curva armonica f non singolare, consideriamo in S_5 la superficie F definita dalle (6) (n. 5). È chiaro allora che il riferimento algebrico fra il piano ellittico (x, y, z) e tale superficie F muta la curva h (hessiana di f) nella sezione di F con l'ipersuperficie cubica fissa di equazione

$$(18) \quad \begin{vmatrix} X_1 X_6 X_5 \\ X_6 X_2 X_4 \\ X_5 X_4 X_3 \end{vmatrix} = 0$$

(luogo delle corde di una superficie di Veronese). Orbene, tenuto anche conto dei nn. 5, 9, il primo teorema del presente numero mostra senz'altro che:

L'intorno del 1° ordine di un qualunque punto multiplo reale della curva sezione di F con l'ipersuperficie (18) coincide con l'intorno del 1° ordine del punto stesso sopra un'opportuna sezione iperpiana di F .

11. Possiamo ormai provare assai facilmente che:

La forma hessiana di una qualunque forma armonica ternaria a coefficienti reali e di grado $n > 2$, se non svanisce identicamente, assume tanto il segno + che il segno — quando le variabili percorrono il campo reale.

Notiamo che il precedente enunciato implica il risultato di Lewy, citato nel n. 1, secondo cui quella forma hessiana deve in ogni caso annullarsi per valori reali non tutti nulli delle variabili. Viceversa, in forza del n. 7, da questo risultato segue ora il teorema enunciato, assieme alla proprietà che *l'equazione $h(x, y, z) = 0$ ammette sempre infinite soluzioni nel campo reale*. Basterà dunque stabilire in modo autonomo il risultato di Lewy, e la meta propostaci sarà pienamente raggiunta.

A tal uopo, ammettiamo per assurdo che vi sia una forma armonica $\varphi(x, y, z)$, di grado $n > 2$, la cui hessiana $\eta(x, y, z)$ non abbia nessuno zero reale all'infuori di quello banale $x = y = z = 0$. Scegliamo una qualunque forma armonica $f(x, y, z)$, ancora di grado n , in guisa che l'hessiana $h(x, y, z)$ di f ammetta degli zeri reali non banali; ciò è certamente possibile in infiniti modi, bastando per esempio assumere f armonica e tale che la curva $f = 0$ risulti dotata di punto doppio in un punto reale assegnato (n. 6). Possiamo inoltre disporre dell'arbitrarietà che ancora ci resta nella scelta di f , in guisa che, per nessun valore del parametro λ , la curva armonica

$$(19) \quad f^*(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + (1 - \lambda)[f(x, y, z) - \varphi(x, y, z)] = 0$$

abbia l'hessiana indeterminata.

La curva (19) s'identifica rispettivamente con la f e con la φ per $\lambda = 0$ e per $\lambda = 1$; sicché, corrispondentemente, la relativa hessiana h^* s'identifica allora con la h o con la η . Quando λ varia con continuità nell'intervallo $(0, 1)$, la h^* varia pure con continuità, partendo dalla curva algebrica h , dotata per costruzione (in base al n. 7) di uno o più rami reali, per giungere alla η , che invece per ipotesi ne è priva. Ora i rami reali di una curva algebrica reale, che vari con continuità, possono tutti sparire soltanto se in qualche posizione intermedia due o più rami vengono a coincidere, oppure se la curva si riduce ad uno o più punti isolati. Ma sia l'una che l'altra eventualità vanno escluse per la h^* , in forza dell'ultimo teorema del n. 7. Tale contraddizione dimostra appunto il risultato di Lewy, e quindi pure il teorema enunciato al principio di questo numero.

12. Poggiando sul n. 4, ed applicando alla curva (19) argomentazioni del tutto analoghe a quelle tenute nel n. 11 per la curva h^* , si vede infine che:

Una qualunque forma armonica ternaria a coefficienti reali, che abbia grado $n > 0$ e non svanisca identicamente, assume tanto il segno + che il segno - ed ammette inoltre infiniti zeri nel campo reale.

Cosmogonia. — *Sopra le variazioni dell'eccentricità nel problema astronomico dei due corpi di masse decrescenti.* Nota ^(*) del Socio GIUSEPPE ARMELLINI.

1. PRINCIPI FONDAMENTALI. — Le nuove idee sopra l'evoluzione stellare che illustri astronomi (Ambartsumian, Fessenkov, ecc.) sostennero nell'ultimo Congresso Astronomico Internazionale (Roma, settembre 1952), hanno richiamato la mia attenzione sopra un problema di cui mi ero già occupato parecchi anni or sono; e cioè il problema dei due corpi di masse variabili. E ciò tanto più che alcuni studiosi hanno recentemente ottenuto risultati discordanti (specialmente per quanto riguarda le eccentricità orbitali), essendo partiti da diverse equazioni fondamentali, o non avendo esattamente interpretato il significato della teoria degli invarianti adiabatici. Sembra quindi opportuno un esame di chiarificazione, od una « messa a punto »; ed è questo lo scopo della presente Nota, che fa seguito a quella già da me pubblicata ⁽¹⁾ pochi mesi fa su questi Rendiconti.

2. Come abbiamo già detto in quella Nota, occorre anzi tutto tener presente che il problema del moto di punti di masse variabili *risulta indeterminato, se non si specifica esattamente il modo con cui avviene la variazione di massa*. In particolare, limitandoci ai casi che maggiormente interessano la cosmogonia, abbiamo visto che:

A) Se un astro Q *aumenta* di massa, perché sopra la sua superficie si deposita della materia cosmica in quiete (od almeno le cui particelle provengono indifferentemente da tutte le direzioni, senza che nessuna di queste risulti preferita), il suo moto è regolato dall'equazione di *Levi-Civita*:

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(m\hat{V}) = \hat{F}$$

dove m indica la massa dell'astro, che supponiamo funzione *crescente* del tempo t , ed i vettori \hat{V} ed \hat{F} rappresentano la sua velocità e la forza ad esso applicata.

Vediamo subito che in tal caso, se supponiamo che l'astro non sia sottoposto a nessuna forza ($\hat{F} = 0$), esso *si muove in linea retta con velocità decrescente*. Ciò che è facile comprendere, giacché scrivendo la (1) si suppone implicitamente che la materia, che viene a depositarsi su Q , non possieda, in media, nessuna quantità di moto.

(*) Presentata nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *Osservazioni sul problema dei due corpi, ecc.* in « Rend. Lincei », 1953, sem. 1°.

B) Se invece un astro Q *diminuisce* di massa, perché dalla sua superficie avviene un'emissione di corpuscoli che si dirigono *indifferentemente* in tutte le direzioni, il suo moto è regolato dall'*equazione di Gyldèn*:

$$(2) \quad m \frac{d\hat{V}}{dt} = \hat{F}$$

essendo m funzione *decescente* di t . In tal caso, se l'astro non è sollecitato da nessuna forza ($\hat{F} = 0$), si vede subito che esso *si muove in linea retta con velocità costante*. Infatti, scrivendo la (2), supponiamo implicitamente che la materia, che fuoriesce dalla sua superficie, porti con sé una quantità di moto corrispondente alla velocità di Q .

Vedemmo pure che la (2) vale anche nel caso di masse crescenti, quando la materia che si deposita su Q ha, in media, la stessa velocità di Q ; per esempio nel caso di un pianeta la cui massa aumenti per caduta di meteoriti che, in media, percorrano la sua stessa orbita. E così anche dimostrammo che in casi più complessi (per esempio se Q lancia materia in una sola direzione, come avviene nel problema del *razzo*, ecc.) si ha un'equazione più generale, di cui la (1) e la (2) possono considerarsi come semplici casi particolari.

3. EQUAZIONI E PROPRIETÀ DEL MOTO NEL CASO DI MASSE DECRESCENTI. - Premesse queste nozioni, supponiamo di avere un sistema binario i cui astri componenti Q_1 e Q_2 si attirino con la legge di Newton ed inoltre *diminuiscono* di massa per emissione corpuscolare. Dovremo applicare la (2) di Gyldèn, la quale è formalmente identica all'equazione del moto di un punto di massa costante.

Esaminiamo allora il moto relativo di uno degli astri, per esempio Q_2 , rispetto a Q_1 ; ed, a tale scopo, prendiamo per origine Q_1 e facciamo partire da esso una terna cartesiana di assi di direzione invariabile. Avremo immediatamente, indicando con x, y, z , le coordinate di Q_2 , con r il raggio vettore, con $M(t)$ la massa del sistema (somma delle due masse stellari) e con f il coefficiente attrattivo:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{x}{r^3} f M(t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{y}{r^3} f M(t) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{z}{r^3} f M(t) \end{aligned} \right.$$

Con facili procedimenti, ricaviamo dalle (3) i tre integrali delle aree:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c_1 \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c_2 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= c_3 \end{aligned} \right.$$

donde si ha immediatamente

$$(5) \quad c_1 z + c_2 x + c_3 y = 0.$$

Ne deduciamo che Q_2 si muoverà intorno a Q_1 descrivendo sempre *un'orbita piana con velocità areale costante*; ciò che, *non ha più luogo* — almeno in alcuni casi — quando si tratti di masse crescenti e si parta dall'equazione di Levi-Civita. In conseguenza, chiamando con ϑ l'anomalia di Q_2 contata da una direzione fissa nel piano dell'orbita, si avrà sempre

$$(6) \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$$

dove la velocità areale c è data da

$$(7) \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2.$$

Indicando con p il parametro della conica osculatrice nell'istante t alla traiettoria descritta da Q_2 intorno a Q_1 (e cioè quella conica che Q_2 descriverebbe se da t in poi le due masse rimanessero invariate), si ha dalla teoria delle orbite la nota equazione

$$(8) \quad c^2 = pfM(t)$$

la quale mostra che se $M(t)$ tende a zero quando il tempo cresce, il parametro p tende all'infinito.

4. Mentre nel problema che stiamo esaminando si hanno i tre integrali delle aree, non esiste invece l'integrale delle forze vive. Esso viene infatti sostituito da un'espressione più complessa, che vogliamo ora determinare, giacché ci sarà utile per quanto riguarda le variazioni dell'eccentricità osculatrice.

A tale scopo, moltiplichiamo ordinatamente le (3) per $2 \frac{dx}{dt}$, per $2 \frac{dy}{dt}$ e per $2 \frac{dz}{dt}$, e sommiamo. Avremo immediatamente

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = -2fM(t) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

e cioè, indicando con v il valore della velocità in un istante generico e con v_0 ed r_0 la velocità ed il raggio vettore per $t = 0$, otterremo integrando per parti:

$$(10) \quad v^2 - v_0^2 = 2f \frac{M(t)}{r} - 2f \frac{M(0)}{r_0} - 2f \int_0^t \frac{1}{r} \frac{dM}{dt} dt$$

la quale si riduce alla nota equazione delle forze vive, quando M si mantiene costante e cioè quando si ha identicamente $\frac{dM}{dt} = 0$.

5. Possiamo ancora dimostrare, in modo assai semplice, una proprietà fondamentale del moto.

A tal fine, supponiamo per un momento che $M(t)$ decresca in modo discontinuo; e precisamente che M si mantenga costante fino all'istante τ e quindi in quell'istante decresca bruscamente di Δm , per tornare poi a mantenersi costante. Vediamo subito che, fino all'istante τ , l'astro Q_2 descriverà una conica L (in pratica, un'ellisse) avente per fuoco Q_1 ; e quindi, dopo questo istante, un'altra conica L' avente pure per fuoco Q_1 . Inoltre, le due coniche L ed L' passeranno ambedue per il punto P , in cui si trovava l'astro Q_2 nell'istante τ ; ed avranno in P la medesima tangente, che è la direzione della velocità di Q_2 in quell'istante. Per noti teoremi di geometria analitica, segue allora che le due coniche L ed L' non potranno avere altri punti in comune oltre P , giacché altrimenti coinciderebbero. In conseguenza, essendo per la (8) il parametro di L' maggiore del parametro di L , la conica L' sarà tutta esterna ad L , toccandola soltanto in P .

Supponiamo ora che in un secondo istante τ' , posteriore a τ , la massa M diminuisca di $\Delta M'$; si vede subito che, dopo l'istante τ' , il punto Q_2 descriverà una nuova conica L'' esterna ad L' (tranne un solo punto di contatto) e quindi, a maggior ragione, esterna ad L .

Immaginando che gli istanti τ, τ' ecc. divengano sempre più vicini tra loro e passando dal discontinuo al continuo, si trova che, se $M(t)$ è funzione decrescente di t , il punto Q_2 descriverà intorno a Q_1 una traiettoria a spirale, di cui ogni spira contiene le spire precedenti e quindi senza punti doppi; e cioè una spirale le cui spire si allargano continuamente. Ne segue che, se in un istante t il raggio r ha un minimo, da t in poi r si manterrà sempre maggiore di questo valore minimo. Ma possiamo ancora fare un'altra considerazione.

Poiché ogni orbita osculatrice è esterna (od al più tangente in un solo punto) alle orbite osculatrici precedenti, vediamo subito che il semiasse maggiore a , la distanza perielica $a(1-e)$ e quella afelica $a(1+e)$ dell'orbita osculatrice nell'istante t saranno funzioni crescenti (od almeno mai decrescenti) del tempo. Ma, per la (8), il prodotto $Mp = Ma(1-e^2)$ si conserva costante; dunque $M(1-e)$ ed $M(1+e)$ saranno funzioni decrescenti del tempo.

6. Abbiamo visto che r può tendere all'infinito, quando $M(t)$ tende a zero crescendo t all'infinito. Si può però dimostrare che r , al più, può divenire infinito di primo ordine rispetto a t ; in altre parole, si può sempre trovare un numero positivo A tale che, da $t=0$ in poi, si abbia sempre

$$(11) \quad r_0 + At > r.$$

Infatti, come abbiamo ora detto, da $t=0$ in poi, la r si conserverà sempre maggiore di un certo numero λ positivo e diverso da zero. In con-

seguenza, essendo dM/dt sempre negativa ed avendosi quindi $M(t) < M(0)$ per $t > 0$, sarà:

$$(12) \quad 0 < -2f \int_0^t \frac{1}{r} \frac{dM}{dt} dt < \frac{2f}{\lambda} [M(0) - M(t)] < \frac{2f}{\lambda} M(0)$$

onde la (10) ci darà

$$(13) \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \leq v^2 < v_0^2 + \frac{2fM(t)}{r} - \frac{2fM(0)}{r_0} + \frac{2f}{\lambda} M(0) < v_0^2 + \frac{4fM(0)}{\lambda}.$$

Ponendo quindi, per semplicità,

$$(14) \quad v_0^2 + \frac{4fM(0)}{\lambda} = A^2$$

avremo sempre per $t > 0$, la disuguaglianza in modulo:

$$(15) \quad \left|\frac{dr}{dt}\right| < A$$

donde segue immediatamente la (11).

7. Possiamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA. — Se $M(t)$ tende a zero col crescere del tempo e se si ha inoltre

$$(16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t M(t) = 0$$

allora, qualunque siano le condizioni iniziali e comunque lentamente diminuisca la massa M , l'eccentricità osculatrice cresce fino a superare ogni valore. In altre parole, la conica osculatrice alla traiettoria da ellittica si cangia in parabola e quindi in iperbole sempre più accentuata.

Dimostrazione. — Supponiamo, se è possibile, che l'eccentricità osculatrice si mantenga sempre inferiore ad un numero positivo E comunque grande. Avremo allora in un istante qualsiasi $t > 0$, indicando con W l'anomalia vera nella conica osculatrice,

$$(17) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos W} > \frac{p}{1 + E}$$

e quindi, per $t > 0$, si avrà a maggior ragione in virtù della (11)

$$(18) \quad r_0 + At > \frac{p}{1 + E}.$$

Ponendo allora al posto del parametro p il suo valore (8), avremo

$$(19) \quad 1 + E > \frac{c^2}{(r_0 + At)fM(t)}.$$

Ma, per la (16), il secondo membro della disuguaglianza (19) tende all'infinito col crescere di t ; dunque E non può avere un valore finito. C. d. d.

8. Questo teorema, che già avevamo trovato ⁽²⁾ tempo fa e di cui diamo qui una nuova dimostrazione, più semplice e diretta, ha notevole importanza: sia per le sue applicazioni alle ricerche cosmogoniche sopra i sistemi binari, sia perché corregge una affermazione inesatta nella quale erano caduti anche valorosi astronomi e matematici, tra cui lo stesso Jeans.

A prima vista, poiché il nostro teorema si verifica comunque lenta sia la diminuzione della massa, sembra che esso sia in contraddizione con i risultati offerti dalla teoria degli invarianti adiabatici. Ma, in realtà, tale contraddizione non esiste; sia per le ragioni già spiegate ⁽³⁾ nella passata Nota, sia anche perché la teoria degli invarianti adiabatici suppone, in generale, che l'orbita sia sempre contenuta in una porzione limitata del piano; cosa che non si verifica quando r può tendere all'infinito.

9. Possiamo ancora dimostrare un'altra proprietà interessante del moto. A tale scopo, osserviamo che dalla (11) si ha per $t > 0$:

$$(20) \quad (r_0 + At) M(t) > rM(t) > 0$$

e quindi, se $M(t)$ soddisfa alla (16), se ne deduce che il prodotto $rM(t)$ tende a zero col crescere del tempo, benché r possa tendere all'infinito.

Ora, trasformando le (3) in coordinate polari, abbiamo con facili calcoli

$$(22) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 - f \frac{M(t)}{r^2}$$

da cui, per mezzo della (6), otteniamo immediatamente

$$(23) \quad r^3 \frac{d^2 r}{dt^2} = c^2 - rM(t).$$

Ma, crescendo il tempo, $rM(t)$ tende a zero; dunque da un certo istante in poi la derivata seconda $d^2 r/dt^2$ si manterrà sempre positiva e diversa da zero. In conseguenza, *da un certo istante in poi, la derivata prima dr/dt non potrà più annullarsi* (giacché tra due zeri della derivata prima, la derivata seconda dovrebbe annullarsi almeno una volta) ed in conseguenza, per quanto sopra si è detto, *r diverrà funzione sempre crescente del tempo.*

Dobbiamo ancora osservare che, se in un certo istante τ la conica osculatrice alla traiettoria è parabolica od iperbolica, da τ in poi essa sarà sempre iperbolica. Ciò è conseguenza del fatto, già visto, che ogni conica osculatrice è esterna alle precedenti; ma può anche dimostrarsi direttamente.

Infatti, indicando con $h(t)$ la differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale in un istante t , avremo facilmente dalla (10)

$$(24) \quad h(t) = h(\tau) - f \int_{\tau}^t \frac{1}{r} \frac{dM}{dt} dt.$$

(2) Cfr. G. ARMELLINI, *Alcuni teoremi, ecc.* in « Rend. Lincei », 1932, sem. 2^o.

(3) Cfr. G. ARMELLINI, *Osservazioni sul problema dei due corpi, ecc.* in « Rend. Lincei », 1953, sem. 1^o.

Ma dM/dt è sempre negativa, mentre $h(\tau) \geq 0$; dunque per $t > \tau$ sarà $h(t) > 0$. Ne segue che crescendo il tempo, r tende effettivamente ad ∞ : ciò che può dimostrarsi anche direttamente dalla (23).

10. CASO DEI SISTEMI STELLARI BINARI. — Si sa che, a causa della irradiazione di energia (dovuta principalmente alla trasformazione dell'idrogeno in elio), la massa di una stella diminuisce lentamente; ma si tratta di una diminuzione assai debole, che raggiunge appena l'uno per cento, anche supponendo che l'astro sia inizialmente composto di solo idrogeno e si estingua quando tutto l'idrogeno si sia trasformato in elio.

Ambartsumian, Fessenkov ed altri astronomi della scuola russa suppongono invece che le stelle, dopo la loro prima formazione, siano anche soggette ad una continuata emissione corpuscolare, che ridurrebbe la loro massa ad una piccola parte della massa primitiva.

Senza discutere questa ipotesi (sopra la quale, al Congresso di Roma, si sollevarono parecchie difficoltà) notiamo soltanto che, poiché l'emissione corpuscolare può suppersi (almeno approssimativamente) proporzionale alla massa, avremo l'equazione:

$$(25) \quad \frac{dM}{dt} = -\varepsilon M$$

dove ε è un coefficiente positivo molto piccolo.

Integrando si ottiene

$$(26) \quad M(t) = M(0) e^{-\varepsilon t}$$

dove e indica la base dei logaritmi naturali; e quindi, per noti teoremi di calcolo, avremo

$$(27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} tM(t) = 0$$

onde la condizione (16) è certamente soddisfatta.

Ne segue che, per quanto piccolo sia ε (e cioè per quanto lenta possa essere questa emissione corpuscolare) se essa si prolunga per un tempo sufficientemente lungo, l'orbita osculatrice diverrà ellittica molto allungata, per cangiarsi poi in parabolica e quindi in iperbolica. Tale proprietà, di grande importanza nella cosmogonia dei sistemi binari, e della quale nella Nota precedente avevamo già dato una dimostrazione approssimata, viene così dimostrata rigorosamente nel caso che c'interessa.

Resterebbe ora ad esaminare il *moto alla Levi-Civita* nel problema di masse *crescenti* ed anche il caso — mai considerato da nessuno fin ad ora — del *moto simultaneo alla Gylden ed alla Levi-Civita*; caso che si verifica quando un sistema stellare binario perde massa per emissione corpuscolare, mentre insieme ne acquista per caduta di polvere cosmica, trovandosi immerso in una nebulosa diffusa. Ma su ciò, ci proponiamo di tornare in altra Nota.

Geofisica. - *Onde longitudinali e trasversali guidate dall'astenosfera.* Nota^(*) del Corrisp. PIETRO CALOI.

Nel 1927 Gutenberg osservò che l'ampiezza delle onde longitudinali, per terremoti di piccola profondità, decresce considerevolmente fra 220 km. e 1700 km. di distanza epicentrale. A maggiori distanze, le ampiezze crescevano sensibilmente, e a 1800 km. ca. tornavano a essere pressoché uguali a quelle che si osservano a 220 km.

Successive ricerche provarono che la diminuzione dell'ampiezza diviene alquanto minore per terremoti che originano a profondità di 150-250 km. e manca del tutto per terremoti che iniziano a profondità maggiori di 300 km. ca.

I fatti accennati, secondo Gutenberg, possono essere spiegati nell'ipotesi che alla profondità critica di 80 Km. ca. la roccia raggiunga il suo punto di fusione, con conseguente attenuazione delle caratteristiche elastiche e diminuzione della velocità dell'onda sismica.

Uno strato caratterizzato da velocità per le onde sismiche, minore di quella negli strati sovrastanti e sottostanti, determina, in superficie, la formazione delle così dette « zone d'ombra », in cui, come onde dirette, vengono registrate solo onde diffratte, che risultano di ampiezza sensibilmente minore di quella delle onde rifratte.

Attualmente, i dati sismici più accreditati relativi all'astenosfera sono i seguenti:

	a 50 Km. prof.	a 100	a 150	a 200	a 250
velocità onde longitudinali . .	8,0 km/sec	7.85	7.9	8.1	8.3
velocità onde trasversali . .	4,45	4.4	4.46	4.4	4.45

Questi nuovi valori portano l'inizio dello strato a bassa velocità alla profondità di 100 km. ca.

Se le cose stanno così - e tutto lascia ritenere che di fatto così stiano - l'effetto dell'astenosfera sulla propagazione delle onde sismiche non si deve limitare alla formazione di più o meno estese « zone d'ombra » in superficie.

L'astenosfera si presenta come uno strato dello spessore di almeno 100 km. In questo strato, la velocità delle onde sismiche decresce lievemente quando dai suoi limiti estremi, superiore ed inferiore, si procede verso la sua parte centrale. Esistono pertanto le condizioni necessarie per fare, di detto strato, un canale conduttore d'energia oscillante (fig. 1). Per rendere l'idea di questo fenomeno, si può pensare a quello delle onde guidate fra due placche metalliche o - con maggiore analogia - a quelle onde guidate dalla bassa atmosfera o, ancora, alle onde interne, proprie delle stratificazioni marine.

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1953.

Naturalmente, data la lieve flessione delle velocità di propagazione delle onde sismiche nell'astenosfera, questa potrà compiere la sua funzione di guida, quando gli impulsi elastici le vengono immessi parallelamente alle sue superficie estreme o, comunque, pochissimo inclinati su esse. Pertanto, le condizioni più favorevoli per la conduzione di onde sismiche nell'astenosfera, si avranno per terremoti con ipocentro nell'astenosfera stessa o ai suoi limiti; quindi per profondità ipocentrali da 50 a 200 km. ca.

Per profondità che si discostino sensibilmente da questi limiti, l'astenosfera cesserà di guidare le onde sismiche.

Sulla base di queste considerazioni, mi sono accinto all'esame delle registrazioni di numerosi terremoti, con profondità non superiori ai 200 km.

I risultati raggiunti sono andati al di là di ogni più benevola previsione. Le onde preconizzate esistono realmente e, per profondità ipocentrali da 60 a 100 km., vengono registrate con nitidezza indubbia.

Le onde longitudinali dell'astenosfera, che sono state seguite per distanze ipocentrali da 2000 km. ca. a 11000 km. ca., hanno una velocità dell'ordine di 7.9-8.0 km/sec.

La così detta « falsa S » (onda F), per cui sono state proposte le più astruse spiegazioni, in molti casi non è altro che l'onda longitudinale dell'astenosfera, per la quale propongo il simbolo P_A . Ancora più vistose si presentano le onde trasversali dell'astenosfera: alcuni esempi sono di notevole ampiezza ed assumono l'evidenza di riferimenti sicuri, ai fini di una esatta interpretazione dei sismogrammi.

Esse consentono finalmente la classificazione di fasi notevoli - rimaste finora senza qualifica - che si presentano fra le SS e le L, specialmente per distanze ipocentrali fra 4000 e 12000 km. Le S_A - corrispondenti trasversali delle P_A - si propagano con velocità media dell'ordine di 4,4 km/sec, ed hanno notevole componente verticale (predominando in esse il tipo S_V).

Sia le P_A che le S_A hanno periodo relativamente lungo, crescente al crescere della distanza epicentrale. Il periodo delle P_A varia da 5 a 12 sec. circa;

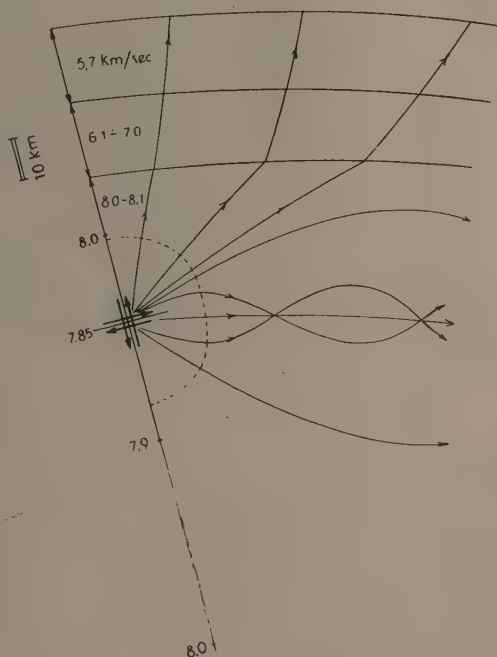


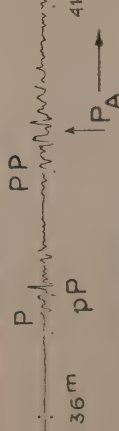
Fig. 1. - (la figura ha solo carattere dimostrativo).

Verticale Wiechert

2 · XI · 1946

$\Delta = 5077 \text{ km} \cdot h = 73 \text{ km-ca.}$
(Turkistan)

UCCLE



36m

PP

pP

41

$\uparrow P_A$

45

$\uparrow S_A$

49

53

$\Delta t = -20,1 \text{ sec}$

UCCLE · E.W. Wiechert

2 · XI · 1946

$\Delta = 5077 \text{ Km} \cdot h = 73 \text{ Km-ca.}$
(Turkistan)

$C_{1,1}$

S

SS

$\uparrow S_A$

46

P

18h 37m

PP

40

$\uparrow P_A$

$\Delta t = -20,1 \text{ sec}$

2 · XI · 1946 (Turkistan)

18h 40m P

45m

PP

$\uparrow P_A$

51m

S

58m

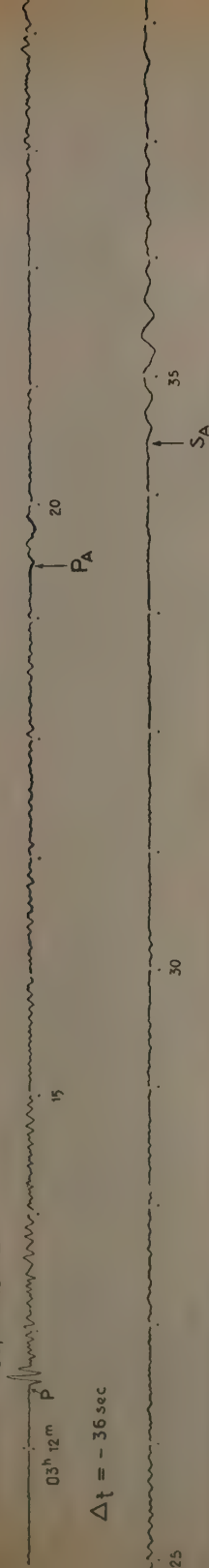
BUTTE · $\Delta = 10226 \text{ km}$ N.S. $\Delta t = +2 \text{ sec}$

$\uparrow S_A$

53m

ROMA - Galitzin Wilip Z $\Delta = 9150 \text{ km} \cdot h = 60 \text{ km} \cdot \text{ca}$

$30 \cdot \text{VI} \cdot 1953 \cdot 50^\circ 5' \text{N} \cdot 157^\circ \text{E}$



$\Delta t = -36 \text{ sec}$

ROMA - Galitzin I.N.G. - W.E. $\Delta = 9150 \text{ km} \cdot h = 60 \text{ km} \cdot \text{ca}$

$30 \cdot \text{VI} \cdot 1953 \cdot 50^\circ 5' \text{N} \cdot 157^\circ \text{E}$



$\Delta t = -36 \text{ sec}$

ROMA - Galitzin I.N.G. - N.S. $\Delta = 9150 \text{ km} \cdot h = 60 \text{ km} \cdot \text{ca}$

$30 \cdot \text{VI} \cdot 1953 \cdot 50^\circ 5' \text{N} \cdot 157^\circ \text{E}$



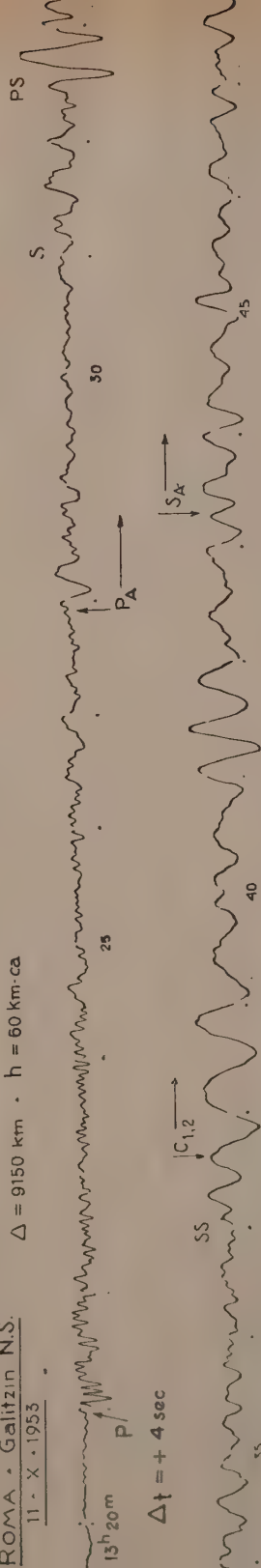
$\Delta t = -36 \text{ sec}$

Fig. 3.

ROMA • Galitzin N.S.

11 • X • 1953

$\Delta = 9150 \text{ km} \cdot h = 60 \text{ km} \cdot \text{ca}$



MA • Galitzin E.W.

11 • X • 1953

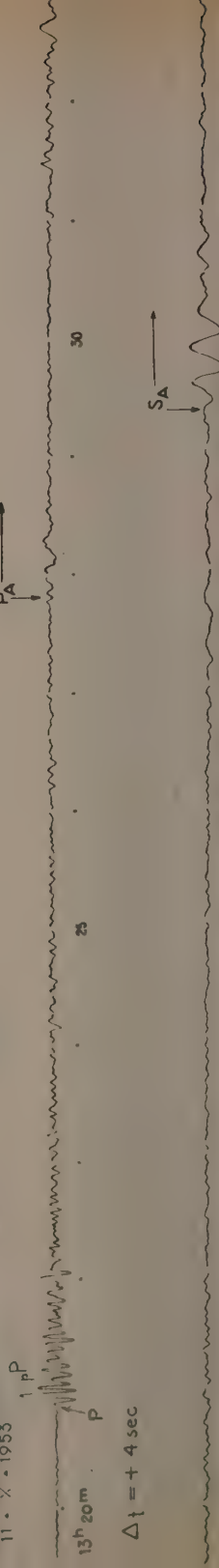
$\Delta = 9150 \text{ km} \cdot h = 60 \text{ km} \cdot \text{ca}$



OMA • Wilip Z.

11 • X • 1953

$\Delta = 9150 \text{ km} \cdot h = 60 \text{ km} \cdot \text{ca}$

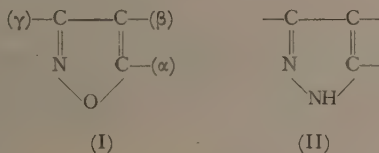


quello delle S_A , da 10° circa può arrivare a 30° ca. Tenuto conto delle loro rispettive velocità di propagazione, ne risultano lunghezze d'onda maggiori dello spessore della crosta sovrastante, il che spiega alcune caratteristiche della loro propagazione.

Mi limito a riportare alcuni significativi esempi delle nuove onde (figg. 2, 3, 4). Un più accurato studio delle loro caratteristiche varrà a sempre meglio precisare la costituzione fisica dell'astenosfera e a contribuire ad un ulteriore progresso nella conoscenza dell'interno della Terra.

Chimica organica. — *Sul comportamento dei derivati dell'isossazolo di fronte agli alcoolati alcalini*^(*). Nota^(**) del Corrisp. ADOLFO QUILICO^(***).

Una delle caratteristiche più salienti del nucleo dell'*isossazolo* (I), che lo differenzia nettamente da quello sotto altri riguardi assai simile del *pirazolo* (II) e rende particolarmente variato il chimismo dei suoi derivati, è la grande influenza che esercita sulla sua stabilità la presenza o meno di sostituenti.



Ciò risulta in special modo evidente se si considera la resistenza che il nucleo isossazolico oppone all'apertura da parte di agenti alcalini, che è di volta in volta assai grande, paragonabile a quella del nucleo piridico, oppure piccolissima, dell'ordine di quella dei lattoni o delle anidridi degli acidi bibasici, a seconda della posizione, della natura e del numero dei gruppi sostituenti.

Già dalle classiche ricerche di L. Claisen⁽¹⁾ era noto che i derivati isossazolici α -monosostituiti (III, con $R = \text{---Alch}$, ---Ar) vengono prontamente isomerizzati già a temperatura ordinaria per azione degli alcoolati alcalini, con rottura del legame N---O e formazione dei corrispondenti *cianchetoni* (IV),

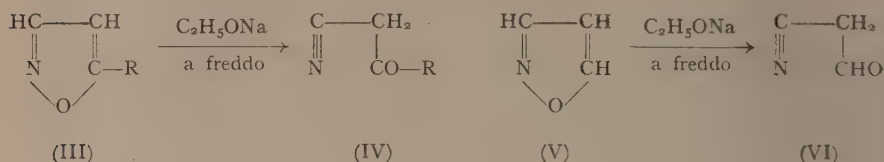
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Presentata nella seduta del 12 dicembre 1953.

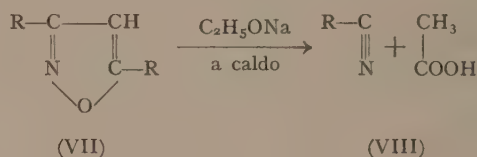
(***) Le considerazioni svolte nel presente lavoro erano già state in parte comunicate in una seduta della Sez. Lombarda della Società di Chimica, della quale era stato pubblicato solo un breve sunto in «La Chimica e l'Industria», 27, 102 (1945).

(1) L. CLAISEN e STOCK, «Ber.», 24, 135, 3904 (1891); «Ber.», 25, 1787 (1892).

reazione che applicata al termine fondamentale (V) della serie, conduce alla cianacetaldeide (VI) ⁽²⁾, secondo gli schemi:

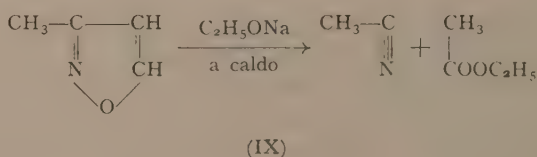


Una maggiore stabilità di fronte agli alcoolati alcalini e alla KOH alcoolica presentano invece, sempre secondo Claisen, i derivati γ -monosostituiti (VIII), che vengono attaccati solo a caldo, con rottura del legame C (γ)—C (β) oltre che di quello N—O, con formazione di acido acetico e del nitrile (VIII) corrispondente al radicale R, secondo la reazione:



che richiede l'intervento di una mol. di H₂O (o di alcali).

Allo stesso autore si deve anche l'interessante osservazione, fatta a proposito del γ -metilisossazolo (IX) che, impiegando etilato sodico, accanto all'acetonitrile si ottiene estere acetico ⁽³⁾, che deve pertanto rappresentare un prodotto primario della scissione:

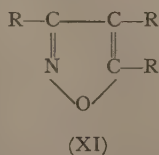
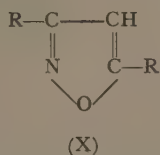


Perfettamente stabili all'azione anche prolungata e a caldo di questi reattivi sono infine i derivati α , γ -bisostituiti (X) come il *dimetil* e il *difenilisossazolo*, e i derivati trisostituiti (XI) come il *trimetil* e il *trifenilisossazolo*.

(2) L. CLAISEN, « Ber. », 36, 3672 (1903).

(3) L. CLAISEN, « Ber. », 36, 3673 (1903); « Ber. », 42, 60 (1909). Un altro esempio di isolamento dell'estere come prodotto primario della reazione, è riportato da H. WIELAND, « Ann. », 328, 200 (1903), il quale trovò che il γ -fenil, β -nitroisossazolo viene decomposto dalla KOH metilica con formazione di benzonitrile e sale di K dell'estere nitroacetico. Numerosi altri casi sono stati poi da noi messi in rilievo nel corso delle nostre ricerche, con l'isolamento di prodotti primari di apertura del nucleo isossazolico che conservano intatta l'intelaiatura della sostanza di partenza, come è detto più avanti.

sazolo, i quali ultimi si formano anzi, come è noto ⁽⁴⁾, per azione degli alcali a caldo sulle nitroparaffine primarie $R-CH_2NO_2$.



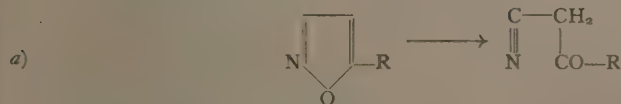
L'instabilità dei derivati isossazolici in queste reazioni appariva quindi legata, come ebbe acutamente ad osservare Claisen, alla possibilità del trasferimento in β di un atomo d'idrogeno dalle posizioni α o γ , possibilità che esiste per i derivati monosostituiti α e γ e manca invece per quelli α, γ -bisostituiti. Su queste regole di Claisen si fondavano il criterio per l'assegnazione di un derivato monosostituito dell'isossazolo alla serie α o γ , e un metodo pratico di separazione degli isomeri γ , assai più resistenti agli agenti alcalini, dagli α , che sempre si formano assieme ai primi nell'azione dell'idrossilammina sulle β -chetoaldeidi.

Nel corso delle ricerche condotte per oltre un ventennio da chi scrive e collaboratori sulla chimica di questo eterociclo ⁽⁵⁾ e nelle quali è stato esaminato il comportamento di numerosi nuovi termini della serie di fronte ai reattivi alcalini, sono però emersi fatti che portano ad ampliare e in alcuni casi a modificare i semplici schemi di Claisen, e dei quali bisogna tener conto nella diagnosi della posizione dei sostituenti nei derivati di questo nucleo di nuova preparazione.

I risultati più salienti delle nostre ricerche si possono così riassumere:

A) DERIVATI A POSIZIONE γ LIBERA.

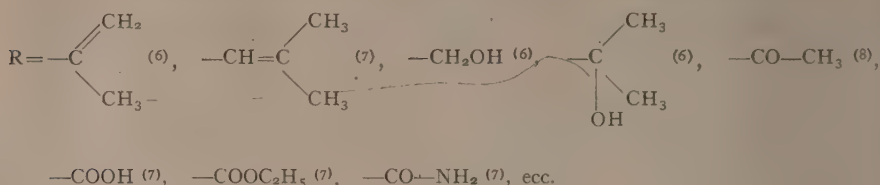
Lo schema di Claisen non sembra in questo caso patire eccezione. Tutti i derivati α -sostituiti a posizione γ libera vengono isomerizzati *a freddo* dagli alcoolati alcalini e talvolta anche dalla KOH alcoolica, con sensibile sviluppo di calore e formazione dei corrispondenti derivati ciano-carbonilici, secondo la reazione a):



Ai pochi esempi noti in cui R era un gruppo alchilico o arilico, se ne possono aggiungere numerosi altri in cui è:

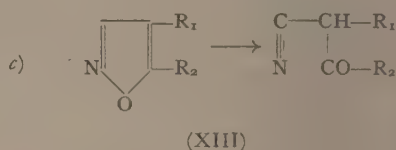
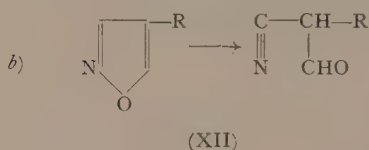
(4) W. R. DUNSTAN e T. S. DYMOND, « Journ. Chem. Soc. », 59, 410 (1891).

(5) Compare per la maggior parte sulla « Gazz. Chim. Italiana », a partire dal 1929.

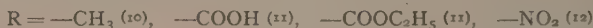


Questa reazione, applicata al termine fondamentale oggi facilmente accessibile a partire dall'alcool propargilico ⁽⁹⁾, costituisce tra l'altro l'unico metodo preparativo pratico per arrivare all'*aldeide cianacetica* $\text{CN}-\text{CH}_2-\text{CHO}$ sotto forma di soluzione alcoolica del sale sodico della forma enolica, direttamente utilizzabile in molte sintesi.

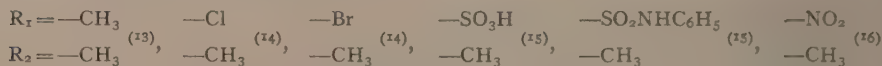
Nello stesso modo (schemi *b* e *c*) si comportano, come era prevedibile i derivati β -monosostituiti (XII) e quelli α, β -bisostituiti (XIII):



come risulta dai seguenti esempi:



relativi ai primi, e dagli altri:



che si riferiscono ai secondi.

(6) A. QUILICO e G. STAGNO d'ALCONTRES, « Gazz. Chim. It. », 79, 654 (1949).

(7) A. QUILICO e L. PANIZZI, « Gazz. Chim. It. », 72, 458 (1942).

(8) L. PANIZZI, « Gazz. Chim. It. », 72, 481 (1942).

(9) A. QUILICO e G. PALAZZO, questi « Rendic. » [VIII], 6, 168 (1949).

(10) P. PINO, comunicazione privata.

(11) L. PANIZZI, « Gazz. Chim. It. ».

(12) Si può far rientrare in questo tipo di reazione l'apertura operata dall'anilina del β nitroisossazolo, che porta all'anile dell'aldeide nitrocianacetica; vedi HILL e TORREY, « Journ. Am. Chem. Soc. », 22, 106 (1899); HILL e HALE, ibid., 29, 253 (1903).

(13) R. JUSTONI, « Rendic. Ist. Lombardo » [2], 71, 407 (1938).

(14) A. QUILICO e R. JUSTONI, « Rendic. Ist. Lombardo » [2], 69, 587 (1936).

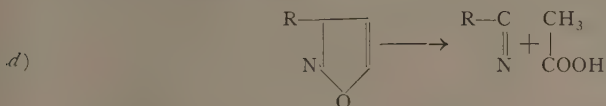
(15) A. QUILICO e R. JUSTONI, « Gazz. Chim. It. », 70, 3, 11 (1940).

(16) Il comportamento dell' α metil, β nitroisossazolo di fronte alla idrazina e alla fenilidrazina mostra che questi reattivi operano l'apertura del nucleo isossazolico nel senso della reazione *c*). Vedi C. MUSANTE, « Gazz. Chim. It. », 72, 541 (1942).

B) DERIVATI γ -SOSTITUITI A POSIZIONE α LIBERA.

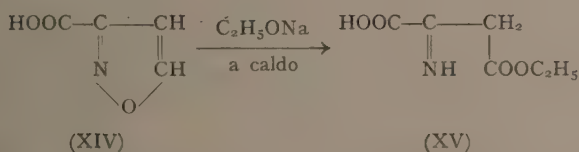
È il caso più interessante perché, come risulta dalle nostre ricerche, l'andamento della reazione dipende in modo essenziale dalla natura del gruppo R che si trova in γ .

L'attacco da parte degli alcoolati e degli agenti alcalini ha luogo generalmente a caldo⁽¹⁷⁾, ma può verificarsi talvolta anche a freddo, e l'apertura dell'anello isossazolico può in certi casi avvenire *senza rottura del legame* C (γ)-C (β), a differenza di quanto era previsto dallo schema d) di Claisen:



Assai frequentemente si osserva nell'impiego dell'etilato sodico, l'estericizzazione del carbossile derivante dal carbonio α , ciò che sta ad indicare che la reazione si svolge attraverso la formazione di un prodotto intermedio di addizione con l'alcoolato.

Il primo caso di decorso anomalo della reazione di attacco dei γ -derivati è stato da noi trovato a proposito dell'*acido isossazol*, γ -carbonico (XIV)⁽¹⁸⁾, il quale per breve riscaldamento con $\text{C}_2\text{H}_5\text{ONa}$ in soluzione alcoolica fornisce il sale sodico dell'*estere imminoossalacetico* (XV), come indica lo schema:



ed alcuni altri esempi sono stati successivamente da noi incontrati⁽¹⁹⁾.

Un terzo modo di scissione alcalina dei derivati γ -sostituiti a posizione α libera, è stato da noi osservato nel caso del *nitrile dell'acido isossazol*, γ -carbonico (XVI)⁽²⁰⁾ e in quello della γ -isossazoldiazoimide (XVII)⁽²¹⁾. Per queste sostanze l'azione degli alcoolati alcalini conduce ad *estere ciana-*

(17) Il riscaldamento è necessario per iniziare la reazione, la quale procede poi spontaneamente con sviluppo di calore.

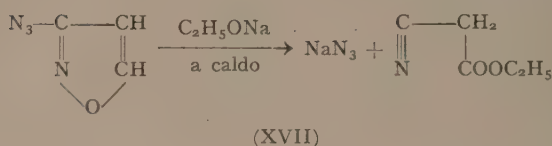
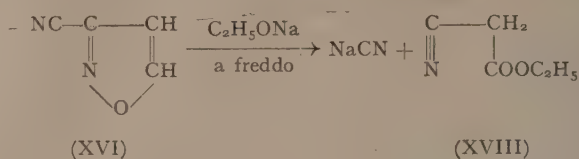
(18) A. QUILICO e L. PANIZZI, «Gazz. Chim. It.», 72, 458 (1942).

(19) A. QUILICO e M. FRERI, «Gazz. Chim. It.», 76, 3 (1946).

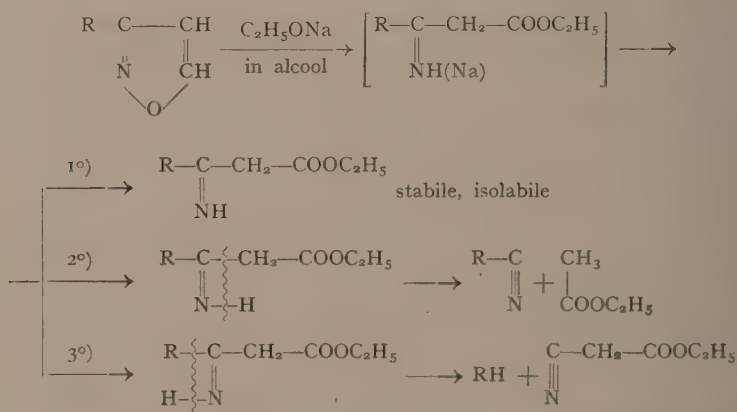
(20) A. QUILICO e M. FRERI, «Gazz. Chim. It.», 62, 436 (1932); in questo caso si ha reazione energetica già a freddo. Confronta anche A. QUILICO e L. PANIZZI, «Gazz. Chim. It.», 72, 466-468 (1942).

(21) A. QUILICO, «Gazz. Chim. It.», 61, 759 (1931); confronta A. QUILICO e M. SIMONETTA, «Gazz. Chim. It.», 76, 257 (1946).

etico (XVIII) e rispettivamente ad *acido cianidrico* e *acido azotidrico*, come è sotto indicato:

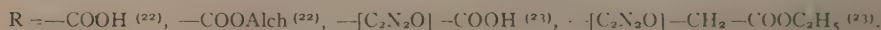


Questi tre modi di reagire dei derivati γ -monosostituiti, in apparenza assai diversi, possono a nostro parere essere inclusi in uno schema generale di cui quello classico *d*) di Claisen rappresenta un caso particolare:



La reazione s'inizia con l'apertura del nucleo isossazolico in corrispondenza del legame N—O con formazione dell'*imminoderivato* (XIX) il quale:

Caso 1° - È stabile in presenza degli alcoolati alcalini e può essere isolato allo stato libero o come sale di sodio. Per azione degli acidi diluiti passa immediatamente al corrispondente derivato β -carbonilico $\text{R}-\text{CO}-\text{CH}_2-\text{COOC}_2\text{H}_5$ con eliminazione di NH_3 . Questo decorso della reazione è stato osservato per:



(22) A. QUILICO e L. PANIZZI, «Gazz. Chim. It.», 72, 458 (1942).

(23) A. QUILICO e M. FRERI, «Gazz. Chim. It.», 76, 3 (1946); il gruppo $\text{C}_2\text{N}_2\text{O}$ rappresenta qui un anello furazanico.

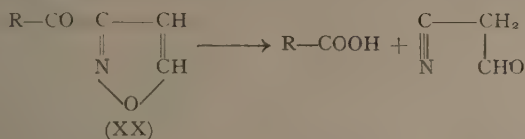
In questo caso i derivati γ -monosostituiti simulano il comportamento degli α -monosostituiti, in quanto viene conservata intatta la catena carbonica e azotata originaria, e la distinzione tra le due classi di composti può in alcuni casi presentare qualche difficoltà ⁽²⁴⁾.

Caso 2° - Il composto primario (XIX) è instabile nelle condizioni in cui si opera e si scinde nel nitrile $R-CN$ ed estere acetico. È questo il comportamento classico dei β -derivati secondo Claisen, e si verifica quando $R = -Alch, -Ar$ ⁽²⁵⁾.

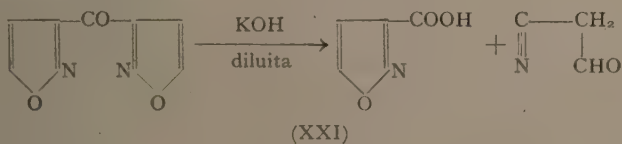
Caso 3° - La scissione di (XIX) può infine aver luogo secondo l'ultimo degli schemi indicati, con formazione di RH (sotto forma di sale sodico) ed estere cianacetico. Essa è stata finora osservata nei casi di $R = -\text{CN}^{(26)}$ e $-\text{N}_2^{(27)}$.

C) SCISSIONE ALCALINA DEI DERIVATI CARBONILICI.

In modo ancora differente dai tre sopra indicati reagiscono i γ -*acil-*derivati (XX), i quali vengono attaccati dagli alcoolati e dagli agenti alcalini in genere secondo lo schema:



che porta all'acido RCOOH e a cianacetaldeide. In tal modo si comportano ad esempio il γ -*acetilisossazolo* ⁽²⁸⁾ e il γ -*benzoilisossazolo* ⁽²⁹⁾. Per il γ , γ' -*diisossazolchetone* (XXI) tale scissione avviene così facilmente, che esso viene decomposto quantitativamente già a freddo dagli alcali acquosi diluiti in acido isossazol, γ -carbonico e cianacetaldeide ⁽³⁰⁾:



(24) Ciò è accaduto ad esempio per l'acido *isossazol*, γ -carbonico, ritenuto originariamente l'isomero α , il quale per prolungata azione degli agenti alcalini a caldo finisce per dare gli stessi prodotti dell'isomero γ (acido ossalacetico e acido piruvico). Vedi A. QUILICO e M. FRERI, « Gazz. Chim. It. », 59, 930 (1929).

(25) Questo tipo di scissione è stato osservato anche per un derivato - bisostituito, l'acido γ -metilisossazol, β solfonico, il quale bollito con NaOH acquosa concentrata conduce ad acetato sodico, NH_3 e sale sodico dell'acido solfoacetico. Vedi A. QUELICO e R. JUSTONI, «Gazz. Chim. It.», 70, 13 (1940).

(26) Vedi nota (20).

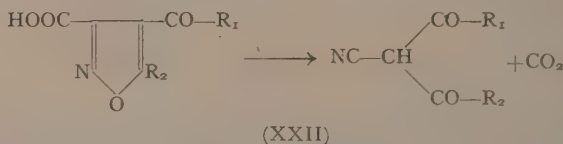
(27) Vedi nota (21).

(28) A. QUILICO e M. FRERI, « Gazz. Chim. It. », 72, 436 (1932).

(29) A. QUILICO e M. SIMONETTA, *Gazz. Chim. It.*, **77**, 588 (1947).

(30) A. QUILICO e M. FRERI, «Gazz. Chim. It.», 60, 172 (1930); 76, 3 (1946).

In modo analogo reagisce il γ, γ' -diisossazolilfurossano ⁽³¹⁾. La stessa scissione si verifica, sia pure con minore facilità, anche quando le altre posizioni sono occupate, come abbiamo potuto constatare ad esempio per il γ -acetil, α -fenilisossazolo ⁽³²⁾, l' α, α' -dimetil, γ, γ' -diisossazolilfurossano ⁽³¹⁾ il γ -acetil, β -cloro, α -metilisossazolo ⁽³³⁾ e il γ -acetil, β -nitro, α -metilisossazolo ⁽³³⁾. L'introduzione di gruppi carbonilici diminuisce la stabilità del nucleo isossazolico di fronte agli agenti alcalini anche se essi sono presenti in posizioni diverse dalla γ . A questo fatto si può attribuire l'elegante reazione di passaggio da derivati isossazolici a derivati furazanici per azione dell'idrossilammina presentata dai γ -acilderivati ⁽³⁴⁾, la facile decomponibilità agli alcali dell' α -metil, γ -fenilisossazolaldeide ⁽³⁵⁾, e la scissione:



osservata negli esteri dei chetoacidi del tipo (XXII) ⁽³⁶⁾.

Biologia. - *Microemorragie da transito ematico e presumibile loro portata nell'economia dell'Embrione* (*). Nota di ETTORE REMOTTI e DELFINA BONETTI, presentata (**) dal Corrisp. E. REMOTTI.

Nel corso delle nostre ricerche sul sacco vitellino degli Uccelli, in particolare, sulle condizioni della sua vascularizzazione e sulla importanza delle pareti vasali come fattore di equilibrio nei processi di edificazione e conservazione delle sovrastanti strutture epiteliali, ci è ripetutamente occorso di compiere alcune osservazioni, che, trascurate in un primo tempo, ci hanno successivamente rivelato un fatto, a noi sembra, di notevole importanza.

È evenienza molto frequente, quando si estrae l'uovo incubato dal guscio e lo si immerge per la osservazione in soluzione fisiologica, rilevare, sulla parete del sacco vitellino, la presenza, lungo il decorso delle ramificazioni

(31) A. QUILICO, « Gazz. Chim. It. », 61, 271 (1931); cfr. A. QUILICO e L. PANIZZI, « Gazz. Chim. It. », 72, 468 (1942).

(32) A. QUILICO e M. SIMONETTA, « Gazz. Chim. It. », 76, 210 (1946).

(33) A. QUILICO, R. FUSCO e V. ROSNATI, « Gazz. Chim. It. », 76, 35-39 (1946).

(34) T. AJELLO, « Gazz. Chim. It. », 67, 779 (1937); 69, 391 (1939); A. QUILICO e M. FRERI, « Gazz. Chim. It. », 76, 779 (1937); 49, 391 (1939); A. QUILICO e M. FRERI, « Gazz. Chim. It. », 76, 12 (1946).

(35) A. QUILICO e L. PANIZZI, « Gazz. Chim. It. », 68, 415 (1938).

(36) C. MUSANTE, « Gazz. Chim. It. », 69, 523 (1929).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia Comparate dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

dei vasi, di areole rosse di varia ampiezza, che suggeriscono, a prima vista, l'immagine di piccole emorragie.

Le manipolazioni cui, sia pure con le maggiori precauzioni possibili, è inevitabilmente necessario sottoporre il sacco vitellino, per il suo trasferimento dal guscio entro la soluzione, e più ancora quelle successive, imposte dalla necessità dell'osservazione, giustificavano abbastanza la possibilità di traumi vari o di piccole lacerazioni delle pareti vasali, perché, per molto tempo, non si desse a questo fenomeno alcuna importanza particolare, ma lo si considerasse semplice espressione di fatti emorragici, conseguenti a lesioni puramente accidentali.

Peraltro, esso si ripresenta con notevole frequenza e con una certa regolarità, sia per la topografia – nelle zone periferiche del sacco, dove più attivo è il movimento dei materiali vitellini – sia per i caratteri di estensione e di delimitazione, da indurre, alla fine, nel dubbio che non potesse ascriversi a cause puramente accidentali, come potrebbero essere occasionali emorragie da lesioni delle pareti.

Ma ciò che ha maggiormente colpito la nostra attenzione, è stato il fatto che, prolungando l'osservazione, le macchie scompaiono senza lasciare alcuna traccia di sé. E, fatto ancor più significativo, ci fu dato talora di scorgerle anche quando, utilizzando la tecnica della diafanizzazione della testacea, le osservazioni erano compiute su uova integre, dove l'embrione, come il suo sacco, rimanevano intatti entro il loro involucro protettivo, preservati quindi da ogni manipolazione e conseguente possibilità di lesioni: evidentemente era questa l'osservazione decisiva che, permettendoci di escludere il fatto traumatico, ci induceva a sottoporre il fenomeno a una più diretta indagine.

Abbiamo quindi ripetute le nostre osservazioni, con il medesimo metodo di diafanizzazione della testacea ⁽¹⁾, sopra un numero grande di uova a vari momenti dell'incubazione, servendoci di luci di intensità e incidenza diverse, in modo da poter seguire, quanto più minutamente possibile, il fenomeno nei suoi vari aspetti e nella sua evoluzione, in rapporto soprattutto con le condizioni delle pareti vasali. Al tempo stesso, osservazioni microscopiche potevano darci elementi di controllo relativamente a questo ultimo punto.

Dal complesso degli elementi così raccolti, emerge che i presunti focolai emorragici potevano dirsi tali solo se questo termine può essere applicato anche a fatti di trasudamento o a fatti di « diapedesi » (se la parola non dovesse limitarsi, piuttosto, ai movimenti attivi ameboidi delle cellule bianche) da parte degli elementi figurati del sangue attraverso pareti vasali per se stesse assolutamente intatte. Nessuna lacerazione o, comunque, soluzione di continuità è stata mai possibile osservare; solo in alcuni casi fortunati, in cui siamo riusciti a cogliere il fenomeno in movimento, notammo un per-

(1) Per i particolari di questa tecnica vedi E. REMOTTI, *I vasi come fattore di correlazione intraorganica e riferimenti al problema delle neoplasie*. « Arch. Ital. di Anat. e di Embriol. », vol. XLVII, Firenze 1942.

meare di questi elementi all'esterno del vaso, dove si accumulano per un raggio più o meno esteso all'intorno.

Il fenomeno, che aveva potuto apparire come una accidentalità conseguente a fatti lesivi, acquista per tal modo il carattere di un'evenienza normale nella circolazione delle pareti del sacco del tuorlo: normale, sia perché osservabile anche su uova, dove ogni effetto di manipolazione poteva ritenersi escluso; sia perché facilmente e integralmente reversibile senza alcun residuo permanente.

Naturalmente, si pone con ciò una serie di problemi. Anzitutto quello del meccanismo, che presume in determinati territori della rete lo stabilirsi di modificazioni non tanto di permeabilità, quanto di « pervietà » o di traversabilità ai costituenti cellulari del sangue, sì da rendere possibile questo movimento temporaneo di passaggio, che chiameremo « transito ematico », per distinguerlo appunto dalla diapedesi attiva delle cellule bianche. In secondo luogo, il problema del possibile significato funzionale di questo movimento verrebbe ad acquistare il carattere di fenomeno normale e frequente nel funzionamento della parete del sacco vitellino.

Problema, quest'ultimo, che ci richiama a un altro dato altamente suggestivo e, al tempo stesso, oscuro della fisiologia del sistema vasale ed ematico dell'embrione: la singolarissima precocità, con la quale il sangue e le pareti vasali si differenziano, sin dai primi giorni dell'incubazione, a livello delle isole di Wolff, e quindi ancora nello spessore del sacco, al di sotto del foglietto esterno della splancnopleura, al di fuori dell'area embrionale, in un momento in cui questa è ancora agli inizi della sua differenziazione. C'è veramente da domandarsi quale sia, nell'economia dello sviluppo, il senso di questa precocità di comparsa di elementi, ai quali non sembra potersi giustificatamente attribuire una importante funzione di veicolo di ossigeno verso tessuti a strutture ancora assai poco sviluppate e in condizioni, d'altro lato, di un diretto rifornimento respiratorio, non dissimile da quello cui queste medesime isole del sangue sono anch'esse egualmente esposte.

Tratto comune, però, ai due fatti - precoce formazione cioè dei cumuli di cellule sanguigne in momenti inicialissimi dello sviluppo fisiologico, loro « transito » dalle pareti vasali durante le fasi successive dell'incubazione - è questo nesso con la massa del vitello, attraverso l'epitelio vitellino, in un territorio pertanto che è sede di attivissimo movimento del tuorlo e dove quindi intensissimi devono ritenersi gli scambi tra questo e l'embrione.

Il pensiero ricorre, dinanzi a questi dati, alla classica esperienza di Baillaillon, nella quale le cellule del sangue (rana) costituiscono, com'è noto, il « secondo fattore » dell'attivazione partenogenetica dell'uovo, indispensabile per la efficacia del « primo fattore », cioè della puntura. In termini più moderni, questo secondo fattore sarebbe da identificarsi con l'enzima proteolitico dimostrato (Parat) nella testa degli spermatozoi di *Discoglossus* e forse veicolato normalmente dalla fecondazione, e sarebbe anche da identificarsi (Bogucki, Einsele) con una proteina termolabile estraibile da ogni elemento cellulare nucleato. Sembra anche possibile (Shaver) localizzare

l'effetto di questo fattore attivante, particolarmente efficiente quando si tratti di elementi ematici, in quel componente cellulare, oggi di tanta importanza per la vita delle cellule, che sono i microsomi, con la loro carica di nucleotidi coenzimatici e di acidi ribonucleici e le conseguenti capacità di sintesi proteica. L'attivazione partenogenetica, come la fecondazione, rappresentano nell'uovo un profondo movimento di carattere litico, in un primo tempo, rapidamente sostituito, in un secondo, da un attivo movimento di sintesi. Verosimilmente è su questo complesso che deve innestarsi l'intervento degli elementi ematici, attivatori dell'uovo vergine nelle esperienze di Bataillon.

Ma la funzione del «secondo fattore» nella partenogenesi non sarebbe forse che l'eccezionale manifestazione di una funzione normalmente esplicata da questi elementi cellulari nell'economia dell'organismo embrionale: precocemente differenziati e liberamente mobili, essi potrebbero costituire degli attivatori di quei processi di trasformazione dei materiali vitellini, che, dall'inerte cumulo di riserve, trarrebbe le sostanze specifiche destinate alla crescita e alla differenziazione: una sorta, vorremmo dire, di partenogenesi a catena, che presiederebbe ai fenomeni dello sviluppo.

In questo senso poi potremmo spiegarne allora sia la precocità di comparsa in un periodo in cui è ancora difficile comprenderne una adeguata importanza respiratoria; sia i successivi movimenti di transito nel corso dell'incubazione: gli uni e gli altri localizzati, come abbiamo visto, in una zona, comunque, di intenso movimento metabolico e di intensa attività trasformativa, qual'è il livello al limite fra il tuorlo e la rete vasale, destinata a convogliarne i prodotti di trasformazione.

Quanto precede ci porta dinanzi a un complesso di possibilità nuove per la funzione circolatoria, nei suoi rapporti con i tessuti, in seno ai quali essa si svolge; nonché alla eventualità – come ci proponiamo di dimostrare in note successive – di suoi analoghi interventi anche nel corso della vita postembrionale, soprattutto quando le esigenze di un organo in attiva funzionalità implicano, correlativamente, una particolare intensità della irrorazione sanguigna. Ed è anche possibile pensare che, proprio in queste condizioni, quando il fatto puramente fisiologico perde il suo definito limite per sfumare in quello patologico, sian fenomeni di normale transito, del tipo da noi descritto, l'origine prima di una diffusione che potrà divenire irreversibile, trasformandosi in fenomeno congestizio o in una vera e propria alterazione emorragica.

BIBLIOGRAFIA

- BATAILLON, « Arch. Entw. Mechanik, 30 (1910); « Arch. Zool. exper. gén. », 56 (1910); « Ann. Sci. Nat. Zool. », 16 (1912).
 BOGUCKI, « C. R. Soc. Biol. », 89 (1923).
 EINSELE, « Arch. Entw. Mech. », 123 (1930).
 SHAVER, Citato da BRACHET, *Le rôle et la localisation des acides nucléiques au cours du développement embryonnaire*. Rosenberg e Sellier. Torino, 1949.

- NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti*^(*). Nota I di FERNANDO BERTOLINI, presentata^(**) dal Socio M. PICONE.

1. Sia D un dominio limitato e semplicemente connesso del piano (x, y) ; la sua frontiera sia una curva rettificabile (semplice e chiusa), ogni punto della quale (salvo al più quelli di un certo insieme chiuso e di misura lineare nulla) sia il centro d'un arco (di $\mathfrak{F}D$) dotato di curvatura continua, e sia anche il centro d'un segmento normale ad $\mathfrak{F}D$, per metà esterno e per metà interno a D ; sia n_P l'asse normale ad $\mathfrak{F}D$ nel punto P , orientato verso l'interno di D .

Decomponiamo $\mathfrak{F}D$ in due parti, C' e C'' , prive di punti (linearmente) interni comuni, composte ciascuna d'uno o più archi di $\mathfrak{F}D$ (in numero finito, mutuamente privi di punti interni comuni), orientati come $\mathfrak{F}D$; gli archi di cui si compone C'' siano in numero di v , e siano P'_i e P''_i rispettivamente il primo ed il secondo punto terminale dell' i -esimo tra essi. Definiamo su C' due funzioni reali, $F(P)$ e $G(P)$: la prima assolutamente continua rispetto all'ascissa curvilinea, con derivata hilbertiana su C' ; la seconda hilbertiana su C' . Sia $[f]_D$ la classe delle funzioni armoniche in $D - \mathfrak{F}D$, continue in D , dotate delle proprietà seguenti: $f(P)$ riesca su $\mathfrak{F}D$ assolutamente continua rispetto all'ascissa curvilinea, con derivata hilbertiana su $\mathfrak{F}D$; per quasi ogni $P \in \mathfrak{F}D$, esista determinato e finito il limite

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_P} f(Q) \quad [\text{su } n_P],$$

che riesca funzione hilbertiana su $\mathfrak{F}D$. Consideriamo il problema

(D, C') . *Esiste in $[f]_D$ una funzione $f(P)$ verificante le condizioni*

$$(1) \quad f(P) = F(P) \text{ su } C', \quad \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_P} f(Q) = G(P) \quad [\text{su } n_P] \text{ quasi ovunque su } C'?$$

Se esiste, essa è ben determinata: *assegnarne una formola risolutiva*. Discuteremo questo problema estendendo un procedimento di G. ZIN⁽¹⁾, ed otterremo una formola risolutiva analoga ad una trovata da M. Picone per rappresentare una funzione olomorfa di cui siano noti i valori su curve assegnate⁽²⁾.

(*) Lavoro eseguito all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) G. ZIN, *Esistenza e rappresentazione di funzioni analitiche, le quali su una curva di Jordan si riducono ad una funzione assegnata*, in « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, tomo XXXIV, pp. 365-405 (1953).

(2) M. PICONE, *Sul calcolo delle funzioni olomorfe di una variabile complessa*. Nel volume, in corso di stampa, dedicato alla memoria di RICHARD VON MISES.

2. Nella classe $[f]_D$ sia data una successione $\{u_k(P)\}_{k=0,1,\dots}$ di funzioni continue in D con le derivate prime, e la successione $\{v_k(P)\}_{k=0,1,\dots}$ delle rispettive armoniche coniugate (nulle in un certo punto P^0); avremo dunque

$$\frac{\partial}{\partial x} u_k(P) = \frac{\partial}{\partial y} v_k(P) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} u_k(P) = -\frac{\partial}{\partial x} v_k(P) \quad \text{per } P \in D,$$

e di conseguenza

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial s} u_k(P) = \frac{\partial}{\partial n} v_k(P) \quad \text{quasi ovunque su } \mathfrak{F}D \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Chiamiamo $U_k(P)$ quella funzione assolutamente continua (rispetto all'ascissa curvilinea) su C'' , definita dalle relazioni

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial s} U_k(P) = u_k(P) \quad \text{su } C'', \quad U_k(P'_i) = 0 \quad (i=1,2,\dots,\nu; k=0,1,\dots);$$

chiamiamo $w_k(P)$ il vettore piano (su $\mathfrak{F}D$ quasi ovunque definito ed hilbertiano) avente come componenti tangenziale e normale (ad $\mathfrak{F}D$) rispettivamente $u_k(P)$ e $v_k(P)$.

Supporremo sempre che il sistema di vettori $\{w_k(P)\}_{k=0,1,\dots}$ sia hilbertianamente completo su C'' , e che il sistema di funzioni $\{v_k(P)\}_{k=0,1,\dots}$ sia atto alla approssimazione lineare uniforme del primo ordine in D della funzione $\log \overline{PQ}$, per ogni punto Q fissato all'esterno d'un cerchio contenente D : vedremo più avanti dei casi abbastanza generali in cui questa condizione è verificata. Ammettiamo ancora per semplicità (e senza restrizione essenziale) che il sistema di vettori $\{w_k(P)\}_{k=0,1,\dots}$ sia ortonormale su C'' , ossia

$$(4) \quad \int_{C''} w_h(P) \times w_k(P) ds = \int_{C''} [u_h(P) \cdot u_k(P) + v_h(P) \cdot v_k(P)] ds = \begin{cases} 0 & \text{per } h \neq k \\ 1 & \text{per } h = k. \end{cases}$$

Posto

$$(5) \quad a_k = \int_{C''} \left[F(P) \frac{\partial}{\partial n} v_k(P) - v_k(P) \cdot G(P) \right] ds + \sum_{i=1}^{\nu} [F(P'_i) \cdot u_k(P'_i) - F(P'_i) \cdot u_k(P'_i)],$$

consideriamo le serie

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(P) \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(P) \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(P) \quad [\text{su } C'']$$

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(P) \quad [\text{su } C''],$$

e dimostriamo il teorema:

1. Affinché il problema (D, C') abbia soluzione, occorre e basta che le serie (6) convergano in media su C'' , e che la serie (7) converga nei punti P'_i , verificando le condizioni

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(P'_i) = F(P'_i) - F(P'_i) \quad (i=1,2,\dots,\nu).$$

Necessità. - Se il problema ammette soluzione, avremo, applicando il teorema di reciprocità, la (2), e successivamente integrando per parti il termine $f(P) \frac{\partial}{\partial s} u_k(P)$,

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{C'} \left[f(P) \frac{\partial}{\partial n} v_k(P) - v_k(P) \frac{\partial}{\partial n} f(P) \right] ds + \sum_{i=1}^v [f(P'_i) \cdot u_k(P'_i) - f(P'_i) \cdot u_k(P'_i)] = \\ &= - \int_{C''} \left[f(P) \frac{\partial}{\partial n} v_k(P) - v_k(P) \frac{\partial}{\partial n} f(P) \right] ds + \sum_{i=1}^v [f(P''_i) \cdot u_k(P''_i) - f(P'_i) \cdot u_k(P'_i)] = \\ &= \int_{C''} \left[u_k(P) \frac{\partial}{\partial s} f(P) + v_k(P) \frac{\partial}{\partial n} f(P) \right] ds = \int_{C''} \text{grad } f(P) \times w_k(P) ds, \end{aligned}$$

e quindi la (6₁) è la serie di Fourier del vettore $\text{grad } f(P)$ [hilbertiano su C''], e quindi converge globalmente verso di esso su C'' ; dalla relazione ora stabilita

$$\frac{\partial}{\partial s} f(P) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(P) \quad [\text{su } C'']$$

segue, come si doveva dimostrare,

$$f(P'_i) - f(P'_i) = (C'') \int_{P'_i}^{P''_i} \frac{\partial}{\partial s} f(P) ds = \sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(P''_i).$$

Sufficienza. - Si ponga

$$(9) \quad f^o(P) = F(P) \quad \text{su } C', = \sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(P) + F(P'_i) \quad \text{sull'arco } C''(P'_i, P'_i),$$

$$(10) \quad g^o(P) \doteq G(P) \quad \text{su } C', \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(P) \quad \text{su } C'',$$

e dimostriamo che è

$$(11) \quad \int_{\partial D} \left[v_h(P) \cdot g^o(P) - f^o(P) \frac{\partial}{\partial n} v_h(P) \right] ds = 0 \quad (h = 0, 1, 2, \dots).$$

Ma si ha, applicando successivamente le (2), (8), (5), (4) e con una integrazione per parti,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left[v_h(P) \cdot g^o(P) - f^o(P) \frac{\partial}{\partial n} v_h(P) \right] ds &= \int_{C'} \left[v_h(P) \cdot G(P) - F(P) \frac{\partial}{\partial n} v_h(P) \right] ds \\ &+ \sum_{i=1}^v (C'') \int_{P'_i}^{P''_i} \left[v_h(P) \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(P) - \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(P) + F(P'_i) \right\} \frac{\partial}{\partial n} v_h(P) \right] ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{C'} \left[v_h(P) \cdot G(P) - F(P) \frac{\partial}{\partial n} v_h(P) \right] ds + \int_{C''} v_h(P) \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(P) ds \\
 & - \sum_{i=1}^v (C'') \int_{P_i'}^{P_i''} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(P) + F(P_i') \right] \frac{\partial}{\partial s} u_h(P) ds = \\
 & \int_{C'} \left[v_h(P) \cdot G(P) - F(P) \frac{\partial}{\partial n} v_h(P) \right] ds + \int_{C''} \left[v_h(P) \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(P) + u_h(P) \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(P) \right] ds \\
 & - \sum_{i=1}^v u_h(P_i'') \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(P_i'') + F(P_i'') \right] + \sum_{i=1}^v u_h(P_i') \cdot F(P_i') = \\
 & \int_{C'} \left[v_h(P) \cdot G(P) - F(P) \frac{\partial}{\partial n} v_h(P) \right] ds - \sum_{i=1}^v [F(P_i'') \cdot u(P_i'') - F(P_i') \cdot u(P_i')] \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{C''} w_k(P) \times w_k(P) ds = 0.
 \end{aligned}$$

In base all'ipotesi ammessa per il sistema di funzioni $\{v_h(P)\}_{h=0,1,2,\dots}$, per ogni punto P fissato all'esterno d'un cerchio contenente D avremo

$$\int_{\mathfrak{F}D} \left[f^o(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - g^o(Q) \cdot \log \overline{PQ} \right] ds(Q) = 0,$$

come immediata conseguenza della (11).

La funzione $f(P)$ così definita:

$$(12) \quad f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}D} \left[f^o(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - g^o(Q) \cdot \log \overline{PQ} \right] ds(Q) \quad (P \text{ non } \in \mathfrak{F}D)$$

risulta armonica sia nell'interno che all'esterno di D , nulla in un intorno dell'infinito, e quindi, per prolungamento analitico, nulla in $\mathbb{C}D$; essa verifica dunque le ipotesi di un teorema di L. Amerio⁽³⁾, in base al quale si può asserire ch'essa risolve il problema (D, C') .

3. Vogliamo in questo numero dare alla (12) una forma particolarmente espressiva, da paragonarsi con la (4) del lavoro citato in⁽²⁾. Poniamo,

$$(13) \quad \arg(P, Q) = (C'') \int_{P_i'}^Q \frac{\partial}{\partial n_{P_i}} \log \overline{PP_i} ds(P_i) \quad \text{per } P \in \mathbb{C}D, Q \in C''(P_i', P_i'')$$

($i = 1, 2, \dots, v$),

(3) L. AMERIO, *Sulla integrazione della equazione $\Delta u - \lambda u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi*, in « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », classe di Scienze, vol. LXXVIII, fasc. 1 (1944-45).

$$(14) \quad c_k(P) = \int_{C''} [u_k(Q) \cdot \arg(P, Q) + v_k(Q) \cdot \log \overline{PQ}] ds(Q) =$$

$$\int_{C''} [v_k(Q) \cdot \log \overline{PQ} - U_k(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ}] ds(Q) + \sum_{i=1}^v U_k(P_i'') \cdot \arg(P, P_i'')$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots);$$

per la completezza hilbertiana del sistema di vettori $\{u_k(P)\}_{k=0,1,2,\dots}$ avremo

$$(15) \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k(P) \cdot u_k(Q) \doteq \arg(P, Q) \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k(P) \cdot v_k(Q) \doteq \log \overline{PQ} \quad \text{su } C''.$$

Per le (9), (10), (14), (8), (5), (3), (13), (15), con qualche integrazione per parti, la (12) formalmente si trasforma così:

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \left[f^0(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - g^0(Q) \cdot \log \overline{PQ} \right] ds(Q) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left[F(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - G(Q) \cdot \log \overline{PQ} \right] ds(Q) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^v F(P_i'') \cdot \arg(P, P_i'')$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{C''} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[U_k(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - v_k(Q) \cdot \log \overline{PQ} \right] ds(Q) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left[F(Q) \frac{\partial}{\partial n} \log \overline{PQ} - G(Q) \cdot \log \overline{PQ} \right] ds(Q) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^v F(P_i'') \cdot \arg(P, P_i'')$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\sum_{i=1}^v U_k(P_i'') \cdot \arg(P, P_i'') - c_k(P) \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left[F(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - G(Q) \cdot \log \overline{PQ} \right] ds(Q) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^v F(P_i'') \cdot \arg(P, P_i'')$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} c_k(P) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left[F(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} v_k(Q) - v_k(Q) \cdot G(Q) \right] ds(Q)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(P) \sum_{i=1}^v [F(P_i'') \cdot u_k(P_i'') - F(P_i'') \cdot u_k(P_i'')] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{C'} F(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\log \overline{PQ} - \sum_{k=0}^n c_k(P) \cdot v_k(Q) \right]$$

$$- G(Q) \left[\log \overline{PQ} - \sum_{k=0}^n c_k(P) \cdot v_k(Q) \right] ds(Q).$$

Se ne deduce il teorema:

II. Se il problema (D, C') ammette soluzione $f(P)$, ed inoltre la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(P) \cdot u_k(Q)$ converge verso $\arg(P, Q)$ per $Q = P'_i$ e per $Q = P''_i$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$), uniformemente al variar di P in un insieme chiuso interno a D , allora avremo

$$(16) \quad f(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left\{ F(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\log \overline{PQ} - \sum_{k=0}^n c_k(P) \cdot v_k(Q) \right] - G(Q) \left[\log \overline{PQ} - \sum_{k=0}^n c_k(P) \cdot v_k(Q) \right] \right\} ds(Q)$$

uniformemente al variar di P nel menzionato insieme chiuso.

Vedremo più avanti dei casi, abbastanza generali, in cui l'ipotesi di questo teorema è verificata.

4. Torniamo ora al sistema di vettori $\{w_k(P)\}_{k=0,1,2,\dots}$ ed al sistema di funzioni $\{v_k(P)\}_{k=0,1,2,\dots}$ e consideriamo il caso particolarmente semplice che C'' sia tutto costituito di segmenti dell'asse x . Poniamo allora

$$(17) \quad \begin{cases} u_{2k}(x, y) = \Re(x + iy)^k, & v_{2k}(x, y) = \Im(x + iy)^k \\ u_{2k+1}(x, y) = \Im(x + iy)^k, & v_{2k+1}(x, y) = -\Re(x + iy)^k \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots);$$

evidentemente le (2) son verificate, ed il sistema $\{v_k(P)\}_{k=0,1,\dots}$ è atto alla approssimazione lineare uniforme del primo ordine in D della funzione $\log \overline{PQ}$, per ogni Q fissato all'esterno d'un cerchio contenente D . Inoltre si ha

$$u_{2k}(x, 0) = x^k, \quad v_{2k}(x, 0) = 0, \quad u_{2k+1}(x, 0) = 0, \quad v_{2k+1}(x, 0) = -x^k,$$

ed è quindi banale che i vettori $\{w_k(x, y)\}_{k=0,1,\dots}$ costituiscano un sistema hilbertianamente completo su C'' .

Il caso generale potrebbe ritenersi compreso in quanto detto, a meno di una trasformazione conforme; vogliamo tuttavia osservare ancora quanto segue.

Supponiamo di conoscere una successione hilbertianamente completa su C'' di funzioni $\{p_k(x + iy)\}_{k=0,1,\dots}$ olomorfe in un campo contenente D , tra le quali si trovino anche le potenze $(x + iy)^0, (x + iy)^1, \dots, (x + iy)^k, \dots$; avremo dunque, per ogni funzione $g(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$, hilbertiana su C'' ,

$$(18) \quad \int_{C''} g(z) p_k(z) ds = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots$$

solo quando $g(z)$ è quasi ovunque nulla su C'' . Si noti che, se l'arco $\overline{D}(P'_1, P''_\nu)$ - contenente C'' - è dotato di funzione parametrica $\varphi(z)$ ⁽⁴⁾ relativamente

(4) La nozione di *funzione parametrica* è stata introdotta da M. PICONE nella Nota citata in ⁽²⁾, alla quale si rinvia il lettore.

ad un campo contenente D , allora la successione $\{p_k(z)\}_{k=0,1,\dots}$ può esser così definita:

$$p_{2k}(z) = z^k, \quad p_{2k+1}(z) = [\varphi(z)]^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ciò premesso, poniamo

$$(19) \quad \begin{cases} u_{2k}(x, y) = \Re p_k(x + iy), & v_{2k}(x, y) = \Im p_k(x + iy), \\ u_{2k+1}(x, y) = \Im p_k(x + iy), & v_{2k+1}(x, y) = -\Re p_k(x + iy); \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

le (2) sono evidentemente verificate; il sistema $\{v_k(P)\}_{k=0,1,\dots}$ è atto alla approssimazione lineare uniforme del primo ordine in D della funzione $\log PQ$, per ogni Q fissato all'esterno d'un cerchio contenente D : resta da dimostrare la completezza hilbertiana del sistema dei vettori $\{w_k(P)\}_{k=0,1,\dots}$ su C'' .

A tale scopo, sia dato su C'' un vettore (reale) hilbertiano, di cui sia $u(x, y)$ la componente tangenziale e $v(x, y)$ la componente normale; se esso è su C'' ortogonale a tutti i vettori del sistema $\{w_k(x, y)\}_{k=0,1,\dots}$, avremo, per le (19),

$$\int_{C''} [u(x, y) \cdot \Re p_k(x + iy) + v(x, y) \cdot \Im p_k(x + iy)] ds = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{C''} [u(x, y) \cdot \Im p_k(x + iy) - v(x, y) \cdot \Re p_k(x + iy)] ds = 0,$$

da cui

$$\int_{C''} [u(x, y) + iv(x, y)] \cdot p_k(x + iy) ds = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

e quindi

$$u(x, y) + iv(x, y) \equiv 0 \text{ su } C'', \quad \text{c. d. d.}$$

Si noti che nel primo caso qui studiato, che C'' sia tutto contenuto nello asse x , le serie a primo membro delle (15) convergono verso i rispettivi se-

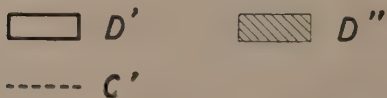
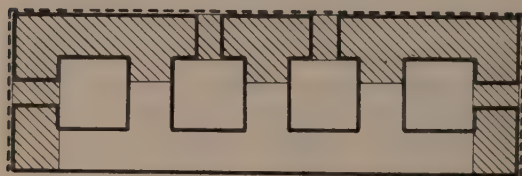


Fig. 1.

condi membri (su C'') uniformemente al variar di P in qualunque insieme chiuso contenuto in $D - \mathfrak{F}D$, e sono derivabili termine a termine (quante volte si vuole) rispetto alle coordinate di P : se ne deduce che la relazione di limite (16) - se il problema (D, C') ammette soluzione - è in questo caso uniforme al variar di P in un insieme chiuso qua-

lunque contenuto in $D - \mathfrak{F}D$, ed è derivabile termine a termine (quante volte si vuole) rispetto alle coordinate di P .

Altrettanto si potrebbe dimostrare nell'ipotesi, più larga, che $\mathfrak{F} D (P_1, P_v)$ sia dotata di funzione parametrica.

5. Diamo ora un breve cenno al caso che il dominio D sia a connessione multipla. Sia dunque D un dominio connesso del piano (x, y) , verificante tutte le ipotesi già ammesse al n. 1, salvo quella della semplice connessione, conservino $C', C'', F(P)$ e $G(P)$ il significato già loro attribuito. Ammettiamo inoltre le ipotesi seguenti:

1° il dominio D è la somma di due domini D' e D'' , ciascuno verificante le ipotesi già ammesse ai nn. 1 e 2 per il dominio D ;

2° l'intersezione dei domini D' e D'' consta di m domini T_1, T_2, \dots, T_m mutuamente privi di punti comuni e verificanti ciascuno le ipotesi ammesse ai nn. 1 e 2 per il dominio D ;

3° è contenuto in $\mathfrak{F} D''$ un arco C di C' ;

4° $\mathfrak{F} D', \mathfrak{F} T_1, \mathfrak{F} T_2, \dots, \mathfrak{F} T_m$ contengono, ciascuna, un arco contenuto in C .

III. In queste ipotesi, affinché il problema (D, C') abbia soluzione, occorre e basta che abbiano soluzione i problemi $(D', C' \cdot \mathfrak{F} D')$ e $(D'', C' \cdot \mathfrak{F} D'')$.

La necessità della condizione è banale. Viceversa, siano $f'(P)$ ed $f''(P)$ le soluzioni rispettive dei problemi $(D', C' \cdot \mathfrak{F} D')$ e $(D'', C' \cdot \mathfrak{F} D'')$: esse saranno anche le soluzioni di ciascuno dei problemi $(T_h, C' \cdot \mathfrak{F} T_h)$ ($h=1, 2, \dots, m$), ed avremo quindi $f'(P) = f''(P)$ in $\sum_{h=1}^m T_h = D' \cdot D''$, per il teorema d'unicità.

Ne segue che la funzione così definita:

$$f(P) = f'(P) \text{ per } P \in D', = f''(P) \text{ per } P \in D'',$$

risolve il problema (D, C') , c. d. d.

Le due figure mostrano come un dominio pluriconnesso possa esser considerato somma di due domini D' e D'' dotati delle proprietà sopra richieste.

6. Si offre spontanea la generalizzazione del problema (D, C') dal caso piano al caso iperspaziale, e così pure la generalizzazione della formola risolutiva (12), o (16): una seconda Nota verrà dedicata a tali questioni.

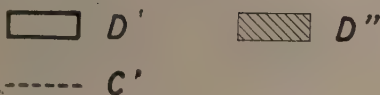
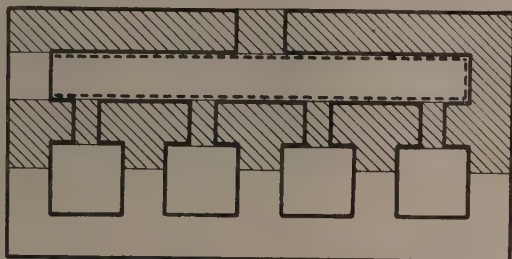


Fig. 2.

Geometria algebrica. — *Sull'estensione di un teorema di Castelnuovo-Humbert.* Nota di LEONARD ROTH, presentata ^(*) dal Socio B. SEGRE.

1. Nella teoria delle superficie algebriche, è ormai acquisito tutto un complesso di risultati concernenti le superficie che contengono sistemi di curve razionali. Anzitutto si ha il teorema di Noether ⁽¹⁾, secondo cui è birazionale ogni superficie che contenga un fascio razionale di curve razionali; da questo Castelnuovo ⁽²⁾ ha desunto che è unirazionale ogni superficie contenente un sistema ∞^1 razionale, di indice $\nu > 1$, di curve razionali; ed in base ad un altro teorema ⁽³⁾ dello stesso Autore, la superficie risulta anzi birazionale.

Quasi contemporaneamente Humbert ⁽⁴⁾ ha stabilito che, se una superficie F contiene un sistema algebrico, di indice $\nu > 1$, di curve razionali, essa è unirazionale; la dimostrazione di Humbert, di natura trascendente, può venir sostituita da una di tipo algebro-geometrico, poggianti sul teorema ⁽⁵⁾ di Castelnuovo-Enriques relativo alle superficie che contengono un sistema di curve di grado n e genere π virtuali soddisfacenti alla disuguaglianza $n > 2\pi - 2$; si vede così che F deve risultare razionale o riferibile a rigata, e quest'ultima eventualità va scartata perché una rigata non può contenere un sistema di curve razionali di indice maggiore di uno.

Infine Enriques ⁽⁶⁾ ha dimostrato che ogni superficie dotata di un fascio di genere p di curve razionali può venir trasformata in un'altra contenente un fascio, di genere p , di cubiche o di coniche, e che allora la superficie è riferibile ad una rigata di genere p .

Nella presente Nota esaminiamo la possibilità di estendere vari di questi risultati alle V_r algebriche ($r > 2$), con speciale riguardo al caso delle V_3 . Va avvertito che, in virtù dell'esistenza ⁽⁷⁾, per ogni valore di $r \geq 3$, di V_r che sono unirazionali ma non birazionali, la distinzione tra questi due termini va tenuta presente in tutto il seguito.

2. Sia V_r una varietà non singolare di dimensione $r > 2$ che contenga una congruenza Γ (sistema ∞^{r-1} irriducibile di indice $\nu \geq 1$) di curve \mathcal{C} razio-

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) M. NOETHER, «Math. Annalen», 3, 161 (1871); cfr. A. COMESSATTI, «Boll. U. M. I.», (2), 3, 97 (1940), e F. CONFORTO, «Rend. Accad. Italia», (7), 2, 268 (1941).

(2) G. CASTELNUOVO, «Rend. Accad. Lincei», (5), 3, 473 (1894).

(3) G. CASTELNUOVO, «Math. Annalen», 44, 145 (1894).

(4) G. HUMBERT, «Journ. de Math.», (4), 10, 197 (1894).

(5) G. CASTELNUOVO-F. ENRIQUES, «Annali di Mat.», (3), 6, 165 (1901).

(6) F. ENRIQUES, «Math. Annalen», 52, 449 (1899); cfr. anche E. D. TAGG, «Journ. Lond. Math. Soc.», 14, 216 (1939), e F. CONFORTO, loc. cit.

(7) L. ROTH, «Rend. Accad. Lincei», (8), 12, 265 (1952).

nali. Consideriamo dapprima il caso $v = 1$; allora possiamo sempre supporre che la \mathcal{C} generica sia irriducibile e non singolare, perché se avesse dei punti multipli, basterebbe applicare la trasformazione di B. Segre⁽⁸⁾ un numero finito di volte per ottenere una varietà V_r , birazionalmente equivalente a V_r e contenente una congruenza Γ' , birazionalmente equivalente a Γ , di curve \mathcal{C}' razionali il cui elemento generico sia non singolare. Mediante il processo di riduzione di Noether-Enriques, che vale per sistemi, anche irrazionali, di dimensione qualunque, possiamo trasformare V_r birazionalmente in una varietà contenente una congruenza, di indice uno, di coniche o di rette, secondoché l'ordine di \mathcal{C} è pari o dispari. Supponiamo ora che Γ sia *birazionale*: allora, in quest'ultimo caso anche V_r risulta birazionale e, ovviamente, Γ possiede delle V_{r-1} , unisecanti. Se invece \mathcal{C} è di ordine pari, può darsi che tali unisecanti non esistano; i primi esempi di V_r birazionali contenenti congruenze siffatte son dovuti a Montesano⁽⁹⁾, e d'altro canto vi sono⁽¹⁰⁾ delle V_r unirazionali ($r \geq 3$) dotate di congruenze birazionali di coniche che non ammettono unisecanti. Morin⁽¹¹⁾ ha dimostrato che *condizione sufficiente affinché esista una V_{r-1} , unisecante è la riducibilità della varietà, di dimensione $r-1$, immagine delle curve \mathcal{C} riducibili*, ove si convenga di considerare come virtualmente inesistente ogni componente di molteplicità pari; ed allora, evidentemente, V_r risulta birazionale.

Supposta non soddisfatta questa condizione, la Γ può tuttavia ammettere qualche V_{r-1} , n -secante ($n > 2$) birazionale, nel qual caso, in base ad un teorema di Enriques⁽¹²⁾, V_r risulta unirazionale e rappresentabile sopra una involuzione I_n di S_r : dalla dimostrazione di questo teorema si vede anzi che per l'unirazionalità di V_r basta che V_{r-1} sia *unirazionale*. Mentre non si conoscono per ora esempi di congruenze birazionali prive di tali plurisecanti, è per lo meno presumibile che sia non unirazionale la V_3^m di S_3 ($m > 4$) la cui unica singolarità sia una retta l ($m-2$)-pla: se tale presunzione venisse confermata, vorrebbe dunque dire che la congruenza di coniche giacenti nei piani per l non ammette plurisecanti unirazionali.

Questi risultati vengono completati, nel caso $r = 3$, dal teorema di Fano⁽¹³⁾: *se Γ è irrazionale (non birazionale), allora V_3 non può essere unirazionale*. Aggiungiamo che il teorema non vale probabilmente nel caso $r > 3$,

(8) B. SEGRE, « Rend. Accad. Lincei », (8), 3, 411 (1947). Ricordiamo che detta trasformazione si ottiene considerando, in primo luogo, la curva \mathcal{C}_1 corrispondente a \mathcal{C} sulla trasformazione W_r di V_r mediante le quadriche dello spazio ambiente e, in secondo luogo, la curva i cui punti rappresentano le tangenti di \mathcal{C}_1 sulla grassmanniana delle rette dello spazio ambiente di W_r .

(9) D. MONTESANO, « Rend. Accad. Napoli », (3), 1, 93, 155 (1895).

(10) L. ROTH, loc. cit.

(11) U. MORIN, « Rend. Semin. Mat. Padova », 9, 1 (1938). Nel caso d'una forma contenente una congruenza di coniche giacenti nei piani passanti per una retta fissa, tale condizione è anche necessaria.

(12) F. ENRIQUES, « Annali di Mat. », (3), 20, 109 (1913).

(13) G. FANO, « Rend. Accad. Lincei », (6), 15, 3 (1932); la dimostrazione trovasi riprodotta in (7).

in quanto la dimostrazione di Fano fa appello alla razionalità delle involuzioni piane, proprietà che, come abbiamo già ricordato, non si estende alle varietà di dimensione superiore.

3. Passando ora agli invarianti di V_r , proviamo più generalmente che *Su ogni V_r , luogo di una congruenza Γ qualunque, di indice uno, di curve razionali, l'aggiunzione si estingue.*

Supponiamo dapprima che sia $r = 3$; allora, è noto che l'aggiunta R' ad una superficie R (razionale o riferibile a rigata) appartenente a Γ deve soddisfare alla condizione $[\mathcal{C}R'] = -2$. Ora, essendo A una superficie effettiva qualsiasi di V_3 , una sua aggiunta A' viene data dall'equivalenza $A' \equiv A + R' - R$, onde segue che $[\mathcal{C}A'] = [\mathcal{C}A] - 2$. Quindi l'aggiunta $A^{(i)}$ i -esima di A risulta virtuale per tutti i valori di i abbastanza grandi.

Ne segue che *il genere geometrico e i plurigeneri di V_3 son tutti nulli*, perché in caso contrario il processo di aggiunzione successiva non potrebbe aver termine.

I risultati analoghi, per $r > 3$, si ottengono poi per induzione, considerando analogamente, nel caso $r = 4$, una V_3 appartenente a Γ , e così via.

Dimostriamo ora che, *se Γ è birazionale, V_r è superficialmente regolare*. Basta all'uopo considerare il caso $r = 3$: sia $|R|$ una rete di superficie razionali corrispondenti ad una rete omaloidica (certo esistente) sulla superficie immagine di Γ ; tale rete è a curva caratteristica variabile irriducibile, ed è quindi generica nel senso di Castelnuovo-Enriques, e siccome R è regolare risulta che è nulla l'irregolarità superficiale q di V_3 . Conseguentemente, V_3 non può contenere un fascio irrazionale di superficie.

Siamo ora in grado di stabilire che

Se V_3 contiene una congruenza birazionale, di indice uno, di curve razionali, essa è completamente regolare (a generi nulli).

In virtù del fatto che il genere geometrico P_g e l'irregolarità q di V_3 sono entrambi nulli, basta dimostrare che il genere aritmetico P_a è nullo anch'esso. Ricordiamo dapprima che, per ogni V_3 , il carattere $P_g - P_a + q$ è un invariante assoluto non negativo ⁽¹⁴⁾; dal che risulta $P_a \leq 0$. Ma possiamo dimostrare di più: infatti, dati su V_3 due fasci $|A|$, $|B|$ razionali di superficie in posizione generica, sappiamo ⁽¹⁵⁾ che il numero t di contatti stazionari di una A con una B viene dato dalla formula

$$t = 48(P_a + p_A + p_B + g_{AB}),$$

ove p_A , p_B , e g_{AB} denotano rispettivamente i generi aritmetici di A e B ed il genere della curva (irriducibile) (AB) .

Ora, siccome la superficie immagine di Γ contiene certamente dei fasci di curve unisecantisi, possiamo scegliere su V_3 due fasci $|A|$, $|B|$ di superficie razionali appartenenti a Γ e tali che la curva (AB) consti d'una sola \mathcal{C} ;

(14) F. SEVERI, « Rend. Palermo », 28, 33 (1909).

(15) B. SEGRE, « Mem. Accad. d'Italia », 5, 479 (1934) (§ 19).

allora, applicando detta formula a questo caso, in cui $p_A = p_B = g_{AB} = 0$, ed osservando che $t \geq 0$, troviamo che è $P_a \geq 0$, e quindi $P_a = 0$.

4. Supponiamo ora che V_r contenga una congruenza Γ di curve \mathcal{C} razionali d'indice $\nu > 1$: allora, applicando a Γ la trasformazione di B. Segre (n. 2), otteniamo una V_r non singolare generata semplicemente da una congruenza Γ' , birazionalmente equivalente a Γ , di curve \mathcal{C}' razionali, immagini birazionali di \mathcal{C} ; così V_r viene posta in corrispondenza $(\nu, 1)$ con V_r . In base all'osservazione fatta al n. 2, le \mathcal{C}' irriducibili possono suppersi prive di singolarità.

Stabiliremo la seguente estensione del teorema di Morin: *Se V_r contiene una congruenza Γ birazionale, di indice $\nu > 1$, di curve razionali, tale che risulti riducibile (nel senso del n. 2) la varietà delle curve riducibili di Γ , allora V_r è unirazionale e rappresentabile sopra una involuzione di ordine ν di S_r .*

Difatti, la trasformata V'_r di V_r costruita come sopra contiene una congruenza Γ' la quale, in base al n. 2, ammette una V_{r-1} unisecante ed è quindi birazionale, mentre – come abbiamo visto – V_r viene rappresentata sopra una involuzione I_ν di V'_r .

Osserviamo inoltre che, *se le curve \mathcal{C} sono di ordine dispari, allora V_r è unirazionale e rappresentabile sopra una I_ν , poiché (n. 2) in quel caso Γ , e quindi anche Γ' , ammette delle unisecanti.*

Più generalmente, *se Γ' ammette qualche plurisecante unirazionale (in particolare, birazionale), allora V_r è unirazionale*, perché, sotto quella ipotesi, essa viene rappresentata sopra una involuzione su di una V'_r unirazionale.

Passando alle congruenze irrazionali, osserviamo che, *nel caso $r > 2$, il teorema di Humbert non è valido in generale*: ad esempio, se $r = 3$, $\nu = 2$, la V_3 può benissimo contenere una congruenza algebrica di rette a cui appartenga un fascio irrazionale di quadriche, nel quale caso V_3 è certo superficialmente irregolare e quindi, come tosto vedremo, non unirazionale. Osserviamo pure che *il teorema di Fano non si estende al caso $r > 2$, $\nu > 1$* : ad esempio, la forma cubica generale di S_4 contiene una congruenza, di indice 6, di rette, che è irrazionale – anzi, irregolare ⁽¹⁶⁾ – epperò la varietà risulta unirazionale.

5. Torniamo a considerare gli invarianti di V_r ; e proviamo che *Su ogni V_r , luogo di una congruenza qualsiasi, di indice $\nu > 1$, di curve razionali, l'aggiunzione si estingue.*

Difatti, la trasformata V'_r di V_r , definita come al n. 4, contiene una congruenza Γ' di indice uno eppertanto, in base al n. 3, su essa l'aggiunzione si estingue; quindi, mediante semplici considerazioni ⁽¹⁷⁾ della jacobiana di un sistema lineare di ipersuperficie su V_r , e la varietà ad essa corrispondente

(16) G. FANO, «Atti Accad. Torino», 39, 778 (1904).

(17) Per le corrispondenze tra varietà algebriche nel caso $r = 3$, vedi B. SEGRE, «Mem. Acad. Roy. Belgique», (2), 14, 1 (1936).

su V_r , troviamo che la proprietà analoga sussiste anche per V_r . Ne segue che il *generè geometrico e i plurigeneri di V_r sono tutti nulli*.

Dimostriamo pure che, *se Γ è birazionale, V_r è superficialmente regolare*. Anzitutto, siccome la trasformata V_r contiene una congruenza Γ' birazionale di indice uno, essa è superficialmente regolare (n. 3); il risultato segue dall'osservare che una superficie generica di V_r ha per immagine una superficie generica di V_r , unita nell'involuzione I_v , e che l'irregolarità della prima non può superare quella della seconda.

Infine, ne segue che, nel caso $r = 3$, il genere P_a di V_3 deve soddisfare alla disuguaglianza $P_a \leq 0$ (n. 3).

6. Supponiamo ora che V_r sia unirazionale: allora, in virtù della sua rappresentazione su uno spazio S_r (varietà superficialmente regolare su cui l'aggiunzione si estingue), troviamo, come al n. 5, che V_r è dotata di queste stesse proprietà; inoltre, per una V_3 unirazionale, si ha sempre $P_a \leq 0$.

Considerando la rappresentazione parametrica di V_r , data da equazioni del tipo

$$x_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_r) \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

ove le f_i sono funzioni razionali delle r variabili u_1, u_2, \dots, u_r fra loro indipendenti, vediamo subito che V_r contiene delle congruenze birazionali - ad esempio, quella (diciamola Γ_1) data dalle equazioni $u_2 = a_2, u_3 = a_3, \dots, u_r = a_r$ - ed anche dei sistemi ∞^1 razionali di ipersuperficie unirazionali - ad esempio quello (diciamolo Σ_1) dato da $u_1 = a_1$. Ma sia la congruenza sia il sistema, che usualmente risulta ad essa plurisecante, hanno in generale l'indice $v > 1$; sorge quindi la questione se V_r debba necessariamente contenere una congruenza birazionale di indice uno. Già nel caso $r = 2$, la risposta a tale domanda è tutt'altro che immediata; qui tratteremo il caso $r > 2$ sotto un'ipotesi eventualmente ristrettiva, e cioè supponendo che le ipersuperficie del sistema Σ_1 , e dei sistemi $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_{r-1}$, definiti in modo analogo, siano generalmente non singolari, e che abbiano una curva intersezione generalmente semplice e non singolare. Allora infatti il sistema Σ_1 , essendo razionale, è totalmente contenuto⁽¹⁸⁾ in un sistema $A^{(1)}$ lineare di V_r ; e siccome l'ipersuperficie generica di Σ_1 è non singolare, il sistema $|A^{(1)}|$ è pure costituito da ipersuperficie non singolari. Applicando lo stesso ragionamento a ciascun dei sistemi $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots$, troviamo su V_r dei sistemi $|A^{(2)}|, |A^{(3)}|, \dots$ analoghi. Infine, se scegliamo $r-1$ fasci razionali rispettivamente da $|A^{(1)}|, |A^{(2)}|, \dots, |A^{(r-1)}|$, la curva intersezione di essi descriverà una congruenza birazionale, di indice uno, di curve razionali, che è appunto la congruenza richiesta. Dal n. 3 discende che una V_r unirazionale soddisfacente all'ipotesi suddetta è completamente regolare.

(18) F. ENRIQUES, « Rend. Palermo », 10, 30 (1896); la dimostrazione di Enriques, data per il solo caso $r = 2$, si estende subito al caso $r > 2$.

Meccanica. — *Su alcune questioni di media nei moti centrali.*

Nota di ARNALDO MASOTTI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

Considerato un generico moto centrale su traiettoria chiusa, si propone una ovvia estensione delle nozioni di *anomalia media* e di *equazione del centro*, familiari nella teoria dei moti kepleriani (n. 1, 2, 3). Indi si parla delle *medie* di una grandezza rispetto all'anomalia media e all'anomalia vera, rilevando una notevole relazione fra medie siffatte, e facendo applicazioni a importanti quantità cinematiche e dinamiche attinenti al moto considerato (n. 4, 5) (†).

1. Sia L una linea piana chiusa, priva di punti multipli, e O un punto interno (ved. figura 1). Un punto P descriva L di moto centrale rispetto a O , nel verso positivo. Se A è la posizione del punto mobile nell'istante da cui si conta il tempo t , assumiamo il sistema di coordinate polari che ha per polo il centro O e per asse polare il raggio che da O proietta A . Come è consuetudine, indicheremo con r il raggio vettore di P . Quanto all'anomalia, la denoteremo con V , e la chiameremo *anomalia vera*.

Detta h la costante delle aree (cioè il doppio della velocità areolare costante di P rispetto a O), l'area del settore descritto dal raggio vettore nell'intervallo di tempo $(0, t)$, nel quale l'anomalia vera cresce da 0 a V , ammette le due espressioni

$$\frac{1}{2} h t \quad , \quad \frac{1}{2} \int_0^V r^2 dV$$

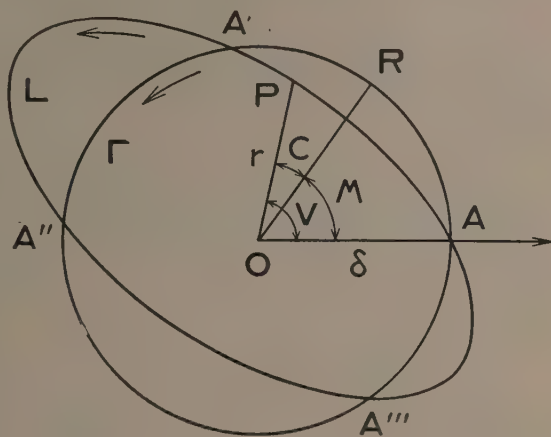


Fig. 1.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(†) Qualcuno degli argomenti accennati considerai, pei moti ellittici kepleriani e pei moti ellittici armonici, in recenti Note: [1] *Osservazioni sui moti kepleriani*. « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », vol. LXXXIV, pp. 345-353 (1951). [2] *Linea indicatrice della equazione del centro nei moti kepleriani*, ib., vol. LXXXV, pp. 65-81 (1952). [3] *Sui valori medi delle potenze del raggio vettore nei moti kepleriani*, ib., vol. LXXXV, pp. 273-277 (1952). [4] *Sui moti ellittici armonici*, in corso di stampa nelle « Memorie della Società Astronomica Italiana ».

dalla cui eguaglianza scende la relazione fra anomalia vera e tempo:

$$(1) \quad t = \frac{1}{h} \int_0^V r^2 dV.$$

In particolare il periodo τ (cioè il tempo impiegato dal punto mobile a percorrere una volta l'intera orbita) è espresso da

$$(2) \quad \tau = \frac{2\pi\delta^2}{h},$$

avendo posto

$$(3) \quad \delta^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 dV,$$

con che è chiaro che δ^2 è il valor medio di r^2 rispetto all'anomalia vera (durante una rivoluzione), e δ è il raggio del cerchio che ha la medesima area dell'orbita. Ci sarà utile un cerchio di raggio δ con centro O: è il cerchio Γ della figura 1, dove si vede altresì che in uno dei punti di intersezione di Γ con L è stato scelto l'arbitrario punto A donde si contano tempi e anomalie vere.

2. Supponiamo che da A nell'istante iniziale parta un punto R che descriva il cerchio Γ di moto uniforme, nel verso positivo, percorrendolo tutto nel tempo τ , sicché P e R, che partono insieme da A, insieme vi ritornano dopo aver percorso interamente le rispettive traiettorie. La velocità angolare costante di R è

$$(4) \quad n = \frac{2\pi}{\tau},$$

e coincide evidentemente colla velocità angolare media di P rispetto al tempo (durante una rivoluzione). La velocità areolare costante di R coincide con quella di P. L'anomalia vera di R all'istante t è

$$(5) \quad M = nt.$$

Chiameremo n il *moto medio* di P, e M l'*anomalia media* di P, e ciò in armonia con quanto si fa nello studio dei moti kepleriani (dove tuttavia il cerchio su cui si fa muovere R non è il nostro Γ , bensì il cerchio che ha per centro il centro della traiettoria ellittica e per raggio il semiasse maggiore di essa).

Analogamente attingeremo dalla teoria dei moti kepleriani la denominazione di *equazione del centro* per la differenza C fra anomalia vera e anomalia media:

$$(6) \quad C = V - M.$$

Essa è la misura algebrica dell'angolo $\widehat{R\hat{O}P}$, formato dai raggi che dal centro O proiettano i punti R e P. Si può dire che essa è, per un osservatore collocato in O, l'anticipo angolare di P su R.

Osservazione. — Qualora il punto R fosse fatto partire, all'istante iniziale, non dal punto A, ma da un altro punto di Γ , di anomalia vera σ , tutte le M sarebbero aumentate di σ e tutte le C sarebbero diminuite di σ .

3. Mediante la (1), utilizzando anche le (2) e (4), si deducono dalle (5) e (6) le espressioni seguenti dell'anomalia media e dell'equazione del centro in termini dell'anomalia vera:

$$(7) \quad M = \frac{1}{\delta^2} \int_0^V r^2 dV,$$

$$(8) \quad C = V - \frac{1}{\delta^2} \int_0^V r^2 dV,$$

donde si trae:

$$(9) \quad \frac{dM}{dV} = \frac{r^2}{\delta^2},$$

$$(10) \quad \frac{dC}{dV} = 1 - \frac{r^2}{\delta^2}.$$

Riservandoci di utilizzare più avanti la (9), rileviamo subito alcune informazioni che si possono dedurre immediatamente dalla (10) intorno al comportamento dell'equazione del centro: la C è crescente quando $r < \delta$,

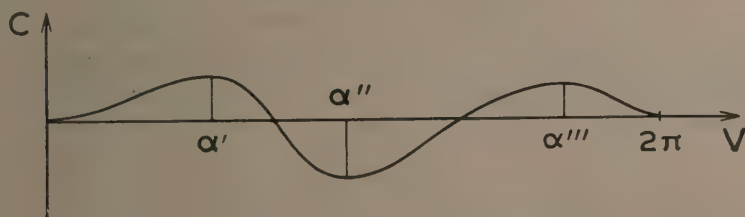


Fig. 2.

è decrescente quando $r > \delta$, è stazionaria quando $r = \delta$. Quindi la C è crescente quando P percorre i tratti di L interni a Γ , è decrescente quando P percorre i tratti di L esterni a Γ , è stazionaria quando P transita per i punti di intersezione di L con Γ , e questi sono punti di massimo o di minimo per C a seconda che P esce da Γ o vi entra.

Per esempio, nel caso della figura 1, C cresce lungo AA' e $A''A'''$, decresce lungo $A'A''$ e $A'''A$, è massimo in A' e A''' , è minimo in A e A'' , il minimo in A essendo nullo. Il diagramma di C (concepita come funzione di V) avrà dunque l'aspetto indicato nella figura 2, dove α' α'' α''' denotano le anomalie vere di A' A'' A''' . E se esso interseca l'asse delle ascisse, le ascisse delle intersezioni sono le anomalie vere di punti nei quali si annulla l'equazione del centro. Queste anomalie, insieme all'anomalia nulla che

competere al punto A, sono le radici dell'equazione in V che si ottiene eguagliando a zero il secondo membro della (8) ⁽²⁾.

Osservazione. - Le cose esposte nei nn. 1, 2, 3 facilmente si estendono al caso in cui la traiettoria si chiude dopo γ giri intorno al centro: si trova che tutto si riduce a sostituire 2π con $2\gamma\pi$ ovunque esso compare nelle formule (2), (3), (4).

4. Detta G una grandezza dipendente dalla posizione di P, di essa si possono calcolare le medie, durante una rivoluzione, sia rispetto al tempo che rispetto a ciascuna delle anomalie, M e V. Grazie alla (5) coincidono le medie rispetto al tempo e rispetto all'anomalia media, sicché ci si può ridurre a considerare le medie rispetto a M e V, che indicheremo con $(G)_M$ e $(G)_V$, oppure più semplicemente con G_M e G_V (quando è possibile). Esse sono espresse dalle formule

$$(11) \quad G_M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G dM, \quad G_V = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G dV$$

nelle quali, sotto i segni integrali, figurano indicate collo stesso simbolo G le espressioni della grandezza considerata in termini di M e di V, rispettivamente.

Dalle (11) e dalla (9) si deduce la relazione

$$(12) \quad G_M = \frac{1}{\delta^2} (Gr^2)_V,$$

che permette di esprimere una media rispetto a M con una media rispetto a V, e viceversa. Applicata alla funzione $G = r^v$ (dove l'esponente v è arbitrario), essa dà:

$$(13) \quad (r^v)_M = \frac{1}{\delta^2} (r^{v+2})_V,$$

donde scende in particolare, per $v = 0$ e per $v = -2$:

$$(14) \quad (r^2)_V = \delta^2, \quad \left(\frac{1}{r^2}\right)_M = \frac{1}{\delta^2}$$

la prima delle quali già ci è nota, perché coincide con la (3). Appare dalle (14) che dove $r = \delta$, cioè nei punti di intersezione di L con Γ , non soltanto r^2 prende il suo valor medio rispetto a V, ma anche $1/r^2$ prende il suo valor medio rispetto a M.

Si può dunque dire che, nei punti di intersezione di L con Γ , il momento d'inerzia polare di P rispetto a O (espresso da mr^2 , se m è la massa di P) assume il suo valor medio rispetto a V, e la velocità angolare di P (espressa da h/r^2) assume il suo valor medio rispetto a M.

(2) Pei moti ellittici kepleriani e armonici altri diagrammi di C considerai nelle citate Note [2] e [4].

Ecco qualche altra applicazione a grandezze cinematiche.

a) La velocità radiale di P, suscettibile delle espressioni identiche

$$(\alpha) \quad -h \frac{dr^{-1}}{dV}, \quad (\beta) \quad \frac{h}{r^2} \frac{dr}{dV}$$

ha i valori medi ambedue nulli, come risulta calcolando quello rispetto a V mediante la (α) e la seconda (11), quello rispetto a M mediante la (β), la (12) e la seconda (11).

b) La velocità trasversa di P, espressa da h/r , ha i valori medi

$$\frac{h}{\delta^2} r_V, \quad h \left(\frac{1}{r} \right)_V$$

rispetto a M e V, ordinatamente.

5. Venendo ora a grandezze dinamiche, interessano naturalmente i valori medi della intensità F dell'attrazione (sua componente radiale centripeta) e della energia cinetica T, a cui spettano le note espressioni

$$(15) \quad F = \frac{k}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2 r^{-1}}{dV^2} \right],$$

$$(16) \quad T = \frac{k}{2} \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{dr^{-1}}{dV} \right)^2 \right],$$

avendo posto $k = mh^2$.

Si può constatare direttamente, calcolando i valori medi di F e di T, che fra essi stanno legami degni di nota. Ma la deduzione si presenta più semplice e più simmetrica, e dà luogo a un risultato più generale, se si procede come segue. Detta φ una generica funzione di r , si osservi che

$$\frac{d}{dV} \left(\varphi \frac{dr^{-1}}{dV} \right) = \varphi' \frac{dr}{dV} \frac{dr^{-1}}{dV} + \varphi \frac{d^2 r^{-1}}{dV^2} = -\varphi' r^2 \left(\frac{dr^{-1}}{dV} \right)^2 + \varphi \frac{d^2 r^{-1}}{dV^2},$$

donde, tenendo conto delle (15) e (16),

$$\frac{d}{dV} \left(\varphi \frac{dr^{-1}}{dV} \right) = \frac{r^2}{k} \left\{ \varphi \left[F - \frac{k}{r^3} \right] - \varphi' \left[2T - \frac{k}{r^2} \right] \right\}.$$

Da questa, eguagliando le medie rispetto a V dei due membri, si deduce:

$$(17) \quad \left(r^2 \right) \left\{ \varphi \left[F - \frac{k}{r^3} \right] - \varphi' \left[2T - \frac{k}{r^2} \right] \right\}_V = 0,$$

da cui, per la (12):

$$(18) \quad \left(\varphi \left[F - \frac{k}{r^3} \right] - \varphi' \left[2T - \frac{k}{r^2} \right] \right)_M = 0.$$

Ecco qualche conseguenza di queste formule:

a) Posto $\varphi = 1$, la (18) dà:

$$(19) \quad F_M = k \left(\frac{1}{r^3} \right)_M,$$

donde segue, per la (13):

$$(20) \quad F_M = \frac{k}{\delta^2} \left(\frac{1}{r} \right)_V.$$

Ambedue queste formule danno il valor medio rispetto al tempo della intensità dell'attrazione: la (19) dice che su F_M ha influenza solo il primo termine dei due che si ottengono sviluppando il prodotto che figura nel secondo membro della (15), termine che è sempre inversamente proporzionale al cubo della distanza ⁽³⁾; la (20) esprime F_M mediante la costante meccanica h e espressivi elementi geometrici globali dell'orbita, e cioè i valori medi di r^2 e $1/r$ rispetto all'anomalia vera.

b) Posto $\varphi = r$, la (18) dà:

$$(21) \quad (2T - rF)_M = 0,$$

e poiché $-rF$ è il *viriale* dell'attrazione rispetto al centro del moto, si riconosce nella (21) una nota proposizione, valida anche in condizioni più generali ⁽⁴⁾. Si può dedurre dalla (21) che la *azione* durante una rivoluzione, notoriamente espressa dal prodotto del periodo per il valor medio di $2T$ rispetto al tempo ⁽⁵⁾, eguaglia $\tau(rF)_M$; da ciò, mediante le (2) e (12), si ricava per l'azione \mathcal{A} la formula:

$$(22) \quad \mathcal{A} = \frac{2\pi}{h} (Fr^3)_V.$$

c) Posto $\varphi = r^v$, le (17) e (18) danno:

$$(23) \quad \left(r^{v+1} \left[rF - 2vT + (v-1) \frac{h}{r^2} \right] \right)_V = 0,$$

$$(24) \quad \left(r^{v-1} \left[rF - 2vT + (v-1) \frac{h}{r^2} \right] \right)_M = 0,$$

nella seconda delle quali si vede una estensione della (21) ⁽⁶⁾.

(3) Alla (19) si può giungere più rapidamente come segue. Nel generico moto piano di un punto materiale libero, la componente radiale centripeta della forza motrice è data da

$$m(r\dot{V}^2 - \ddot{r}).$$

Quindi, se il moto è periodico, il valor medio di questa componente rispetto al tempo, in un periodo, si riduce al valor medio di

$$mr\dot{V}^2,$$

e se inoltre il moto è centrale, a quello di

$$\frac{mh^2}{r^3}.$$

Ricordando che $h = m\dot{r}^2$, si ravvisa in questo risultato quello contenuto nella (19).

(4) R. CLAUSIUS, *Sur une quantité analogue au potentiel et sur un théorème y relatif*. « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », vol. LXX, pp. 1314-1319 (1870). V. CERUTI, *Sul viriale*. « Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli », pp. 154-165 (1876).

(5) Ved. per esempio B. FINZI, *Meccanica razionale*, II edizione (Bologna, Zanichelli, 1950), vol. II, p. 309.

(6) Alcune proposizioni sui valori medi di F e T , valide nei moti ellittici kepleriani e armonici, diedi nelle citate Note [1] e [4].

Meccanica. — *Moti oscillatori di un corpo rigido galleggiante in un liquido di cui si considera l'inerzia.* Nota di LUIGI MARCHETTI, presentata ^(*) dal Socio G. KRALL.

1. PREMESSE. — In un articolo di A. Kryloff ⁽¹⁾, notissimo fra i cultori di architettura navale, è riportata, completa, la teoria dei piccoli moti di un galleggiante (rigido) in un fluido *privo d'inerzia*. In appendice allo stesso articolo C. Müller richiama le classiche ricerche del Kelvin e del Kirchhoff ^(2,3) sul moto rigido di un solido di rotazione, *totalmente immerso*, in fluido inerte.

In quell'indirizzo sono state studiate le piccole oscillazioni di un corpo galleggiante in fluido inerte in una Nota di G. Krall ⁽⁴⁾. Là è preso riguardo *al solo rollio* nella ipotesi che tutt'intorno all'area di galleggiamento la superficie del fluido sia irrigidita, e la carena sia del tipo, oggi frequente, a fondo piatto. In tal guisa la determinazione del potenziale Φ per la velocità del fluido è ricondotta ad un problema di Neumann per il semispazio, anziché a quella assai più difficile di un analogo problema con condizioni miste.

Qui si vuole estendere quello studio al caso generale in cui, concomitante al rollio si ha beccheggio e moto oscillatorio di emersione (traslatorio verticale, ferme tenendo le altre ipotesi. Inoltre si dànno formule rigorose per aree di galleggiamento ellittiche, trattate nella Nota citata con metodo analitico-numerico a partire dalla soluzione rigorosa per l'area di galleggiamento circolare.

Nelle equazioni del Kryloff, che scriveremo nella forma ridotta del von Mises ⁽⁵⁾, verranno così ad essere aggiunti dei termini che sintetizzano il contributo dell'inerzia del fluido e stabiliscono un nuovo concatenamento d'inerzia, oltre a quello ordinario di capacità, tra il beccheggio e il moto di emersione. Il rollio rimane ancora *separato* dagli altri due movimenti, sicché restano valide le formule della Nota citata in ⁽⁴⁾ anche in fase del moto più generale qui considerato.

2. EQUAZIONE DEI PICCOLI MOTI. — Ciò posto, preso riferimento agli assi baricentrici x, y, z delle masse dello scafo, indichiamone con M il valore totale; siano A e B i momenti principali d'inerzia relativi ad x ed y . Siano inoltre h ed h' le *distanze metacentriche trasversale e longitudinale*, z, ψ, χ lo spostamento secondo z e rispettivamente le rotazioni attorno all'asse x (rollio) e all'asse y (beccheggio). Indichi infine γ_a la densità specifica del fluido, G il momento statico dell'area di galleggiamento Ω rispetto al piano yz , $S (= Mg)$ il *dislocamento*.

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) A. KRYLOFF, C. H. MÜLLER, *Encykl. Math. Wiss.*, IV, 22.

(2) THOMSON-TAIT, *Treatise of Natur. Phil.*, I, n. 325, Cambridge, 1879.

(3) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mechanik*, XIX Vorlesung, Teubner, Lipsia, 1897.

(4) G. KRALL, « *Acta Pont. Acad. Scient.* », 1946.

(5) R. v. MISES, *Encykl. Math. Wiss.*, IV, 10, 25 a.

Le equazioni per i *piccoli* moti si scrivono allora:

$$(1) \quad \begin{cases} M\ddot{s} + \Omega s - G\chi = 0, \\ A\ddot{\psi} + h\mathfrak{S}\psi = 0, \\ B\ddot{\chi} + h'\mathfrak{S}\chi - Gs = 0. \end{cases}$$

3. ENERGIA CINETICA DI UN FLUIDO INDEFINITO CONSEGUENTE AL MOTO DI UN CORPO RIGIDO IMMERSO. TEOREMA DEL KIRCHHOFF. - Se un corpo si muove di moto rigido in un fluido, questo reagisce con un moto ben determinato, e le cose vanno come se l'inerzia del corpo venisse aumentata. Per valutare le proprietà inerziali virtuali, conseguenti al fluido, che si aggiungono a quelle del corpo, conviene procurarsi i binomi lagrangiani, per il che occorre e basta valutare l'energia $\Delta\mathfrak{E}$ del fluido.

Secondo Kirchhoff se un corpo rigido si muove in un fluido indefinito in cui è completamente immerso, ammesso che il fluido sia incompressibile, si avrà un potenziale di velocità Φ armonico, continuo ed uniforme in tutto il campo, per ipotesi semplicemente connesso. Esso soddisfa dunque l'equazione

$$(2) \quad \Delta\Phi = 0.$$

Sul contorno Ω del corpo, quando si indichi con n la normale ad esso relativa, e con $u, v, w; p, q, r$ le sei caratteristiche della velocità (componenti della traslazione e della rotazione), deve essere corrispondentemente alla condizione di velocità relativa nulla

$$(3) \quad \frac{d\Phi}{dn} = (u + zq - yr) \cos \hat{n}x + (v + xr - zp) \cos \hat{n}y + (w + yp - xq) \cos \hat{n}z.$$

Infine, le derivate parziali prime debbono annullarsi all'infinito.

Il Kirchhoff ha posto per il potenziale Φ una espressione del tipo

$$(4) \quad \Phi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6,$$

dove i potenziali $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$ soddisfano in \mathfrak{C} la (2); sul contorno Ω di \mathfrak{C} le condizioni

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dn} = \cos \hat{n}x, & \frac{d\varphi_4}{dn} = y \cos \hat{n}z - z \cos \hat{n}y = \Pi_x, \\ \frac{d\varphi_2}{dn} = \cos \hat{n}y, & \frac{d\varphi_5}{dn} = z \cos \hat{n}x - x \cos \hat{n}z = \Pi_y, \\ \frac{d\varphi_3}{dn} = \cos \hat{n}z, & \frac{d\varphi_6}{dn} = x \cos \hat{n}y - y \cos \hat{n}x = \Pi_z, \end{cases}$$

Π_x, Π_y, Π_z essendo le componenti del vettore $\vec{\Pi} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \vec{n}$, con \mathbf{P} punto di Ω .

Ciò posto, l'energia cinetica $\Delta\mathfrak{E}$ del fluido è data da

$$\Delta\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \gamma_a \int_V \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV,$$

o, ciò che è lo stesso, da

$$(6) \quad \Delta\mathfrak{E} = -\frac{1}{2} \gamma_a \int_{\Omega} \Phi \frac{d\Phi}{dn} d\Omega.$$

Nella nostra schematizzazione si ha, per ampiezze z, ψ, χ sufficientemente piccole,

$$u = v = r = 0, \quad w = \dot{z}, \quad p = \dot{\psi}, \quad q = \dot{\chi},$$

e la (6) diviene in conformità

$$(7) \quad \Delta \mathcal{E} = -\frac{1}{2} \gamma_a \int_{\Omega} \{ [\dot{z}^2 \cos \hat{n}z + \dot{z} \dot{\psi} \Pi_x + \dot{z} \dot{\chi} \Pi_y] \varphi_3 + \\ + [\dot{\psi} \dot{z} \cos \hat{n}z + \dot{\psi}^2 \Pi_x + \dot{\psi} \dot{\chi} \Pi_y] \varphi_4 + [\dot{\chi} \dot{z} \cos \hat{n}z + \dot{\chi} \dot{\psi} \Pi_x + \dot{\chi}^2 \Pi_y] \varphi_5 \} d\Omega.$$

Le equazioni lagrangiane del moto del corpo quando si tenga conto del moto del fluido non saranno più le (1), ma dovranno essere ricavate tenendo per base dinamica non la \mathcal{E} , ma la $\mathcal{E} + \Delta \mathcal{E}$, con $\Delta \mathcal{E}$ dato dalla (7).

Risulta in conformità

$$(1, a) \quad \left\{ \begin{aligned} & M\ddot{z} - \gamma_a \ddot{z} \int_{\Omega} \varphi_3 \cos \hat{n}z d\Omega + \frac{1}{2} \gamma_a \left[\ddot{\psi} \int_{\Omega} \varphi_3 \Pi_x d\Omega + \ddot{z} \int_{\Omega} \varphi_4 \cos \hat{n}z d\Omega + \right. \\ & \quad \left. + \ddot{\chi} \int_{\Omega} \varphi_5 \cos \hat{n}z d\Omega \right] + \Omega z - G\chi = 0; \\ & A\ddot{\psi} - \gamma_a \ddot{\psi} \int_{\Omega} \varphi_4 \Pi_x d\Omega - \frac{1}{2} \gamma_a \left[\ddot{z} \int_{\Omega} \varphi_3 \Pi_x d\Omega + \ddot{z} \int_{\Omega} \varphi_4 \cos \hat{n}z d\Omega + \right. \\ & \quad \left. + \ddot{\chi} \int_{\Omega} \varphi_4 \Pi_y d\Omega + \ddot{\chi} \int_{\Omega} \varphi_5 \Pi_x d\Omega \right] + h\mathcal{E}\psi = 0; \\ & B\ddot{\chi} - \gamma_a \ddot{\chi} \int_{\Omega} \varphi_5 \Pi_y d\Omega - \frac{1}{2} \gamma_a \left[\ddot{z} \int_{\Omega} \varphi_3 \Pi_y d\Omega + \ddot{\psi} \int_{\Omega} \varphi_4 \Pi_y d\Omega + \right. \\ & \quad \left. + \ddot{z} \int_{\Omega} \varphi_5 \cos \hat{n}z d\Omega + \ddot{\psi} \int_{\Omega} \varphi_5 \Pi_x d\Omega \right] + h'\mathcal{E}\chi - Gz = 0. \end{aligned} \right.$$

Sono queste le equazioni di Kryloff corrette per il contributo dell'inerzia del fluido. Per vederne l'impiego consideriamo il

4. CASO DI UN GALLEGGIANTE. — Sia $z = 0$ il piano di galleggiamento; il semispazio $z \geq 0$ è il campo del fluido. Riteniamo che la superficie di carena sia confondibile con Ω (carena piatta) e che su xy esterno ad Ω si possa ritenere sia, corrispondentemente ad un irrigidimento superficiale del fluido (lastrone di ghiaccio, ad esempio),

$$(8) \quad \frac{d\Phi}{dn} = 0$$

equivalente all'annullarsi della velocità ⁽⁶⁾.

(6) In caso diverso si avrebbe, in luogo di $\frac{d\Phi}{dn} = 0$, la condizione di Airy $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$. Ma questa comporta difficoltà analitiche notevoli non ancora del tutto superate.

Le (5) si riducono a

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dn} = \frac{d\varphi_2}{dn} = \frac{d\varphi_6}{dn} = 0, & \frac{d\varphi_3}{dn} = 1 \\ \frac{d\varphi_4}{dn} = [\Pi_x]_{z=0} = y, & \frac{d\varphi_5}{dn} = [\Pi_y]_{z=0} = -x \end{cases}$$

sull'area Ω . Fuori di Ω , sul piano $z=0$, tali derivate sono tutte nulle. La determinazione delle $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ è ricondotta alla soluzione - già nota - di un problema di Neumann per il semispazio; si ha ⁽⁷⁾ precisamente

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{d\Omega(P')}{r(P, P')}, \\ \varphi_4 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{y(P') d\Omega(P')}{r(P, P')}, \\ \varphi_5 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{x(P') d\Omega(P')}{r(P, P')} \end{cases}$$

dove $P(x, y)$ e $P'(x', y')$ indicano una coppia di punti *distinti* di Ω , ed $r = \overline{PP'}$; e $\Delta\mathfrak{E}$ diviene

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta\mathfrak{E} = & \frac{1}{4\pi} \gamma_a \{ \dot{z}^2 \Delta\mathfrak{J} + 2 \dot{z} \dot{\psi} \Delta\mathfrak{J}_x - 2 \dot{z} \dot{\chi} \Delta\mathfrak{J}_y - \\ & - 2 \dot{\chi} \dot{\psi} \Delta\mathfrak{J}_{xy} + \dot{\psi}^2 \Delta\mathfrak{J}_{xx} + \dot{\chi}^2 \Delta\mathfrak{J}_{yy} \}, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} \Delta\mathfrak{J} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{d\Omega(P) d\Omega(P')}{r(P, P')}, & \Delta\mathfrak{J}_{xx} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{y(P) y(P') d\Omega(P) d\Omega(P')}{r(P, P')}, \\ \Delta\mathfrak{J}_x &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{y(P) d\Omega(P) d\Omega(P')}{r(P, P')}, & \Delta\mathfrak{J}_{yy} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{x(P) x(P') d\Omega(P) d\Omega(P')}{r(P, P')}, \\ \Delta\mathfrak{J}_y &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{x(P) d\Omega(P) d\Omega(P')}{r(P, P')}, & \Delta\mathfrak{J}_{xy} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{x(P) y(P') d\Omega(P) d\Omega(P')}{r(P, P')}. \end{aligned}$$

Con l'ulteriore semplificazione che la distribuzione delle masse presenti l'asse x come asse di simmetria, risultando sotto tale ipotesi $\Delta\mathfrak{J}_x = \Delta\mathfrak{J}_{xy} = 0$, si avrà per $\Delta\mathfrak{E}$ l'espressione

$$(12) \quad \Delta\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} \gamma_a \dot{z}^2 \Delta\mathfrak{J} - \frac{1}{2\pi} \gamma_a \dot{z} \dot{\chi} \Delta\mathfrak{J}_y + \frac{1}{4\pi} \gamma_a \dot{\psi}^2 \Delta\mathfrak{J}_{xx} + \frac{1}{4\pi} \gamma_a \dot{\chi}^2 \Delta\mathfrak{J}_{yy},$$

(7) Cfr., per esempio, M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, vol. I, Cap. V, Napoli 1946.

e le equazioni di Kryloff corrette, quando si tenga conto anche dell'inerzia del fluido, divengono

$$(1, b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(M + \frac{1}{2\pi} \gamma_a \Delta \mathfrak{J} \right) \ddot{z} - \frac{1}{2\pi} \gamma_a \ddot{\chi} \Delta \mathfrak{J}_y - \Omega z - G\chi = 0, \\ \left(A + \frac{1}{2\pi} \gamma_a \Delta \mathfrak{J}_{xx} \right) \psi + h \mathfrak{J} \psi = 0, \\ \left(B + \frac{1}{2\pi} \gamma_a \Delta \mathfrak{J}_{yy} \right) \ddot{\chi} - \frac{1}{2\pi} \gamma_a \ddot{z} \Delta \mathfrak{J}_y + h' \mathfrak{J} \chi - Gz = 0. \end{array} \right.$$

5. CALCOLO DEGLI AUTOPOTENZIALI $\Delta \mathfrak{J}$, $\Delta \mathfrak{J}_y$, $\Delta \mathfrak{J}_{xx}$, $\Delta \mathfrak{J}_{yy}$ RELATIVI AD UN'AREA DI GALLEGGIAMENTO ELLITTICA. — Sia l'area di galleggiamento Ω rappresentata da un'ellisse di semiassi a , b . Vogliamo determinare i valori degli autopotenziali $\Delta \mathfrak{J}$, $\Delta \mathfrak{J}_y$, $\Delta \mathfrak{J}_{xx}$, $\Delta \mathfrak{J}_{yy}$ ad essa relativi. Per il calcolo faremo riferimento ad un sistema di coordinate polari.

Dette x, y le coordinate di un punto variabile sull'ellisse Ω , introdotte le nuove coordinate X, Y legate alle vecchie dalle relazioni: $X = x, Y = \frac{a}{b} y$, la ellisse si trasforma nel cerchio C del piano X, Y avente centro in O e raggio a . La distanza $r(P, P')$, con riferimento ai simboli introdotti nella figura qui a fianco riportata, si trasformerà in

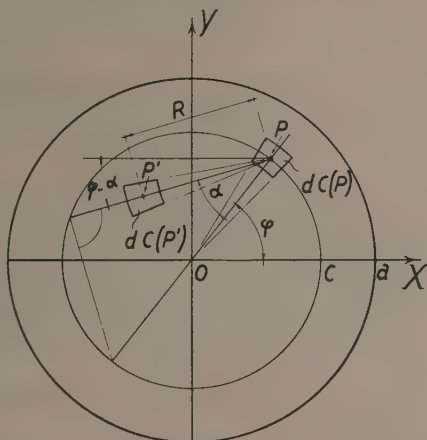


Fig. 1.

$$R = \frac{r}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2(\varphi - \alpha)}}, \quad \text{con } k = \frac{b}{a}.$$

Ciò posto, con calcoli elementari, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{J} &= \iint_{\Omega} \frac{d\Omega(P) d\Omega(P')}{r(P, P')} = k^2 \iint_C \frac{dC(P) dC(P')}{R \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2(\varphi - \alpha)}} = \\ &= k^2 \int_0^a c dc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \int_0^{2c \cos \alpha} \frac{dR}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2(\varphi - \alpha)}} = \\ &= \frac{8}{3} \pi k^2 a^3 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (1 - k^2)^n \right). \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si perviene per gli altri autopotenziali ai risultati seguenti:

$$\Delta \mathfrak{J}_y = 0,$$

$$\Delta \mathfrak{J}_{xx} = \frac{4}{15} \pi k^2 a^5 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 (1 - k^2)^n \right\},$$

$$\Delta \mathfrak{J}_{yy} = \frac{4}{15} \pi k^2 a^5 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 (1 - k^2)^n \right\}.$$

Se poi l'area di galleggiamento si riduce ad un cerchio di raggio a , risultando in tal caso $k = \frac{b}{a} = 1$, si ottengono i ben noti autopotenziali:

$$\Delta \mathfrak{J} = \frac{8}{3} \pi a^3, \quad \Delta \mathfrak{J}_y = 0, \quad \Delta \mathfrak{J}_{xx} = \Delta \mathfrak{J}_{yy} = \frac{4}{15} \pi a^5.$$

6. CONCLUSIONI. - Dalle equazioni di Kryloff (1, b) si nota che, quando si tiene conto dell'inerzia del fluido, appaiono, oltreché i termini preesistenti relativi all'*accoppiamento di capacità* fra il moto oscillatorio verticale ed il beccheggio anche termini di *accoppiamento di inerzia*. E notiamo inoltre che il rollio, *anche se il corpo è un galleggiante*, NON si accoppia ai due moti.

Per la determinazione delle frequenze, posto al solito

$$(13) \quad z = z_0 e^{i\sigma t}, \quad \psi = \psi_0 e^{i\sigma t}, \quad \chi = \chi_0 e^{i\sigma t},$$

risulta un sistema algebrico lineare omogeneo nelle z_0, ψ_0, χ_0 , e da qui per l'esistenza di soluzioni non nulle, attesa la separazione della ψ (rollio) dalla χ e z , le due equazioni in σ^2 :

$$(15) \quad a_{12} - \sigma^2 b_{12} = 0,$$

$$(16) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma^2 b_{11} & a_{13} - \sigma^2 b_{13} \\ a_{13} - \sigma^2 b_{13} & a_{33} - \sigma^2 b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

essendosi posto

$$a_{11} = \Omega, \quad a_{13} = -G, \quad b_{11} = M + \frac{1}{2\pi} \gamma_a \Delta \mathfrak{J}, \quad b_{13} = -\frac{1}{2\pi} \gamma_a \Delta \mathfrak{J}_y,$$

$$a_{12} = hS, \quad a_{33} = h'S', \quad b_{12} = A + \frac{1}{2\pi} \gamma_a \Delta \mathfrak{J}_{xx}, \quad b_{33} = B + \frac{1}{2\pi} \gamma_a \Delta \mathfrak{J}_{yy}.$$

Dalla (15) si ha subito il periodo del rollio secondo la formula riportata in (4)

$$T_r = \frac{2\pi}{\sigma} = 2\pi \sqrt{\frac{b_{12}}{a_{12}}}.$$

Dalla (16), posto per i periodi di emersione e beccheggio \bar{T}_e e \bar{T}_b non accoppiati:

$$\bar{T}_e = \frac{2\pi}{\sigma_e} = 2\pi \sqrt{\frac{b_{11}}{a_{11}}}, \quad \bar{T}_b = \frac{2\pi}{\sigma_b} = 2\pi \sqrt{\frac{b_{33}}{a_{33}}},$$

risulta (8):

$$T_e = 2\pi \sqrt{\frac{2(b_{11}b_{33} - b_{13}^2)}{a_{11}b_{33} + a_{33}b_{11} - 2a_{13}b_{13} + VD}},$$

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{2(b_{11}b_{33} - b_{13}^2)}{a_{11}b_{33} + a_{33}b_{11} - 2a_{13}b_{13} - VD}},$$

$$\text{con } D = (a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})^2 - 4a_{13}b_{13}(a_{11}b_{33} + a_{33}b_{11}) + 4(a_{13}^2b_{11}b_{33} + a_{11}a_{33}b_{13}^2).$$

Idrodinamica. — *Il moto laminare vario in tubi cilindrici di sezione circolare.* Nota di GIOVANNI COCCHI, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Nel moto laminare permanente di un liquido in tubo cilindrico, la velocità è distribuita lungo i diametri di ogni sezione con legge parabolica, almeno a partire da una certa distanza dall'imbocco del tubo.

In moto vario, entrando in gioco anche le reazioni di inerzia, è facile intuire che la distribuzione della velocità sarà in generale diversa, e di conseguenza anche l'energia dissipata, ragguagliata all'unità di lunghezza di tubo e all'unità di tempo, avrà valore diverso da quello che avrebbe, a parità di velocità media, in moto permanente; e precisamente maggiore, perché si può dimostrare che alla distribuzione parabolica di velocità corrisponde la minima energia dissipata (ved. punto 7).

Mi propongo qui di studiare il moto laminare vario in tubi cilindrici di sezione circolare, supponendo che i fenomeni considerati siano tali che in essi non abbiano influenza sensibile la comprimibilità del liquido e la deformabilità del tubo: la velocità media, nello stesso istante, ha quindi lo stesso valore in tutte le sezioni.

Si trovano delle piccole, ma sensibili differenze rispetto ai risultati che si ottengono nell'ipotesi di distribuzione parabolica di velocità (ved. punto 6).

Ho svolto tale ricerca con l'intenzione di procedere successivamente ad uno studio (prevalentemente sperimentale) dei fenomeni molto più complessi, ma di maggiore interesse pratico, della resistenza di moto vario in tubi cilindrici in regime turbolento. Nel regime turbolento mediamente permanente, dalla distribuzione di velocità media locale, potremmo definire in ogni punto un coefficiente di viscosità fittizio o apparente, dipendente dalla distanza del

(8) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, vol. I, Cap. V, Bologna, 1940.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

punto dal centro della sezione e dalla velocità media. In moto vario si potrebbero verificare, rispetto al moto permanente, delle differenze nei valori della resistenza dipendenti: *a*) da ritardi nella variazione con la velocità media dei coefficienti di viscosità apparenti; e in particolare da ritardi nella variazione di spessore dello stato limite; *b*) da variazioni nella distribuzione di velocità per causa analoga a quella indicata per il regime laminare.

Poiché si trovano piccole le variazioni nella distribuzione di velocità in regime laminare, e d'altra parte in regime turbolento la distribuzione di velocità è molto più vicina a quella uniforme, si può ritenere che la causa *b*) in regime turbolento abbia effetto trascurabile.

2. Consideriamo un tubo di raggio R , in cui defluisca un liquido in moto laminare. La velocità locale u , parallela in ogni punto all'asse del tubo, sia funzione, oltre che del tempo t , solo della distanza r del punto dal centro della sezione. Il carico piezometrico, in un determinato istante, risulta costante in tutti i punti di una sezione. Indichiamo con i la pendenza motrice (funzione del tempo); con U la velocità media; con γ , μ , ν , il peso specifico, il coefficiente di viscosità dinamica e il coefficiente di viscosità cinematica del liquido.

Porremo in seguito $x = r/R$. Per $r = R$, ossia per $x = 1$, dovrà essere sempre $u = 0$ (condizione di aderenza).

Per l'equilibrio dinamico della massa liquida compresa in un determinato istante fra due sezioni poste a distanza unitaria e fra due cilindri circolari, coassiali col tubo, di raggi r e $r + dr$, possiamo scrivere

$$2\pi\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr + \gamma i \cdot 2\pi r dr = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 2\pi r dr,$$

da cui, semplificando:

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{\nu} i.$$

Supponiamo qui che la i sia una funzione assegnata del tempo, e il problema consista nel determinare la $u(r, t)$ in modo che soddisfi la (1), la condizione di aderenza, e che per $t = 0$ si riduca ad una assegnata funzione di r . Notiamo però che talvolta il problema si può presentare con la i funzione incognita, legata alla portata integrale attraverso una equazione di continuità.

Cominciamo col considerare alcuni casi particolari, corrispondenti a particolari determinazioni della funzione $i(t)$.

3. La pendenza motrice sia uguale a zero.

L'equazione (1) diventa

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$u = \varphi(r) e^{-\beta t}.$$

Sostituendo in (2) si ottiene:

$$\varphi''(r) + \frac{1}{r} \varphi'(r) + \frac{\beta}{v} \varphi(r) = 0.$$

Operando il cambiamento di variabile

$$r = \sqrt{\frac{v}{\beta}} \xi \quad ; \quad \varphi(r) = \psi(\xi);$$

risulta

$$(2') \quad \psi''(\xi) + \frac{1}{\xi} \psi'(\xi) + \psi(\xi) = 0,$$

equazione di Bessel di ordine zero. Poiché la ψ deve rimanere finita, assumiamo come soluzione la funzione di Bessel di prima specie $a J_0(\xi)$. Indichiamo con

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$$

le radici dell'equazione $J_0(\xi) = 0$. Per la condizione di aderenza, il valore di ξ corrispondente a $r = R$ deve essere uguale a una di queste radici, ad esempio, a λ_1 . Si ricava

$$\beta = v \frac{\lambda_1^2}{R^2} \quad ; \quad \xi = \lambda_1 \frac{r}{R} = \lambda_1 x;$$

quindi

$$\varphi(r) = a J_0\left(\lambda_1 \frac{r}{R}\right) = a J_0(\lambda_1 x);$$

$$u = a J_0(\lambda_1 x) \exp\left(-v \frac{\lambda_1^2}{R^2} t\right).$$

In questa soluzione la distribuzione di velocità lungo i diametri di ogni sezione per $t = 0$ è espressa da $a J_0(\lambda_1 x)$.

In generale la distribuzione di velocità per $t = 0$ sarà espressa da una funzione assegnata $f(x)$. Sviluppiamo questa funzione in serie di funzioni di Bessel:

$$(3) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_0(\lambda_i x).$$

Poiché per la linearità e omogeneità della (2') una somma di soluzioni è ancora una soluzione, la soluzione generale del caso qui considerato sarà:

$$(4) \quad u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_0(\lambda_i x) \exp\left(-v \frac{\lambda_i^2}{R^2} t\right).$$

Per sviluppare la $f(x)$ nella serie (3) nel campo $0 \leq x \leq 1$, ossia per determinare i coefficienti a_i , basta ricordare ⁽¹⁾ che la successione

$$\sqrt{x} J_0(\lambda_1 x), \sqrt{x} J_0(\lambda_2 x), \dots, \sqrt{x} J_0(\lambda_i x), \dots$$

(1) WATSON, *A treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge, 1944; cap. XVIII.

costituisce una successione di funzioni ortogonali, e che precisamente si ha (integrali di Lommel):

$$\int_0^1 \sqrt{x} J_0(\lambda_i x) \sqrt{x} J_0(\lambda_j x) dx = 0, \quad (\text{per } i \neq j)$$

$$\int_0^1 [\sqrt{x} J_0(\lambda_i x)]^2 dx = \frac{1}{2} [J_0'(\lambda_i)]^2 = \frac{1}{2} [J_1(\lambda_i)]^2.$$

Per determinare il coefficiente a_i moltiplichiamo i due membri della (3) per $x J_0(\lambda_i x)$ e integriamo fra 0 ed 1. Al secondo membro, soltanto l'integrale relativo al termine i -esimo sarà diverso da zero e uguale a $\frac{1}{2} [J_1(\lambda_i)]^2$. Ricaviamo pertanto

$$(5) \quad a_i = \frac{2 \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_i x) dx}{[J_1(\lambda_i)]^2}.$$

In particolare riesce agevole il calcolo degli integrali definiti a numeratore quando la $f(x)$ è razionale intera, perché si calcolano facilmente gli integrali del tipo $\int_0^1 x^m J(z) dz$.

Risolviamo come esempio il caso seguente. A partire da una situazione di regime permanente con velocità media U_0 , in cui la distribuzione di velocità è parabolica

$$u = 2 U_0 (1 - x^2),$$

in un istante che assumiamo come iniziale si annulla bruscamente la pendenza motrice (ossia si annulla la differenza di carico piezometrico agli estremi del tubo). La funzione da sviluppare in serie di funzioni di Bessel è

$$f(x) = 2 U_0 (1 - x^2).$$

I coefficienti della serie risultano per la (5):

$$(6) \quad a_i = 2 U_0 \frac{2 \int_0^1 x (1 - x^2) J_0(\lambda_i x) dx}{[J_1(\lambda_i)]^2} = 2 U_0 \frac{2 \int_0^1 x J_0(\lambda_i x) dx - 2 \int_0^1 x^3 J_0(\lambda_i x) dx}{[J_1(\lambda_i)]^2}.$$

Poiché si ha

$$\int_0^1 z J_0(z) dz = z J_1(z);$$

$$\int_0^1 z^3 J_0(z) dz = z^3 J_1(z) - 2 z^2 J_2(z);$$

risulta

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_0(\lambda_i x) dx &= \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^{\lambda_i} \lambda_i x J_0(\lambda_i x) d(\lambda_i x) = \frac{1}{\lambda_i^2} [\lambda_i x J_1(\lambda_i x)]_0^{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i} J_1(\lambda_i); \\ \int_0^1 x^3 J_0(\lambda_i x) dx &= \frac{1}{\lambda_i^4} \int_0^{\lambda_i} \lambda_i^3 x^3 J_0(\lambda_i x) d(\lambda_i x) = \\ &= \frac{1}{\lambda_i^4} [\lambda_i^3 x^3 J_1(\lambda_i x) - 2 \lambda_i^2 x^2 J_2(\lambda_i x)]_0^{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i} J_1(\lambda_i) - \frac{2}{\lambda_i^2} J_2(\lambda_i). \end{aligned}$$

Sostituendo in (6) si ottiene

$$(7) \quad a_i = 2 U_0 \frac{4 J_2(\lambda_i)}{\lambda_i^2 [J_1(\lambda_i)]^2}.$$

Diamo qui i valori di y_i e i valori di $\frac{a_i}{2 U_0}$ calcolati con la (7), fino a $i = 6$:

i	1	2	3	4	5	6
λ_i	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711
$\frac{a_i}{2 U_0}$	1,1085	-0,1398	0,0455	-0,0210	0,0116	-0,0072.

La differenza fra i successivi valori di λ_i è maggiore di 3, e tende, come è noto, a π . Poiché nello sviluppo (4) i coefficienti di attenuazione degli esponenziali sono proporzionali a λ_i^2 , ne consegue che l'attenuazione dei termini dello sviluppo è tanto più rapida quanto più è elevato il loro ordine: mentre la velocità media diminuisce col tempo, la distribuzione della velocità tende rapidamente ad essere proporzionale alla prima arcata della funzione di Bessel J_0 .

La soluzione qui trovata del caso $i = 0$ con assegnata distribuzione iniziale di velocità, per la linearità della (1), può servire per introdurre le condizioni iniziali nel caso più generale. Se per una qualsiasi funzione $i(t)$ si ha una soluzione particolare della equazione (1) a cui corrisponde per $t = 0$ una distribuzione di velocità u_0 , mentre sia u_i l'assegnata distribuzione iniziale di velocità, basta sovrapporre la soluzione del caso $i = 0$ con distribuzione iniziale $u_i - u_0$.

4. La pendenza motrice sia costante, uguale a i_0 .

Una soluzione particolare della equazione (1) corrisponde al moto permanente, con velocità media

$$U_0 = \frac{\rho i_0}{8 \eta} R^2,$$

e distribuzione di velocità

$$(8) \quad u = 2 U_0 (1 - x^2).$$

Con l'osservazione fatta alla fine del punto precedente, si ha subito la soluzione generale.

Esempio: a partire da uno stato di quiete, in un istante che assumiamo come iniziale si applica bruscamente la pendenza motrice costante i_0 . In questo caso $u_1 = 0$, mentre u_0 è dato dalla (8). Alla soluzione (8) dobbiamo perciò sommare quella corrispondente a $i = 0$ e distribuzione iniziale di velocità

$$u_1 - u_0 = -2 U_0 (1 - x^2).$$

Siamo così ricondotti all'esempio considerato nel punto precedente.

5. Se la pendenza motrice è una funzione razionale intera del tempo

$$i = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n,$$

introducendo la variabile $x = r/R$, un integrale particolare della (1) è

$$u = f_0(x) + f_1(x)t + f_2(x)t^2 + \dots + f_n(x)t^n,$$

in cui la $f_i(x)$ è un polinomio razionale intero in x di grado $2(n - i + 1)$ con i soli termini di grado pari. Per trovare i coefficienti di questi polinomi, espressi i termini costanti in modo da soddisfare alla condizione di aderenza $f_i(1) = 0$, basta fare la sostituzione in (1) e uguagliare i moltiplicatori delle stesse potenze di x e di t nei due membri.

Ad esempio, se la pendenza motrice è funzione lineare del tempo

$$i = b_0 + b_1 t,$$

si trova come integrale particolare di (1):

$$u = \frac{gR^4}{64\nu} b_1 (-x^4 + 4x^2 - 3) + \frac{gR^2}{4\nu} (1 - x^2) (b_0 + b_1 t).$$

Se la pendenza motrice è funzione esponenziale del tempo, o, in generale, è esprimibile come somma o serie di esponenziali

$$i = \sum_i c_i e^{-\beta_i t},$$

integrale particolare della (1) soddisfacente alla condizione di aderenza si trova essere

$$u = \sum_i \frac{g c_i}{\beta_i} \left[\frac{J_0 \left(R \sqrt{\frac{\beta_i}{\nu}} x \right)}{J_0 \left(R \sqrt{\frac{\beta_i}{\nu}} \right)} - 1 \right] e^{-\beta_i t}.$$

Dall'integrale particolare si passa a quello generale con l'osservazione fatta alla fine del punto 3.

6. Per valutare le differenze fra i risultati che si ottengono con i procedimenti sopra esposti e quelli che si ottengono supponendo che la distribuzione di velocità rimanga parabolica anche in moto vario, consideriamo il caso seguente: a partire da una situazione di moto permanente, in un istante che

assumiamo come iniziale, la pendenza motrice cambia bruscamente segno. È il caso studiato nel punto 4, con distribuzione iniziale di velocità

$$u_x = -2 U_0 (1 - x^2).$$

Alla soluzione (8) dobbiamo perciò sommare quella corrispondente al caso $i = 0$ e distribuzione iniziale di velocità

$$4 U_0 (1 - x^2),$$

caso studiato nel punto 3.

Si trova

$$\begin{aligned} u = & 2 U_0 (1 - x^2) - 4 U_0 \left[1,109 J_0(2,405 x) \exp\left(-5,78 \frac{\nu}{R^2} t\right) - \right. \\ & - 0,140 J_0(5,520 x) \exp\left(-30,47 \frac{\nu}{R^2} t\right) + 0,046 J_0(8,654 x) \exp\left(-74,89 \frac{\nu}{R^2} t\right) - \\ & \left. - 0,021 J_0(11,792 x) \exp\left(-139,04 \frac{\nu}{R^2} t\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

La velocità media

$$U = \frac{1}{\pi} \int_0^1 2 \pi x u dx = 2 \int_0^1 x u dx$$

si calcola facilmente ricordando (punto 3) che

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_i x) dx = \frac{1}{\lambda_i} J_1(\lambda_i).$$

Prendiamo come unità di tempo R^2/ν e indichiamo con ϑ (tempo ridotto) il tempo misurato in questa unità ($\vartheta = \frac{\nu}{R^2} t$). Risulta

$$\begin{aligned} (9) \quad U = & U_0 [1 - 1,916 e^{-5,78 \vartheta} - 0,069 e^{-30,47 \vartheta} - \\ & - 0,010 e^{-74,89 \vartheta} - 0,003 e^{-139,04 \vartheta} - \dots]. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che la distribuzione di velocità rimanga sempre parabolica, dovremmo invece integrare l'equazione

$$i_0 = \frac{8\nu}{gR^2} U_0 = \frac{8\nu}{gR^2} U + \frac{4}{3} \frac{1}{g} \frac{dU}{dT},$$

con la condizione $U = -U_c$ per $t = 0$. Si trova

$$(10) \quad U = U_0 (1 - 2 e^{-\frac{\nu}{R^2} t}) = U_0 (1 - 2 e^{-6 \vartheta}).$$

Nella seguente tabella sono riportati, per vari valori del tempo ridotto ϑ , i valori di U/U_0 calcolati con la (9) (colonna a) e con la (10) (colonna b). Sulle differenze influisce non solo la diversa energia dissipata (a parità di velocità media, minore nella distribuzione parabolica), ma anche la diversa

energia cinetica (in questo caso, a parità di velocità media, maggiore nella distribuzione parabolica). Le due cause agiscono in senso opposto: ciò contribuisce a rendere piccole le differenze. Anzi in un primo tratto prevale la seconda, e la velocità varia più lentamente nell'ipotesi di distribuzione parabolica

$10^2 \Phi$	U/U_0		$a-b$
	a (form. 9)	b (form. 10)	
2	- 0,750	- 0,774	+ 0,024
4	- 0,540	- 0,574	+ 0,034
8	- 0,214	- 0,238	+ 0,024
16	+ 0,246	+ 0,234	+ 0,012
24	+ 0,520	+ 0,526	- 0,006
32	+ 0,698	+ 0,706	- 0,008
40	+ 0,810	+ 0,818	- 0,008

7. Dimostro, come è accennato nel punto 1, che la distribuzione di velocità che si verifica nel moto laminare permanente di un liquido in tubo cilindrico dà luogo, a parità di velocità media, alla minima energia dissipata.

Se il tubo è di sezione circolare, con velocità simmetricamente distribuita attorno al centro della sezione, la funzione di dissipazione (energia dissipata per unità di volume e di tempo) vale

$$\mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2.$$

Quindi l'energia dissipata per unità di tempo e di lunghezza di tubo vale

$$\int_0^R \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 2 \pi r dr.$$

Dobbiamo trovare la funzione $u(r)$, soddisfacente alla condizione di aderenza $u(R) = 0$, che rende minimo l'integrale

$$\int_0^R r u'^2 dr$$

a parità di velocità media, ossia con la condizione

$$(11) \quad \int_0^R r u dr = \frac{U_0}{2}.$$

Applicando la regola di Lagrange per la ricerca del minimo condizionato, indicato con λ un moltiplicatore costante da determinare in modo da soddisfare alla (11), cercheremo un estremo dell'integrale

$$\int_0^R (ru'^2 + \lambda ru) dr$$

integrando la corrispondente equazione di Eulero:

$$\frac{\partial}{\partial u} (ru'^2 + \lambda ru) - \frac{d}{dr} \left[\frac{\partial}{\partial u'} (ru'^2 + \lambda ru) \right] = 0,$$

ossia

$$(12) \quad ru'' + u' = \frac{\lambda}{2} r.$$

La (12), posto $\lambda = -\frac{16}{R^2} U_0$, si può scrivere

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{8}{R^2} U_0,$$

e coincide con l'equazione del moto laminare uniforme, a cui corrisponde, in questo caso, la distribuzione parabolica di velocità.

La dimostrazione si può estendere al caso di sezione di forma qualsiasi. Posti nel piano della sezione due assi ortogonali y, z , la funzione di dissipazione è

$$\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right],$$

e quindi l'energia dissipata per unità di tempo e di lunghezza di tubo vale, indicando con S l'area della sezione:

$$(13) \quad \int_S \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dS.$$

La funzione $u(y, z)$ che rende minimo l'integrale (13) con la condizione di portata Q costante

$$\int_S u dS = Q,$$

si determina cercando un estremo dell'integrale

$$\int_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \lambda u \right] dS$$

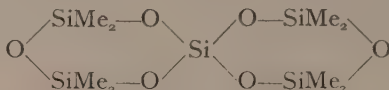
la cui equazione di Eulero si riduce a

$$(14) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\lambda}{2}.$$

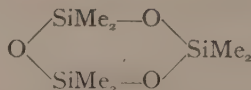
Posto $\frac{\lambda}{2} = -\frac{g}{\nu} i$, la (14) coincide con l'equazione del moto laminare uniforme.

Chimica fisica. - *Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano* (*). Nota I di GIORGIO PEYRONEL, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

Fra i derivati organici del silicio hanno una particolare importanza, per le loro svariate applicazioni pratiche, gli alchil- e aril-silossani, o siliconi. Come composti organici in cui le catene di atomi di carbonio sono sostituite da catene —Si—O—Si—O—Si— , simili a quelle di molti silicati, e per il comportamento anomalo, rispetto a quello dei corrispondenti idrocarburi, di alcune loro proprietà fisiche, quali i loro bassi punti di ebollizione e i loro bassi coefficienti di viscosità, ha notevole interesse la accurata determinazione delle loro strutture molecolari, delle loro distanze interatomiche e dei loro angoli di valenza. Le misure di momenti dipolari finora eseguite sono, da questo punto di vista e per molecole come queste di una certa complessità, inadeguate. Pochissime sono le determinazioni effettuate con raggi X o con raggi elettronici, e queste ultime inadatte per misure di grande precisione. Sono stati finora studiati: con raggi d'elettroni l'esametil-disilossano da Yamasaki e Collaboratori (1) e l'esametilciclotrisilossano da Aggarwal e Bauer (2); con raggi X l'esadecametilciclooctosilossano, in via preliminare, da Frevel e Hunter (3), l'octometilspiro [5,5] pentasilossano da Roth e Harker (4) e l'octometilciclotetrasilossano da Steinfink (5). Di questi silossani ciclici hanno planare l'anello silossanico solo l'octometilspiro [5,5] pentasilossano



e l'esametilciclotrisilossano



(*) Lavoro eseguito presso il POLYTECHNIC INSTITUTE OF BROOKLYN, N. Y., nel primo semestre 1953, usufruendo di una borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche e di una borsa di viaggio Fulbright. L'Autore sentitamente ringrazia il prof. P. P. EWALD per la cordiale ospitalità ricevuta presso il Physics Department del P.I.B., il prof. I. FANKUCHEN e il dott. B. POST per la collaborazione avuta nel corso del lavoro presso la Division of Applied Physics, il prof. D. HARKER e il dott. V. LUZZATI del Protein Structure Project per i loro consigli.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) YAMASAKI, KOTERA, YOKOI, UEDA, « J. Chem. Phys. », 18, 1414 (1950).

(2) E. H. (WELLER) AGGARWAL, S. H. BAUER, « J. Chem. Phys. », 18, 42 (1950).

(3) L. K. FREVEL, M. J. HUNTER, « J. Am. Chem. Soc. », 67, 2275 (1945).

(4) W. L. ROTH, D. HARKER, « Acta Cryst. », 1, 34 (1948).

(5) H. STEINFINK, in preparazione.

La determinazione della struttura cristallina del primo di questi due composti è stata fatta da Roth e Harker con sintesi Fourier tridimensionali. Le misure fatte da Aggarwal e Bauer, con raggi elettronici sul vapore del secondo composto, non possono essere rigorosamente confrontabili con quelle di Roth e Harker. Lo studio dell'esametilciclotrisilossano è stato perciò ripreso in questo lavoro con la determinazione, per mezzo di sintesi Fourier tridimensionali, della struttura cristallina del composto.

PARTE SPERIMENTALE.

Il trisilossano, purificato per sublimazione, p. f. 65° , fu cortesemente fornito dal Research Laboratory della General Electric Co. di Schenectady, N. Y. La sublimazione procede così rapidamente a temperatura ambiente che è impossibile di conservare un piccolo cristallo esposto all'aria più di qualche minuto. I cristalli furono perciò sigillati in sottili capillari di vetro trasparente ai raggi X.

In una prima serie di esperimenti cristalli singoli furono preparati per cristallizzazione della sostanza fusa in capillari di circa 0,3 mm. di diametro in modo da poterli studiare anche a basse temperature, allo scopo di stabilire se esistessero dei punti di transizione. Con fotogrammi a precessione, presi a temperatura ordinaria, si stabilì che i cristalli hanno simmetria esagonale. Dalla densità sperimentale 1,12 data da Hunter e Collaboratori ⁽⁶⁾ e dalle dimensioni della cella esagonale ($a = 4,53$, $c = 19,23 \text{ \AA}$) consegue che la cella elementare contiene una sola molecola. La lunghezza dell'asse c corrisponde invece esattamente ad uno spessore di tre strati di molecole i cui piani siano paralleli al piano (xyo). Fotogrammi a cristallo stazionario, presi con radiazione Cu filtrata, in direzione dell'asse c^* e dell'asse a^* , mostrarono una intensa diffrazione diffusa in forma di bande parallele all'asse c^* (figg. 1 e 2).

L'anormale contenuto molecolare della cella elementare come anche la diffrazione diffusa dimostrano l'esistenza di un forte disordine nel cristallo. Tutti i tentativi per diminuire questo disordine abbassando l'agitazione termica, a -60° , a -150° e a -180° , alla temperatura di ebollizione dell'ossigeno liquido, non ebbero successo. Non fu possibile osservare alcun cambiamento, sia nella diffrazione diffusa sia nella diffrazione consueta, eccetto che una normale contrazione della cella e un leggero aumento delle intensità dei riflessi di ordine superiore. Nelle regioni delle bande diffuse non apparvero nuovi riflessi che avrebbero indicato l'esistenza di un punto di transizione. Il disordine dei cristalli ottenuti dalla fusione deve perciò dipendere dalla disposizione delle molecole piuttosto che dalla loro agitazione termica.

(6) M. J. HUNTER, J. F. HYDE, E. L. WARRICK, H. J. FLETCHER, *J. Am. Chem. Soc.*, **68**, 667 (1946).

Per ottenere cristalli meno disordinati il trisilossano fu allora sublimato molto lentamente a temperatura ambiente. Si ottennero cristalli molto trasparenti, perfettamente formati, con abito trigonale e un diametro di 0,5-0,8 mm. Tutti i tentativi di preparare dei cristalli per sublimazione a temperature inferiori alla temperatura ambiente diedero, a pressione normale o ridotta, solo una polvere molto fine, inadatta per ricerche con cristallo singolo. I cristalli sublimati a temperatura ambiente hanno simmetria trigonale. Le costanti reticolari della loro cella esagonale sono identiche a

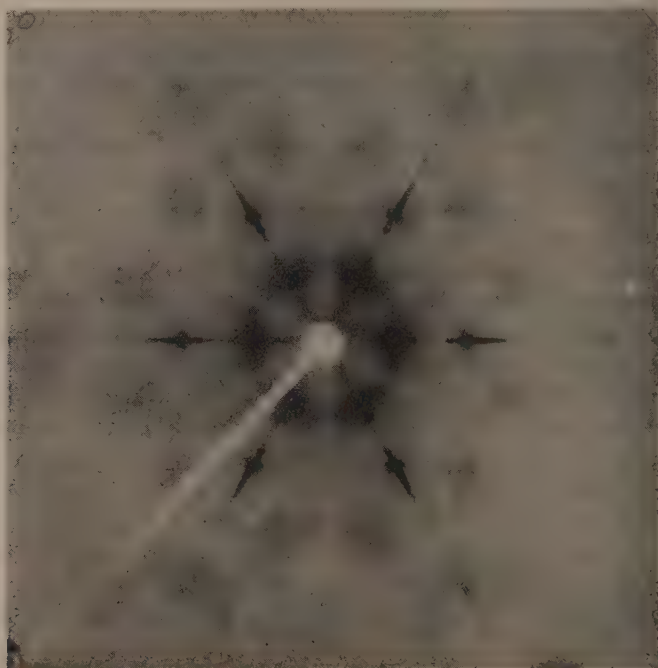


Fig. 1. - Diffrazione diffusa prodotta da radiazione Cu filtrata su cristallo stazionario in direzione $[001]$.

quelle della forma ottenuta dalla fusione. I valori $a = 4,53$ e $c = 19,23 \text{ \AA}$ furono determinati secondo il metodo di Straumanis con fotogrammi asimmetrici sulla polvere della sostanza.

Fotogrammi a precessione, a cristallo rotante e oscillante, con radiazione MoK_α e CuK_α permisero la completa registrazione tridimensionale di tutti i riflessi fino alla distanza reticolare di circa $0,8 \text{ \AA}$. Tutti i riflessi osservati soddisfano la condizione romboedrica: $-h + k + l = 3n$. La cella romboedrica contiene $1/3$ di molecola e la corrispondente cella esagonale una molecola. Un confronto delle intensità dei riflessi delle due forme rivelò che la forma ottenuta dalla fusione può essere considerata come il risultato di una microgeminazione, a 60° intorno all'asse c , della forma sublimata. En-

trambe le forme mostrano la stessa diffrazione diffusa. Perciò, a parte la microgeminazione, le due forme hanno lo stesso tipo di disordine. La discussione sarà ora limitata alla sola forma sublimata.

Dei due gruppi spaziali romboedrici $R\bar{3} - C_3^4$ e $R3m - C_{3v}^5$ che permettono un possibile impacchettamento delle molecole nella cella il gruppo $R3m$ fu scelto in base alle intensità dei riflessi osservati. La struttura è perciò non-centrosimmetrica. L'anormale contenuto molecolare della cella e il disordine del cristallo possono essere spiegati ammettendo che i tre punti

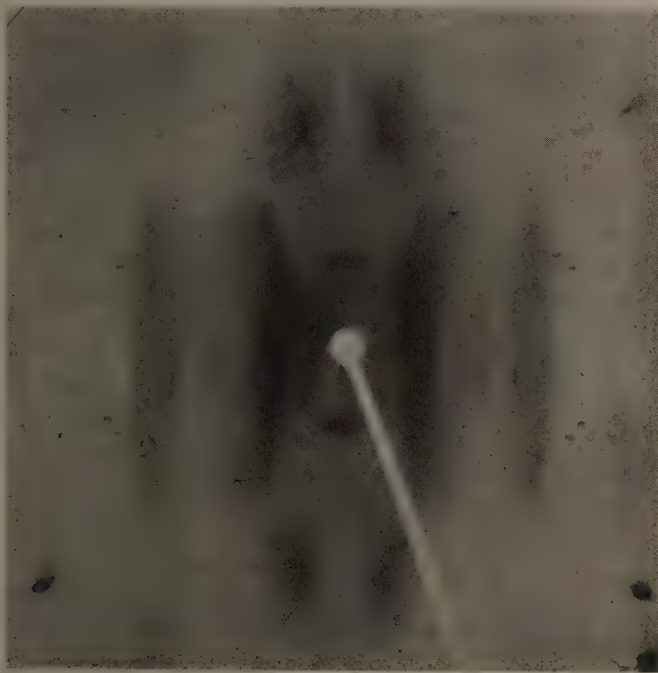


Fig. 2. - Diffrazione diffusa prodotta da radiazione Cu filtrata su cristallo stazionario in direzione $[100]$

del reticolo: 000 , $1/3\ 2/3\ 2/3$, $2/3\ 1/3\ 1/3$, della cella esagonale siano occupati statisticamente da una molecola, dando così un contenuto molecolare medio di $1/3$ di molecola per ognuno dei tre punti del reticolo e una molecola per l'intera cella. Gli elementi di simmetria della molecola del trisilossano e del gruppo spaziale $R3m$ richiedono che le molecole siano orientate nella cella in modo che le posizioni di tutti i loro atomi giacciono nei tre piani di simmetria. Per la molecola in posizione (000) il silicio e l'ossigeno devono essere in posizione $(x\bar{x}0)$, il carbonio in posizione $(x\bar{x}z)$ simmetricamente sopra e sotto il piano della molecola.

Nell'altezza c della cella unitaria esagonale sono contenuti tre strati paralleli di molecole. Ciò è richiesto sia dalla lunghezza c , sia dalla simmetria

romboedrica. In ogni strato reale le molecole contigue, in esso complanari, occupano le posizioni (000) di una cella esagonale bidimensionale avente il lato $A = a\sqrt{3} = 7,85 \text{ \AA}$ (fig. 3A). Non fu possibile avere, da nessuno dei fotogrammi ottenuti a temperatura ambiente o a bassa temperatura, una evidenza sperimentale che tale cella possa essere assunta anche come tridimensionale e servire a interpretare, senza disordine, la struttura del cristallo.

Gli strati sovrapposti lungo l'asse c sono identici ma risultano spostati statisticamente, l'uno rispetto all'altro, di $a\sqrt{3}/3$ lungo una delle tre dire-

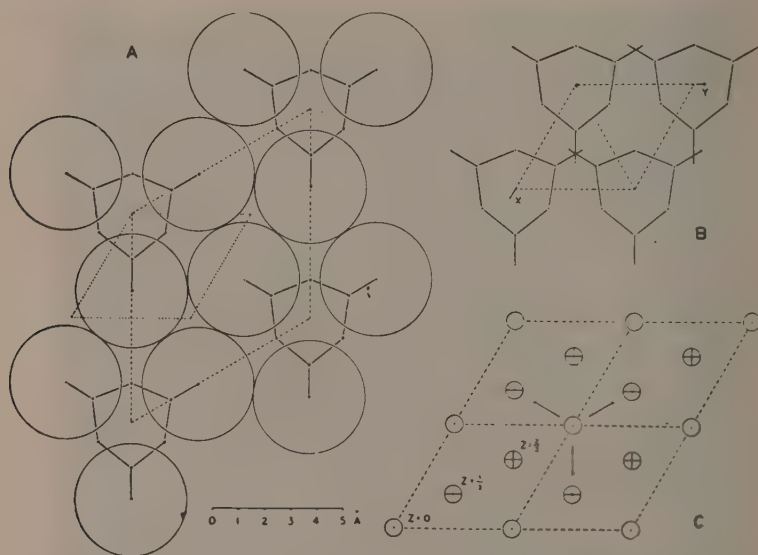


Fig. 3. - Struttura dell'esametilciclotrisilossano.

- (A) Strato reale di molecole con anelli (Si—O) a livello $z=0$ e gruppi metilici a livello $z=\pm 0.083$. Le linee punteggiate definiscono la cella esagonale bidimensionale con $A = a\sqrt{3}$, e la cella statistica osservata con $a = 4,53 \text{ \AA}$.
- (B) Rappresentazione di questa con tutte le posizioni 000 statisticamente occupate.
- (C) Proiezione lungo [001] di tutte le possibili posizioni della cella statisticamente occupate. Le tre frecce indicano i tre possibili spostamenti di uno strato reale di molecole a $z=1/3$ quando venga sovrapposto a uno strato a livello $z=0$.

zioni diagonali della sezione esagonale della cella piccola di lato $a = 4,53 \text{ \AA}$ (fig. 3 C). Per effetto di questo spostamento statistico le posizioni (000) della cella piccola vengono ad essere occupate in media $n/3$ volte nell'insieme di piani reticolari contenenti n celle. Ciò equivale a dire che la cella media osservabile sperimentalmente (fig. 3 B) ha occupate tutte le posizioni (000) da una molecola i cui atomi hanno densità elettronica pari a $1/3$ di quella reale. In questo senso viene usata, per brevità, l'espressione « $1/3$ di molecola » in questo lavoro. Lo stesso avviene per le posizioni di punti equivalenti del reticolo $2/3 \ 1/3 \ 1/3$ dello strato a livello $z=1/3$ e $1/3 \ 2/3 \ 2/3$ per lo strato a livello $z=2/3$. Ciascuno di questi strati ha i suoi centri molecolari nei punti equivalenti del reticolo romboedrico esistenti alla sua altezza,

ma i centri molecolari occupano, sistematicamente in ciascun strato reale, solo $1/3$ dei possibili punti del reticolo come indicato nella fig. 3 A. Nello strato «statistico» risultante dalla media di tutti gli strati omologhi del reticolo, tutte le posizioni possibili del reticolo romboedrico sono apparentemente occupate da $1/3$ di molecola nel senso più sopra specificato.

Le intensità furono misurate visualmente per confronto con una serie di macchie in scala logaritmica di esposizione (scala lineare di annerimento). Si usò, per la presa dei fotogrammi con radiazione del rame, la tecnica dei film sovrapposti, e con la radiazione del molibdeno diversi tempi di esposizione. Il fattore di assorbimento film-a-film (3,8) per la radiazione del rame venne determinato con contatore di Geiger. I valori delle intensità vennero corretti per il fattore di Lorentz e di polarizzazione. Lo scarto percentuale medio delle intensità è

$$\bar{S}p = \sum_n \left(\frac{|M-O|}{M} \right) / n = \pm 6,43 \%.$$

Esso fu valutato da 149 valori ottenuti per 42 riflessi da diversi film e tutti portati sulla stessa scala. Si utilizzarono naturalmente solo i riflessi per cui erano disponibili più di due misure. Intorno al valore 6,43 gli scarti percentuali hanno una distribuzione gaussiana.

In base alla struttura postulata e ad una proiezione Patterson (I) $P(z)$ si calcolarono le intensità dei riflessi (ool) assumendo il parametro $z = 0$ per silicio e ossigeno e provando diversi parametri z per il carbonio nell'intorno del valore indicato dalla Patterson. La distribuzione più rettilinea dei valori di $\log (F_o/F_c)$ in funzione di $(\sin \theta/\lambda)^2$ fu data da $z_c = 0,083$. Dalla inclinazione di questa retta si ricavò il fattore di temperatura $B_c = 10,39 \text{ \AA}^{-2}$ per la direzione dell'asse c e dalla sua intersezione con l'asse delle ordinate la scala assoluta delle intensità osservate. Si calcolarono allora le sezioni Patterson (II) $P(x\bar{x}0)$ e (III) $P(x00)$ ma non fu possibile ottenere da esse informazioni utili sulle distanze interatomiche a causa della presenza di forti massimi di diffrazione e della estesa sovrapposizione dei massimi. Anche altre due sezioni Patterson (IV) $P(x\bar{x}0)$ e (V) $P(x00)$ a maggior risoluzione (sharpened) e una sezione (VI) $P(x\bar{x}0)$ con eliminazione del massimo all'origine non diedero migliori risultati.

I parametri x per Si, O e C furono perciò definiti per tentativi finché si ottenne una buona linearità della curva ottenuta ponendo $\log (F_o/F_c)$ in funzione di $(\sin \theta/\lambda)^2$, usando solo i piani hko e i piani hkl a basso indice l aventi un piccolo angolo di inclinazione della loro normale rispetto al piano delle normali ai piani hko . Questi riflessi sono già debolmente affetti dal fattore di temperatura B_c ma la loro utilizzazione fu indispensabile dato che solo quattro riflessi hko sono osservabili in questa struttura. Il migliore valore del fattore di temperatura B_a , per i piani hko , che poté essere determinato da questa curva, dopo il susseguente affinamento Fourier dei parametri, è $B_a = 5,5 \text{ \AA}^{-2}$. Per le ragioni suesposte il valore di B_a è da considerare meno accurato di quello di B_c .

L'elevato « fattore termico » anisotropo trovato in questa struttura include probabilmente anche altri fattori indipendenti dall'agitazione termica.

Dai due fattori termici B_a e B_c si ricavò il fattore termico B , proprio di ciascun riflesso hkl , usando l'espressione:

$$(1) \quad B (\sin \theta / \lambda)^2 = \frac{(4/3) (h^2 + k^2 + h^2 k)}{a^2} \cdot \frac{B_a}{4} + \frac{l^2}{c^2} \cdot \frac{B_c}{4}.$$

Il valore di B varia, in funzione dell'inclinazione della normale dei piani hkl rispetto all'asse c secondo una curva che si avvicina ad una elissi avente come semiassi i valori B_a e B_c . I valori di B corrispondenti all'elisse diedero, anche nella fase finale dell'affinamento Fourier di questa struttura, un accordo tra fattori di struttura calcolati e osservati peggiore di quello ottenuto con i valori di B ricavati da (1).

I fattori di struttura calcolati per i riflessi con $d \cong 1,2$ e corretti per il fattore termico con l'espressione $e^{-B(\sin \theta / \lambda)^2}$ risultarono sufficientemente in buon accordo con i fattori di struttura osservati per poter considerare esatta la struttura proposta e per iniziare il successivo affinamento Fourier dei parametri.

Chimica-fisica. — *Cristallografia differenziale delle polveri.* — *Esami differenziali di primo ordine* (*). Nota II di RICCARDO FERRO, presentata (**) dal Socio L. ROLLA.

Nella precedente Nota (*) ho discusso l'opportunità di un metodo di confronto per lo studio coi raggi X delle sostanze cristalline. In questa Nota verrà trattata la possibilità di determinare le costanti cristallografiche di sostanze sconosciute. La discussione potrebbe facilmente essere generalizzata a qualunque tipo di goniometro a raggi X ma per brevità sarà considerato solo il caso più complicato, quello dei fotogrammi delle polveri (2). Il metodo differenziale può essere applicato al confronto tra un numero qualunque di film, qui ci limiteremo a considerare il caso di due film (esame di primo ordine).

a) DEFINIZIONI, SIMBOLI.

Siano dati due film di due sostanze isostrutturali, due film cioè simili l'un l'altro, su ognuno dei quali, cioè si possano trovare (per esem-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimica Generale, Laboratorio Chimica Fisica dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) R. FERRO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XV, fasc. 5, pp. 285-289 (1953).

(2) La generalizzazione potrebbe facilmente essere estesa anche ai goniometri ottici. È opportuno però considerare solo la cristallografia differenziale delle polveri, enunciandone le formule valide per vari casi particolari, in vista delle possibili applicazioni (anche di tipo analitico).

pio per mezzo delle intensità) linee analoghe a quelle dell'altro. Ponendo allora

$$(1) \quad q = \sin^2 \theta,$$

avremo, per il film 1, i valori:

$$(2) \quad q_1^1, q_2^1, q_3^1 \cdots q_i^1,$$

ai quali corrisponderanno, riga a riga, i valori:

$$(3) \quad q_1^2, q_2^2, q_3^2, \dots, q_i^2$$

per il film 2. Introduciamo ora le seguenti grandezze:

$$(4) \quad (\Delta q)_i = q_i^1 - q_i^2, \quad (5) \quad \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_i = \frac{q_i^1 - q_i^2}{q_i^1} = 1 - \frac{q_i^2}{q_i^1}.$$

Queste grandezze possono ottenersi sperimentalmente secondo la (4) e (5) dai valori ricavati dai film e possono essere calcolate d'altra parte a partire dalle costanti delle sostanze in questione.

È bene notare qui che molte delle relazioni che saranno nel seguito dimostrate per i $\Delta q/q$ sopra definiti, valgono anche per i rapporti: q_i^2/q_i^1 più convenienti per l'uso pratico del metodo in quanto per ottenerli basta una operazione invece di due, dato però che i $\Delta q/q$ permettono una più semplice generalizzazione, gli sviluppi matematici seguenti riguarderanno quest'ultimi.

Per il III membro della (5) è comunque facile il passaggio dagli uni agli altri.

Con il noto simbolismo scriviamo la formula quadratica generale:

$$(6) \quad q = h^2 A_1 + k^2 A_2 + l^2 A_3 + hk A_4 + hl A_5 + kl A_6$$

e differenziamo:

$$(7) \quad \Delta q = h^2 \Delta A_1 + k^2 \Delta A_2 + l^2 \Delta A_3 + hk \Delta A_4 + hl \Delta A_5 + kl \Delta A_6$$

in cui i ΔA_i rappresentano le variazioni delle costanti nel passare dall'una all'altra sostanza.

Avremo inoltre:

$$(8) \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{h^2 \Delta A_1 + k^2 \Delta A_2 + l^2 \Delta A_3 + hk \Delta A_4 + hl \Delta A_5 + kl \Delta A_6}{h^2 A_1 + k^2 A_2 + l^2 A_3 + hk A_4 + hl A_5 + kl A_6}.$$

Se ora A_i e A_j sono costanti caratteristiche della sostanza in esame relative a due assi non equivalenti cristallograficamente, noi ammettiamo per definizione che $\frac{\Delta A_i}{A_i} = \frac{\Delta A_j}{A_j}$; dalla (8) si ricava allora che, affinché il $\Delta q/q$ relativo ad una riga sia uguale a quello di un'altra, deve verificarsi la seguente relazione:

$$(9) \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{se} \quad \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_1 = \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_2.$$

La (9) è fondamentale, vale sempre ed ha, come conseguenza, che non ci saranno tanti $\Delta q/q$ quante sono le righe, ma solo quanti sono i tipi di indici che intervengono.

Per i vari sistemi valgono, inoltre, altre relazioni particolari più restrittive.

α) Sistema cubico.

$$(10) \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{(h^2 + k^2 + l^2) \Delta A_1}{(h^2 + k^2 + l^2) A_1} = \text{costante (valida per tutti i } q).$$

Questa relazione può essere utile per riconoscere subito sostanze cubiche (anche con celle molto grandi) o può essere usata per correggere i q di una sostanza per confronto con quelli di un'altra. In pratica si nota che i valori di $\Delta q/q$ oscillano un pò per i bassi angoli e si stabilizzano poi intorno al valore costante.

β) Sistemi Tetragonale ed Esagonale.

$$(11) \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{(h^2 + k^2) \Delta A_1 + l^2 \Delta A_3}{(h^2 + k^2) A_1 + l^2 A_3} \text{ e rispettiv. } \frac{(h^2 + hk + k^2) \Delta A_1 + l^2 \Delta A_3}{(h^2 + hk + k^2) A_1 + l^2 A_3}.$$

In particolare per gli indici hko e ool valgono le seguenti relazioni speciali:

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{hko} = \frac{\Delta A_1}{A_1} \quad ; \quad \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{ool} = \frac{\Delta A_3}{A_3}$$

Se ammettiamo che sia

$$(12) \quad \frac{\Delta A_1}{A_1} > \frac{\Delta A_3}{A_3}.$$

(tenendo eventualmente conto del segno negativo di qualche ΔA_i), otteniamo:

$$(13) \quad \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{hko} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{hkl} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{ool} \quad (\text{dal confronto di (11) con (12)}).$$

Questo significa che i $\Delta q/q$ sono distribuiti in un intervallo di valori gli estremi del quale indicano le righe Debye relative alle due costanti, che possono così essere ricavate.

Inoltre, nel caso considerato della (12), i $\Delta q/q_{hkl}$ sono disposti in ordine, da sinistra verso destra, in relazione ai valori decrecenti dei rapporti $(h^2 + k^2)/l^2$, o rispettivamente $(h^2 + hk + k^2)/l^2$, il che pure può essere utile.

γ) Sistema Ortorombico.

$$(14) \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{h^2 \Delta A_1 + k^2 \Delta A_2 + l^2 \Delta A_3}{h^2 A_1 + k^2 A_2 + l^2 A_3} \text{ e ammettendo: } \frac{\Delta A_1}{A_1} > \frac{\Delta A_2}{A_2} > \frac{\Delta A_3}{A_3}$$

possiamo ricavare la seguente tabella di disequaglianze:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{h\infty} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{hkl} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{ool} \\ \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{h\infty} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{hko} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{okl} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{ool} \\ \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{h\infty} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{hol} > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{ool} \end{array} \right.$$

Anche in questo caso, cioè, abbiamo una serie di valori di $\Delta q/q$ gli estremi della quale corrisponderanno a righe con indici $h00$ e $00l$, e potranno perciò permetterci di ottenere due costanti. Per le $h00$ sarà infatti sufficiente studiare i rapporti esistenti tra $q_{100}, q_{200}, q_{300}$, ecc. per ricavare q_{100} (cioè A_1) e questo può essere fatto per esempio per via grafica confrontando una striscia di carta su cui siano riportati i logaritmi dei q in questione con una su cui siano riportati i logaritmi di $1^2, 2^2, 3^2$, ecc. (Nel caso precedente dei sistemi tetragonale ed esagonale il confronto si sarebbe dovuto fare anche con i logaritmi dei numeri rispettivamente $(h^2 + k^2)$ e $(h^2 + hk + k^2)$).

Per mezzo delle A_1 e A_3 così ottenute si calcolano i valori dei q relativi alle $h0l$, in modo da poterle eliminare dal film. La terza costante può ora ricavarsi osservando che nella tabella (15) i $\Delta q/q$ immediatamente inferiori a $(\Delta q/q)_{h00}$ corrisponderanno in generale a indici con un valore molto alto del rapporto h^2/k^2 . Così, per esempio, se si è trovato che la più alta $h00$ che appare nel film è la 900, si proverà a considerare come 910 o 810 la riga Debye il cui $\Delta q/q$ è immediatamente inferiore a $(\Delta q/q)_{h00}$ (e che, per la (9) sarà l'unica ad avere questo valore), ed analogamente se la più alta $00l$ osservata è la 005, si proverà come 015 o 014 la riga con $\Delta q/q$ immediatamente superiore a $(\Delta q/q)_{00l}$. Pochi tentativi limiteranno le possibilità per la scelta di A_2 .

8) Sistema Monoclino.

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{h^2 \Delta A_1 + k^2 \Delta A_2 + l^2 \Delta A_3 + hl \Delta A_5}{h^2 A_1 + k^2 A_2 + l^2 A_3 + hl A_5}.$$

Possono verificarsi le seguenti possibilità:

$$(16) \quad \frac{\Delta A_1}{A_1} > \frac{\Delta A_2}{A_2} > \frac{\Delta A_3}{A_3} \quad \text{o} \quad (17) \quad \frac{\Delta A_1}{A_1} > \frac{\Delta A_3}{A_3} > \frac{\Delta A_2}{A_2}.$$

In ambedue i casi è determinata la posizione relativa dei $\Delta q/q$ corrispondenti alle $h00, 0k0, 00l, hko, 0hl$, che, al solito, formeranno una serie di valori avente come valori estremi $(\Delta q/q)_{h00}$ e $(\Delta q/q)_{00l}$ o rispettivamente $(\Delta q/q)_{h00}$ e $(\Delta q/q)_{0k0}$.

La posizione dei $(\Delta q/q)_{hkl}^+$ e $(\Delta q/q)_{h0l}^+$ dipende invece anche da $\Delta A_5/A_5$.

Affinché anche questi valori siano compresi nell'intervallo indicato precedentemente bisogna che ΔA_5 e A_5 siano piccoli in confronto ai valori relativi alle altre costanti. (Come caso limite $\Delta A_5 = A_5 = 0$, che ci riconduce al caso rombico). Se ciò avviene dai valori estremi dell'intervallo si potranno ricavare per esempio, A_1 e A_3 (caso (16)) con le quali si potranno calcolare i valori $h^2 A_1 + l^2 A_3$ che dovranno corrispondere, sul film, alla posizione centrale in relazione alla simmetrica disposizione delle $h0l^+$ e $h0l^-$ (in questo caso molto vicine tra di loro), e poi, secondo il solito, si proveranno i $\Delta q/q$ immediatamente vicini agli estremi come dovuti a hko o okl con bassi valori di k .

Nel caso (17) i valori estremi della serie di $\Delta q/q$ ci daranno naturalmente A_1 e A_2 che potranno essere riconosciute attraverso il calcolo delle hko .

Se al contrario, gli ΔA_5 e A_5 sono grandi (il che è il caso più generale), i limiti dell'intervallo di $\Delta q/q$ saranno in relazione ad una generica hol o hkl , il che si riconoscerà dalla impossibilità di procedere come indicato sopra, e saranno utili solo per avere un'idea del massimo rapporto assiale che può essere presente nella sostanza in istudio. Per una completa determinazione del fotogramma delle polveri è utile in questo caso un metodo grafico (che naturalmente può essere applicato anche nei casi precedenti).

Come si vede nella fig. 1, Δq (e in qualche caso anche meglio q^2) sono riportati in funzione dei q^2 . I punti corrispondenti ad uno stesso $\Delta q/q$ si

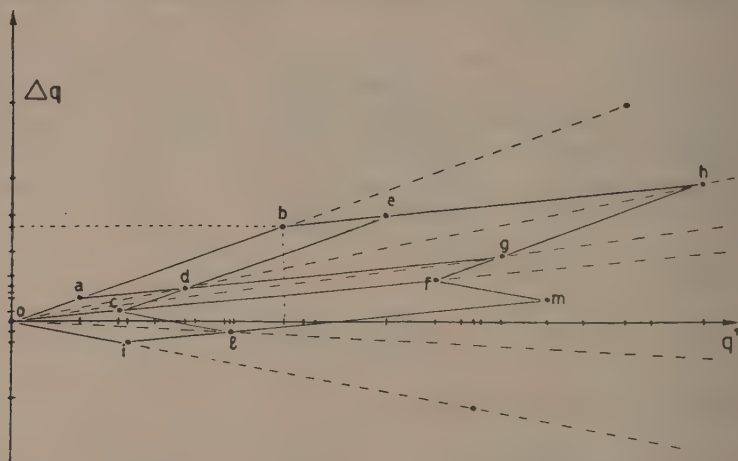


Fig. 1. - Δq sono riportati in funzione dei q^2 . Le linee tratteggiate congiungono punti con lo stesso $\Delta q/q$. In questo caso appaiono alcuni Δq negativi. (Nella figura è riportata solo una parte del diagramma completo, troppo complicato per essere riprodotto qui).

Prima di riportare i Δq sul grafico, conviene moltiplicare tutti i loro valori per uno stesso numero il più grande possibile (compatibilmente con la precisione di misura) in modo da ottenere punti ben separati sul grafico stesso.

troveranno su linee rette passanti per l'origine. I punti (i) situati su una linea retta non passante per l'origine ma parallela ad una retta (j) di questo tipo saranno in relazione coi punti di questa secondo l'espressione:

$$(18) \quad \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_j = \left(\frac{\Delta q}{q \pm G}\right)_i$$

in cui G è una funzione lineare costante delle varie costanti A_i . Se inoltre sulla retta j si trovano punti a distanze tra di loro uguali a quelle intercorrenti tra i punti della retta i , questi ultimi allora corrisponderanno a terne di indici con uno fisso ed almeno un'altro uguale a quelli dei corrispondenti punti i .

Le possibilità che appaiono nel caso particolare del sistema monoclinico (abbastanza restrittivo da questo punto di vista) sono elencate nella tabella seguente:

(Punti sulla linea j passante per l'origine).				Corrispondenti punti sulla retta i , parallela alla j).			
000	100	200	300 ...	0 <i>k</i> 0	1 <i>k</i> 0	2 <i>k</i> 0	3 <i>k</i> 0...
000	001	001	003	0 <i>k</i> 0	0 <i>k</i> 1	0 <i>k</i> 2	0 <i>k</i> 3
000	010	020	030	<i>h</i> 00	<i>h</i> 10	<i>h</i> 20	<i>h</i> 30
000	010	020	030	00 <i>l</i>	01 <i>l</i>	02 <i>l</i>	03 <i>l</i>
(19) 000	$h0\bar{l}^{\pm}$	$2h, 0, 2\bar{l}^{\pm}$	$3h, 0, 3\bar{l}^{\pm}$	0 <i>k</i> 0	$h\bar{k}l^{\pm}$	$2h, k, 2\bar{l}^{\pm}$	$3h, k, 3\bar{l}^{\pm}$
000	$hk0$	$2h, 2k, 0$	$3h, 3k, 0$	non esiste la corrispondente retta i .			
000	0 <i>kl</i>	$0, 2k, 2l$	$0, 3k, 3l$				
000	$h\bar{k}l^{\pm}$	$2h, 2k, 2\bar{l}^{\pm}$	$3h, 3k, 3\bar{l}^{\pm}$				

I primi quattro tipi di rette j ci permettono di ottenere le quattro costanti e possono distinguersi l'una dall'altra osservando quante rette parallele si possono tracciare rispetto ad esse (le $h00$ hanno come parallele solo rette che distano tra di loro secondo i valori $k^2 A_2$, mentre le $0k0$ hanno due tipi di parallele, le une secondo $h^2 A_1$ e le altre secondo $l^2 A_3$). Così nella fig. 1 si osservano le rette (b, e, h) e (a, d, g) parallele a (o, c, f) e situate a distanze che sono proporzionali alle distanze tra i punti $(o), (a), (b)$ sulla retta (o, b) . Si può perciò porre: $(a) = 100, (b) = 200, (c) = 010, (d) = 110, (e) = 210, (f) = 020, (g) = 120, (h) = 220$. La scelta degli indici è confermata dalla presenza della retta (i, l, m) pure parallela a (o, c, f) e distante da questa secondo un valore non deducibile dai precedenti, potrà perciò essere: $(i) = 001, (l) = 011, (m) = 021$, ecc.

e) Sistema Triclinico.

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{h^2 \Delta A_1 + k^2 \Delta A_2 + l^2 \Delta A_3 + hk \Delta A_4 + hl \Delta A_5 + kl \Delta A_6}{h^2 A_1 + k^2 A_2 + l^2 A_3 + hk A_4 + hl A_5 + kl A_6}.$$

In questo sistema si verificano possibilità analoghe, e più numerose, come nel monoclinico. Sarà bene distinguere alcuni casi:

I) $\Delta A_4, A_4, \Delta A_5, A_5, \Delta A_6, A_6$ tutti abbastanza piccoli. Ci si trova in condizioni simili alla più semplice possibilità del monoclinico. I valori estremi dell'intervallo di $\Delta q/q$ daranno due costanti.

Si può procedere come nel monoclinico.

II) $\Delta A_4, A_4, \Delta A_5, A_5, \Delta A_6, A_6$ tutti (o in parte) non troppo piccoli pur non essendo molto grandi. In questo caso può essere conveniente fare qualche tentativo di ricercare i $\Delta q/q$ corrispondenti alle $h00, 0k0, 00l$, osservando quante righe Debye sono associate allo stesso valore di $\Delta q/q$; in

fatti i valori più frequenti saranno quelli associati agli indici surriferiti, mentre i meno frequenti saranno relativi a righe Debye con indici hkl con, per esempio, un valore molto alto del rapporto h/k . Infatti se la cella è abbastanza grande potrà comparire sul film per esempio, la $10 \cdot 1 \cdot 0$ ma in generale mancherà la $20 \cdot 2 \cdot 0$, tutto ciò deriva dalla relazione (9) che conduce sempre a questo risultato con la sola eccezione del caso seguente (in cui se per esempio $A_5 \gg 0$, saranno di conseguenza presenti molte riflessioni $h0\bar{l}$).

III) $\Delta A_4, A_4, \Delta A_5, A_5, \Delta A_6, A_6$ di qualunque ordine di grandezza. Si potrà tentare la via grafica, ricordando che questa può condurre a risultati solo se almeno uno dei A_4, A_5, A_6 è abbastanza piccolo.

b) ACCURATEZZA DELLE MISURE.

In prove effettuate su sostanze a simmetria non molto bassa (e le cui A_i differivano di circa 10%), errori di $\pm 0,001$ sul $\sin^2 \theta$ hanno permesso di ottenere buoni risultati. Se le misure sono più grossolane si ottengono solo risultati parziali, nel senso che se noi abbiamo per esempio un tetragonale con $c/a = 1,5$ si può essere incerti se la sostanza abbia un valore più o meno lontano da 1,5, ma in ogni caso si sa di essere nelle vicinanze di detto valore. Anche notevoli estinzioni sistematiche non sembrano influire.

Nel caso, però, che l'interpretazione possa essere effettuata solo per via grafica (monoclino o triclinico con non tutti gli angoli troppo lontani da 90°) è necessaria una maggiore precisione o, meglio, valori più alti per i Δg . Sembra desiderabile che sia, almeno, $\Delta A_i \geq 20\% A_i$, ed è necessario fare attenzione a scegliere tra le molte righe esistenti sui fotogrammi solo quelle che sicuramente si corrispondono (per esempio le più forti).

In tutti i casi, poi, il metodo porterà tanto più facilmente a buoni risultati quanto più un $\Delta A_i/A_i$ sarà diverso dagli altri $\Delta A_j/A_j$.

In pratica, poi, date le sostanze isostrutturali X e Y è bene, d'altro lato, che il confronto, piuttosto che tra il film di X e quello di Y, sia fatto per esempio tra il film ottenuto su X ed uno di una miscela di X ed Y, eseguendo tutte le misure su quest'ultimo, in modo da compensare, per quanto è possibile, gli errori di misura.

c) CONCLUSIONE.

Il fatto fondamentale da notare a proposito del metodo descritto è che l'analisi differenziale, lavorando sulle variazioni delle costanti, porta, per definizione, alla determinazione, della simmetria effettiva delle sostanze in questione, anche in casi di degenerazione (per esempio ortorombico con $a/b = 1$). La determinazione delle costanti stesse si basa, in effetti, sul fatto che le variazioni relative delle distanze reticolari avvengono, come è noto, nelle varie direzioni in modo caratteristico per ogni croce assiale necessaria alla descrizione della sostanza in esame, e presentano per esempio un massimo in una direzione cristallografica ben determinata.

Chimica. — *Perfezionamento dell'apparecchiatura a sparpagliamento multiplo in polarografia oscillografica*^(*). Nota di PAOLO FAVERO e ENRICO VECCHI, presentata^(**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

L'impiego del polarografo oscillografico si è dimostrato particolarmente utile nello studio del decorso cinetico di reazioni rapide, per le quali il metodo polarometrico normale non può essere usato. A questo proposito i risultati di Snowden e Page⁽¹⁾ hanno messo in luce la versatilità di un tale strumento sia quando la sostanza riducibile è sotto forma ionica, sia quando si tratti di molecole neutre.

Attualmente uno di noi (P. F.) sta studiando il decorso cinetico della reazione tra acido piruvico e ammoniaca che deve essere seguito col metodo oscillografico data la sua elevata velocità già alla temperatura di 0°C⁽²⁾. L'apparecchiatura usata per queste ricerche è del tipo a sparpagliamento multiplo.

Questo tipo di apparecchiatura però, come risulta dalle ricerche di P. Delahay⁽³⁾, presenta un inconveniente notevole in quanto la riproducibilità del periodo di gocciolamento del capillare dipende dalle condizioni di lavoro: in particolare, se la frequenza di gocciolamento non è un sottomultiplo esatto della frequenza di sparpagliamento, il periodo di gocciolamento può venire influenzato entro limiti abbastanza larghi (ad esempio anche del 15%⁽³⁾).

Poiché il rilevamento degli oscillogrammi viene effettuato al tempo massimo di vita della goccia e cioè subito prima che essa si stacchi dal capillare, il valore di t che entra nell'equazione di Randles-Sevcik è proprio quello del periodo di gocciolamento. Conseguentemente la non riproducibilità del periodo di gocciolamento si traduce in un aumento di errore sull'altezza dei picchi di corrente. Benché nell'equazione di Randles-Sevcik il tempo t compaia con esponente $2/3$, l'errore può essere notevole e costituisce di per sé il massimo inconveniente del metodo. Lo stesso Delahay⁽³⁾ ha notato che, con un opportuno aggiustamento della tensione base, è possibile diminuire l'ampiezza della fluttuazione; tuttavia questo aggiustamento può essere fatto soltanto quando si abbia a disposizione il tempo necessario. Quando, come nel caso dello studio di una cinetica di reazione, occorra fare rapidi rilevamenti, ciò non è possibile: ad esempio, per lo studio cinetico

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova e Centro di Polarografia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) E. C. SNOWDEN e H. T. PAGE, «Anal. Chem.», **22**, 968 (1950).

(2) P. FAVERO, «Rend. Accad. Naz. Lincei» [VIII] **14**, 433 (1953) e [VIII] **14**, 520 (1953).

(3) P. DELAHAY e G. L. STIEHL, «J. Phys. e Colloid Chem.», **55**, 570 (1951).

cui è stato prima accennato, l'altezza del picco di corrente veniva rilevata ad ogni goccia ($\tau = 4 \div 8$ sec).

In queste condizioni è essenziale che sia verificata la condizione di sincronismo; purtroppo questa condizione non sempre permaneva durante la cinetica cosicché la distribuzione dei punti nel diagramma $\log f(h)/t$ risultava ora regolare ora irregolare (fig. 1, curva *a*). In quest'ultimo caso la determinazione della pendenza della retta era piuttosto arbitraria e poco attendibili erano anche i risultati ottenuti con il metodo di calcolo dei minimi quadrati. In generale, dato questo fattore di incertezza circa la riuscita dell'esperienza, il metodo a sparpagliamento multiplo non si è dimostrato molto

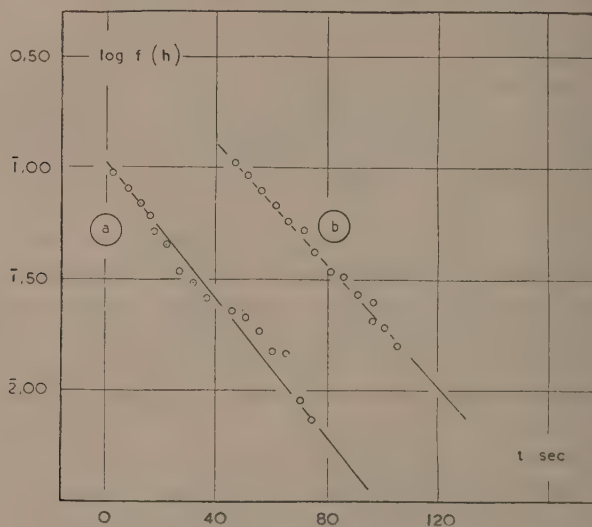


Fig. 1.

adatto per lo studio di cinetiche rapide. L'introduzione del perfezionamento, che è l'oggetto di questa Nota, ha permesso di utilizzare l'apparecchiatura a sparpagliamento multiplo con risultati soddisfacenti senz'altro confrontabili con quelli che si possono ottenere con un'apparecchiatura a sparpagliamento singolo⁽¹⁾ che però è, dal punto di vista costruttivo e di esercizio, notevolmente più complesso. Questo perfezionamento consiste essenzialmente nel rilevare i picchi di corrente non al tempo massimo di vita della goccia, ma ad un determinato tempo di vita leggermente inferiore. Ciò è basato sull'ipotesi che l'influenza esercitata sul periodo di gocciolamento dai due fattori, potenziale dell'elettrodo e frequenza, sia preponderante soltanto sulle ultime frazioni di vita della goccia. È da notare che ci si trova qui in condizioni diverse che nell'apparecchiatura a sparpagliamento singolo; infatti la tensione di alimentazione è costantemente applicata alla cella di elettrolisi mentre nel secondo caso all'elettrodo viene applicato un solo sparpagliamento di potenziale per ogni goccia).

Una tale ipotesi è giustificata dalle seguenti considerazioni. Nell'ultima parte della sua vita, la goccia viene a trovarsi in un equilibrio sempre più precario e un minimo disturbo può distaccarla dal capillare. In queste condizioni, data la dipendenza della tensione superficiale del mercurio dal potenziale della goccia, le periodiche sollecitazioni di potenziale costituite dai successivi sparpagliamenti rappresentano un forte agente di disturbo (il valore della tensione istantanea massima può essere anche maggiore di 2 V).

Se si ha sincronismo fra frequenza di sparpagliamento e frequenza di gocciolamento, nella vita della goccia è contenuto un numero intero di sparpagliamenti e gli impulsi di potenziale agiranno in maniera riproducibile poiché avverranno alle medesime frazioni di vita della goccia. In caso contrario quel numero non sarà intero e conseguentemente l'azione di disturbo risulterà non riproducibile.

L'errore totale probabile sul periodo di gocciolamento previsto con il precedente ragionamento, è dell'ordine di due periodi di sparpagliamento e dovrebbe quindi dipendere dalla frequenza. Usando una frequenza di 10 cps l'errore totale si aggirerebbe intorno a $2/10$ sec che su un periodo di gocciolamento di 5 sec costituisce un errore del 4 %. Un tale ordine di errore su τ_{Hg} si incontra infatti con frequenza nelle esperienze di oscillografia; tuttavia sono frequenti errori anche doppi o tripli di questi e ciò fa pensare che il meccanismo di disturbo possa essere in realtà più complesso di quello esposto.

L'ipotesi prima formulata è stata sperimentalmente verificata.

I risultati ottenuti si possono così riassumere: quando il periodo di gocciolamento è sensibilmente costante l'altezza dei picchi di corrente è affetta da un errore massimo che non supera il 2 %; quando il periodo di gocciolamento non è costante si constata che l'errore è sensibilmente minore di quello che si avrebbe senza l'uso dell'apparato proposto.

Una riprova decisiva dell'effetto tamponante ottenuto con questo mezzo si è avuta nel rilevamento delle cinetiche ⁽²⁾. Infatti l'aspetto della distribuzione dei punti nel diagramma $\log f(h)/t$ è corrispondente ad un'ottima riproducibilità del periodo di gocciolamento (caso *b* in fig. 1). Ciò si ottiene sia quando il periodo di gocciolamento è costante, sia quando non lo è. Per quest'ultimo caso si può riportare l'esempio seguente, scelto dal numeroso materiale a disposizione, secondo il quale si è ottenuta la retta $\log f(h)/t$ del tutto regolare benché il valore medio del periodo di gocciolamento fosse risultato di $8'',33 \pm 12$ %. Naturalmente esempi analoghi sono numerosi.

In più, dati i soddisfacenti risultati ottenuti, è possibile ora eseguire le misure oscillografiche senza che si debba verificare il sincronismo tra frequenza di sparpagliamento e frequenza di gocciolamento dell'elettrodo a goccia di mercurio.

In questa maniera l'apparecchio proposto è diventato una parte essenziale del polarografo oscillografico.

DESCRIZIONE DELL'APPARECCHIATURA. - Il dispositivo per rilevare gli oscillogrammi ad un definito tempo di vita della goccia consiste nell'uso di un relé elettronico a ritardo comandato dalla caduta della goccia dal capillare. Detto relé agisce, tramite un opportuno stadio amplificatore, sull'oscillogramma il quale è presente sullo schermo fluorescente dal momento in cui è nata la goccia fino alla prestabilita frazione di vita della goccia e quindi istantaneamente ne viene sottratto. In questa maniera la fotografia dell'oscillogramma viene fatta all'ultimo istante prima della sua scomparsa dallo schermo.

Il comando della presentazione dell'oscillogramma sullo schermo può essere fatto in due maniere: o si agisce opportunamente sull'illuminamento del tubo a raggi catodici, vedi ad esempio ⁽¹⁾, oppure si predispone una deviazione magnetica con opportuna bobina.

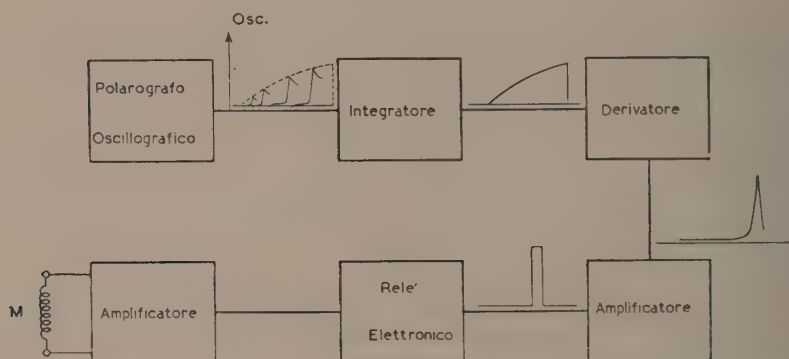


Fig. 2.

Questo secondo metodo è stato da noi usato per opportunità contingenti. È stato più sopra detto che lo staccarsi della goccia dal capillare provoca l'eccitazione del relé elettronico. Ciò è infatti possibile perché la cella è sempre percorsa da corrente (vedi sopra): nel momento in cui la goccia si stacca dal capillare, la corrente cade bruscamente dal valore massimo ad un valore praticamente zero e questo brusco passaggio può essere trasformato in impulso elettrico. Occorre a questo scopo ricavare l'inviluppo della corrente nel tempo e successivamente derivare questa funzione in modo da ottenere un «pip» in corrispondenza della calata a zero dell'inviluppo. Questo «pip» viene successivamente amplificato fino ad avere un opportuno impulso che comanda il relé elettronico. Lo schema di principio è riportato in fig. 2.

Lo schema elettronico è riportato in fig. 3. In esso il primo stadio e la rete $C_2 LC_3$ costituiscono il circuito integratore; C_4 e R_1 il circuito differenziatore. Il «pip» viene amplificato e trasformato in segnale quadro nei due stadi comprendenti i tubi T_2 e T_3 e va a comandare il relé a ritardo comprendente i tubi T_4 e T_5 .

Il tempo di ritardo è dato approssimativamente dal prodotto $C_7 R_{14}$ ed era, nel nostro caso, compreso tra 4 e 16 sec. Lo stadio di potenza T_6 è collegato direttamente all'anodo di T_5 e fornisce la corrente per la bobina della deviazione magnetica M . Il valore di R_{17} è stato scelto in modo da

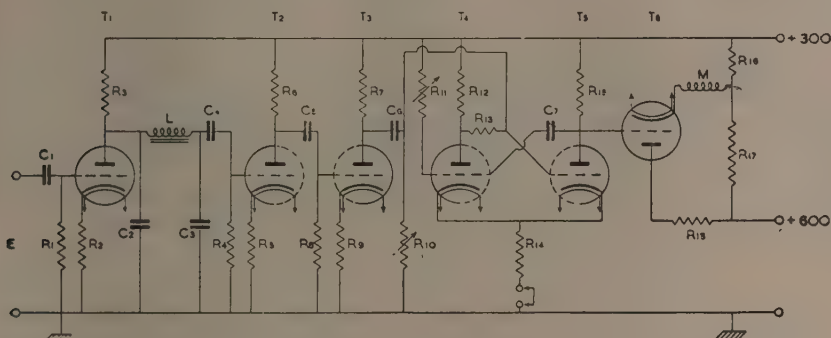


Fig. 3.

$R_1, R_4, R_8 = 0,5 \text{ M}\Omega$; $R_2 = 2 \text{ K}\Omega$; $R_3 = 80 \text{ K}\Omega$; $R_5, R = 1 \text{ K}\Omega$; $R_6, R_7 = 70 \text{ K}\Omega$;
 $R_{10}, R_{17} = 100 \text{ K}\Omega$; $R_{11} = 5 \div 20 \text{ M}\Omega$; $R_{12}, R_{14}, R_{15} = 10 \text{ K}\Omega$; $R_{13} = 200 \text{ K}\Omega$; $R_{16} =$
 $= 500 \Omega$; $R_{18} = 5 \text{ K}\Omega$; $C_1, C_6 = 0,1 \mu\text{F}$; $C_2 = 20 \mu\text{F}$; $C_3 = 40 \mu\text{F}$; $C_4, C_5 = 100 \text{ KpF}$;
 $C_7 = 1 \mu\text{F}$; $T_1 = 6 \text{ SQ } 7$; $T_2, T_3, T_4, T_5 = 1/2 6 \text{ SN } 7$; $T_6 = 6 \text{ F } 6$.

avere una sufficiente deviazione dell'oscillogramma sullo schermo del tubo a raggi catodici.

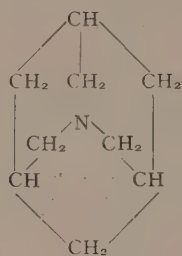
I valori riportati corrispondono ad una buona messa a punto dell'apparecchio usando una frequenza di sparpagliamento non inferiore a 10 cps.

La riproducibilità del relé a ritardo è migliore dell'1% con tempi di ritardo compresi tra 3 e 8 sec ed è risultata del tutto soddisfacente per i nostri scopi. Per chiarimenti sulla messa a punto del relé si rimanda a ⁽³⁾ e ⁽⁴⁾.

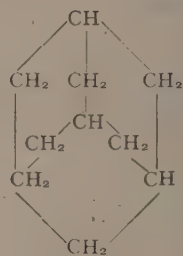
(4) W. C. ELMORE e M. SANDS, *Electronics Experimental Technique*, McGraw-Hill, New York, U.S.A.

Chimica organica. — *Sintesi dell'azaadamantano*^(*). Nota di RAFFAELLO FUSCO e GIUSEPPE BIANCHETTI, presentata^(**) dal Socio L. CAMBI.

L'interesse che da molti lati offre lo studio dei composti a struttura «adamantoide» ci ha indotti ad intraprendere la sintesi dell'omologo azotato dall'adamantano, l'1-azaadamantano (I), che differisce dall'idrocarburo scoperto da Landa e Machacek nella nafta della Moravia (II) per avere un atomo di azoto al posto di un gruppo $\equiv\text{CH}$

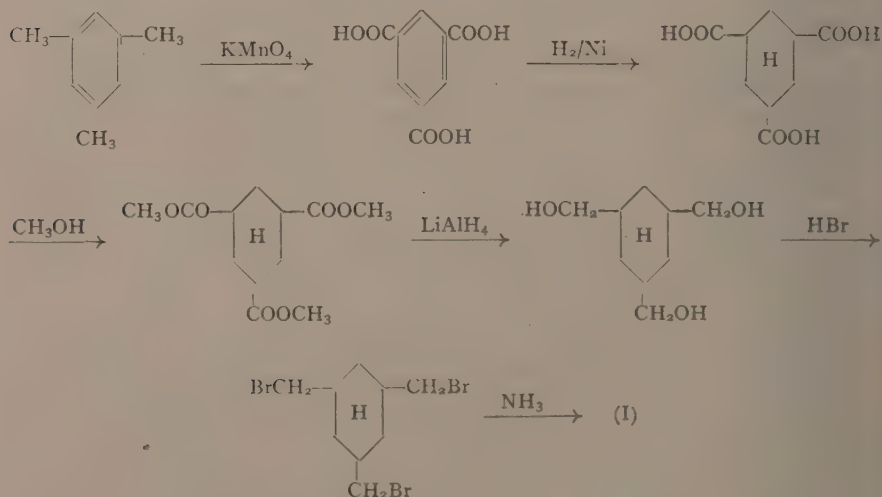


(I)



(II)

La sintesi dell'azaadamantano è stata da noi realizzata partendo dal mesitilene e seguendo lo schema:



(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

Tutte le reazioni, salvo l'ultima, decorrono con buoni rendimenti; l'ultimo passaggio ci ha finora fornito rese così basse che il prodotto ottenuto è stato appena sufficiente per l'analisi ed il riconoscimento di alcune sue costanti fisiche.

In attesa di poterne disporre di quantitativi sufficienti per uno studio chimico e fisico approfondito, possiamo per ora anticipare alcuni dati già acquisiti: la sostanza si presenta in cristalli incolori di odore amminico; è discretamente solubile in acqua e forma un picrato a punto di fusione 259-260°C; sublima già intorno ai 100°C e fonde solo se riscaldata in tubicino chiuso dalle due parti, a 258°C. È assai interessante osservare che lo stesso comportamento al calore è offerto dall'adamantano, anch'esso molto volatile e fusibile solo in tubo chiuso a 268°C.

Comunicheremo quanto prima notizie più dettagliate sull'argomento.

Chimica inorganica. — *Complessi isonitrilici del manganese monovalente*^(*). Nota preliminare di ADRIANO SACCO, presentata ^(**) dal Socio L. CAMBI.

Le analogie di costituzione nei composti carbonilici e nei cianocomplessi del manganese e del cobalto, rispettivamente $Mn_2(CO)_{10}$ e $Co_2(CO)_8$, $M_5Mn(CN)_6^{(1)}$, $M_4Mn(CN)_6$, $M_3Mn(CN)_6$ e $M_4Co(CN)_5$, $M_4Co(CN)_6$, $M_3Co(CN)_6^{(2)}$, ($M = Na, K$), e la stabilità dei complessi isonitrilici del $Co(I)^{(3)}$ lasciavano prevedere la possibilità che i complessi isonitrilici del $Mn(I)$ fossero sufficientemente stabili da poter essere isolati.

In effetti, da sali manganosi e isonitrili, mi è stato possibile di preparare sali complessi del manganese monovalente del tipo $[Mn(CNR)_6]X$ ($X = I, ClO_4$), facilmente cristallizzabili, di colore giallo chiaro, molto stabili sia all'aria che in soluzione, diamagnetici. Per trattamento con iodio gli ioduri di manganese-(I)-esaarilisonitrile danno luogo ai perioduri di manganese-(I)-esaarilisonitrile: $[Mn(CNR)_6] I_3$.

In questi ultimi la monovalenza è dimostrata dalla loro suscettività magnetica: il diamagnetismo da essi presentato è possibile solo se il manganese presenta uno stato di ossidazione formale +1; per lo ione $[Mn(CNR)_6]^+$ si può prevedere infatti una struttura ottaedrica utilizzando gli orbitali $3d^2 4s 4p^3$, analoga a quella di $[Fe(CN)_6]^{4-}$ e di $[Co(CN)_6]^{3-}$, che rende Mn^+ isostero a Fe^{++} e Co^{+++} nei predetti composti.

Le ricerche sui complessi isonitrilici del $Mn(I)$, tutt'ora in corso, saranno oggetto di una prossima pubblicazione.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) W. MANCHOT e H. GALL, «Ber.», 61, 1135 (1928).

(2) W. D. TREADWELL e D. HUBER, «Helv. Chim. Acta», 26, 1 (1943).

(3) L. MALATESTA e A. SACCO, «Z. anorg. u. allg. chem.», 273, 247 (1953).

Mineralogia. - *I minerali del gruppo dell'Ortler.* - IX. *Actinolite e antofillite di Vedretta Alta-Hochwart (Ultimo) e loro solubilità* ⁽¹⁾.
Nota di ROSSANA PIRANI, presentata ^(*) dal Corrisp. C. ANDREATTA.

Nella zona della cima della Vecia o Vedretta Alta-Hochwart, il professore Andreatta identificava, durante recenti lavori di rilevamento geologico del Gruppo dell'Ortler, alcune intercalazioni di olivinite che erano state segnalate solo in parte nel suo precedente lavoro sulla Catena della Val d'Ultimo ⁽¹⁾. Nell'attesa di pubblicare i risultati di uno studio su queste oliviniti, il prof. Andreatta mi ha affidato lo studio dei campioni di actinolite e di antofillite, fornendomi le seguenti notizie. L'actinolite si trova in cristalli prismatici di notevoli dimensioni entro una olivite compatta o leggermente scistosa all'aspetto macroscopico, spesso a contatto con lenticelle aplitiche comprese entro la roccia peridotitica. L'antofillite, invece, forma vene e lenticelle dello spessore di alcuni centimetri, di aggregati subparalleli di cristalli aciculari, perpendicolari alle pareti delle lenticelle, con aspetto del tutto simile agli aggregati di antofillite già notati da Andreatta nelle oliviniti di Alpe di Brez (1, p. 88).

L'*actinolite* è di un bel colore verde-oliva intenso, è apparentemente tenera al tatto e i singoli individui, che raggiungono anche sei o sette centimetri di lunghezza, mostrano con evidenza la tipica forma prismatica allungata assai appiattita.

Al microscopio appare scarsamente colorata in verde-grigio, di lucentezza sericea, con sfaldature fitte e fratture sempre cementate da magnetite e idrossidi ferrici; numerosi sono gli inclusi di quarzo, di biotite e rari e piccoli i cristalli idiomorfi di apatite. Il pleocroismo non è molto accentuato secondo lo schema:

$$\alpha = \beta = \text{incolore, grigio-chiaro}$$

$$\gamma = \text{verde-grigio}$$

Notevole è la rifrazione: gli indici, determinati per i tre assi, con iodo-benzolo e *a*-bromonaftalina e a luce gialla monocromatica, sono:

(*) Lavoro eseguito col contributo del C.N.R. nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.

(**) Nell'adunanza del 14 novembre 1953.

(1) C. ANDREATTA, *La formazione gneissico kinzigitica e le oliviniti di Val d'Ultimo (Alto Adige)*. «Memorie del Museo di Storia Naturale della Venezia Tridentina», 3^a, Trento 1935.

$$\alpha = 1,615 \pm 0,002$$

$$\beta = 1,629 \pm 0,002$$

$$\gamma = 1,635 \pm 0,002$$

La potenza birifrattiva massima, calcolata risulta perciò: $\gamma - \alpha = 0,0020$; l'angolo di estinzione $z/\gamma = 19^\circ$ e 2V, determinato al T.U. su cinque individui è in media 80° , negativo.

Il peso specifico, media di tre determinazioni, è:

$$p. s. = 3,15$$

Le percentuali in peso degli ossidi, media di due analisi, sono:

%		Quoz. atom.		
SiO ₂ . . .	56,54	Si	0,9414	7,64
Al ₂ O ₃ . . .	2,28	Al	0,0448	0,36
TiO ₂ . . .	tr.	Ti	—	—
Cr ₂ O ₃ . . .	0,08	Cr	0,0010	0,01
Fe ₂ O ₃ . . .	0,07	Fe'''	0,0008	0,01
FeO . . .	3,35	Fe''	0,0466	0,38
MnO . . .	tr.	Mn	—	—
MgO . . .	22,89	Mg	0,5677	4,61
CaO . . .	12,01	Ca	0,2142	1,74
Na ₂ O . . .	0,86	Na	0,0278	0,23
K ₂ O . . .	0,38	K	0,0080	0,06
H ₂ O ⁺ . . .	1,59	OH	0,1766	1,43
H ₂ O ⁻ . . .	0,24	O	2,7108	22,00
<hr/> 100,29 <hr/>				

Pure questa actinolite, come quella di Sas dell'Anel ⁽²⁾, è ricca di silice e con scarsi ossidi di Al e Fe, carattere quest'ultimo che avvicina l'actinolite al gruppo delle tremoliti.

La formula di questo minerale è la seguente:



La corrispondenza con la teorica è quasi perfetta, sebbene si riscontri ancora una volta la forte deficienza dell'ossidrilile.

(2) R. PIRANI, *I minerali del gruppo dell'Ortler*. - VIII. *Actinolite di Sas dell'Anel Malè e sua solubilità*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe Sc. fis., mat. e nat., 1953.

Le esperienze di lavaggio, riassunte nella seguente tabella:

	Parte solu- bilizzata		Minerale dilavato			Minerale inalterato
SiO ₂ . . .	0,09	+	56,09	=	56,18	56,54
Triv. . . .	0,06	+	6,13	=	6,19	6,15
MgO	0,04	+	22,68	=	22,72	23,89
CaO	0,34	+	11,56	=	11,90	12,01
K ₂ O	0,21	+	0,23	=	0,44	0,38
Na ₂ O	0,27	+	0,52	=	0,79	0,86
H ₂ O		+	2,01	=	2,01	1,83
	1,01	+	99,22	=	100,23	100,66
				o''' = o''	0,37	o''' = o''
					99,86	100,29

mostrano che all'analogia di composizione con l'actinolite di Malga Plaza corrisponde pure analogia di solubilità dei diversi ioni.

La percentuale della parte solubile, pesata prima dell'analisi, è 0,97 %, valore attendibile se confrontato con la somma 1,01 % degli ossidi solubilizzati e analizzati.

Pure questa volta, sebbene con minore evidenza, si riscontra un aumento dell'acqua totale nei confronti del minerale prima del dilavamento.

I rapporti percentuali fra gli ossidi solubilizzati e le percentuali analitiche del minerale sono i seguenti:

SiO ₂ . . .	0,159	CaO . . .	2,829
Triv. . . .	0,976	K ₂ O . . .	55,263
MgO	0,175	Na ₂ O . . .	31,395

Ancora una volta si è avuto essenzialmente l'asporto dei grossi cationi alcalini e quindi del Ca; di secondaria importanza e assai limitata è la solubilità degli altri ioni.

Non si può attribuire un valore assoluto ai dati ottenuti per tali ossidi, considerando la scarsa, anzi scarsissima percentuale di questi passata in soluzione e la difficoltà di una determinazione analitica esatta.

* * *

Macroscopicamente l'aggregato di *antofillite* ha colore giallo-verdastro con spiccata orientazione subparallela dei cristalli aciculari nel senso normale all'allungamento; localizzate in alcune zone si trovano venature verdi formate di un anfibolo monoclinico e clorite.

Al microscopio l'aggregato si mostra formato da parti serpentine e da parti di cristalli aciculari di *antofillite*, con fratture e sfaldature multiple entro cui si insinua il serpentino.

Le masse serpentinosi sono costituite da un finissimo intreccio di fibrille e lamelline di talco, muscovite, biotite cloritizzata, magnetite ed ematite.

Dove predomina l'antofillite ho notato, come accessori: un anfibolo monoclinico, un pirosseno rombico, apatite, titanite ed epidoti. Il pirosseno rombico, in rari cristalli prismatici, tozzi, di colore grigio-verdastro, lucentezza metallica, tendente alla vitrea, con sfaldature rade ma nette, allungamento positivo e $2V$ molto ampio, è normalmente associato all'anfibolo monoclinico; questo, sempre cloritizzato, è leggermente pleocroico, con l'angolo $z/\gamma = 20^\circ$, $2V$ positivo e molto vicino a 90° . La muscovite in larghe lamine è frammista a talco ed è ricca di inclusioni idiomorfe di apatite ed epidoto della varietà pistacite.

L'*Antofillite* di forma prismatica allungata, presenta frequentemente geminazione semplice secondo (100), ha colore bianco-bruno, debole pleocroismo, lucentezza sericea e rifrazione media; per γ , usando bromoformio e α -bromonaftalina, ho ottenuto:

$$\gamma = 1,640 \pm 0,002.$$

È comune un'alterazione in serpentino che ora è marginale, ora diffusa a tutto il cristallo che assume una tessitura finemente fibroso-feltrata.

Nei cristalli meno alterati l'angolo fra gli assi ottici è di 80° , negativo.

Il peso specifico è in media 3,17: risultato un po' incerto a causa della sottigliezza degli aciculi che impedivano una completa eliminazione delle bolle d'aria.

La preparazione del materiale per l'analisi chimica è stata un po' laboriosa per l'avanzato grado di alterazione del minerale, un'impregnazione, comune alla maggior parte dei cristalli, di una sostanza giallina probabilmente limonitica, e l'intima connessione dell'antofillite con l'anfibolo monoclinico e la clorite. Perciò ho eseguito l'analisi in doppio su porzioni diverse di minerali, tuttavia risultati quasi concordanti, dei quali riporto la media:

%		Quoz. atom.		
SiO ₂ . . .	56,01	Si . . .	0,9324	7,66
Al ₂ O ₃ . . .	2,96	Al . . .	0,0580	0,34
TiO ₃ . . .	0,14	Ti . . .	0,0018	0,14
Cr ₂ O ₃ . . .	0,22	Cr . . .	0,0030	0,01
Fe ₂ O ₃ . . .	0,15	Fe''' . . .	0,0018	0,03
FeO . . .	7,01	Fe'' . . .	0,0976	0,01
MnO . . .	tr.	Mn . . .	—	0,80
MgO . . .	27,94	Mg . . .	0,6930	} $z = 8,00$
CaO . . .	1,68	Ca . . .	0,0300	
Na ₂ O . . .	0,56	Na . . .	0,0180	} $x = 7,13$
K ₂ O . . .	0,19	K . . .	0,0040	
H ₂ O ⁺ . . .	2,12	OH . . .	0,2354	1,93
H ₂ O ⁻ . . .	0,86	O . . .	2,6765	22,00
99,84				

Si tratta di una antofillite molto magnesifera data la netta prevalenza del Mg su Fe ed Al, che sono i tre elementi vicarianti nella serie delle antofilliti.

Il basso tenore in Fe'' è in accordo coi valori medi della rifrazione e del peso specifico che aumentano, come è noto, con l'aumentare del Fe''.

Dai calcoli risulta per questa antofillite la seguente formula:



Il numero degli ioni esacoordinati è leggermente alto; l'ossidrile, poi, raggiunge questa volta il valore teoricamente voluto.

Anche su questo anfibolo ho eseguito un'esperienza di soluzione al fine di conoscere il potere solvente dell'H₂O sui vari ioni dell'edificio spaziale.

Nella tabella riporto i pesi percentuali degli ossidi solubilizzati seguiti da quelli del minerale dilavato:

	% parte solubile		% parte insolubile		minerale inalterato	
SiO ₂ . . .	0,04	+	56,25	=	56,29	56,01
Triv. . . .	0,08	+	11,28	=	11,36	11,25
MgO . . .	0,03	+	28,02	=	28,05	27,94
CaO . . .	0,11	+	1,42	=	1,53	1,68
K ₂ O . . .	0,09	+	0,06	=	0,15	0,19
Na ₂ O . . .	0,20	+	0,41	=	0,61	0,56
H ₂ O . . .			3,28	=	3,28	2,98
	0,55	+	100,82	=	101,27	100,61
				o'' = o'''	0,77	o'' = o'''
					100,50	99,84

Per l'antofillite si riscontra una solubilità nettamente inferiore a quella delle actinoliti; infatti raggiunge soltanto 0,53 %. Ciò, probabilmente, è in relazione alla minore percentuale di Ca presente nel minerale, che rappresenta un catione abbastanza facilmente asportabile dal reticolo dei silicati.

Riporto, infine, i rapporti percentuali indicanti la solubilità relativa dei cationi:

SiO ₂ . . .	0,071	CaO . . .	6,547
Triv. . . .	0,687	K ₂ O . . .	47,368
MgO . . .	0,107	Na ₂ O . . .	35,801

Prescindendo dalle solubilità del K e del Na, che confermano ancora una volta il facile asporto degli ioni alcalini, è interessante notare l'aumento della solubilità del calcio nei confronti delle actinoliti. Ciò potrebbe essere dovuto a una minore stabilità del calcio come elemento esacoordinato, anziché octocoordinato; tuttavia, non è improbabile che il grado di alterazione del minerale ne abbia favorito l'asporto, o che il calcio si trovi sotto forma di impurezze estranee. Parimenti, la solubilità lievemente superiore dei trivalenti potrebbe essere dovuta alla diffusa impregnazione limonitica dei cristalli.

Mineralogia. — *I limiti di sostituzione silicio: alluminio nei minerali magmatici* (*). Nota I di MOSÈ BALCONI, presentata (**) dal Socio U. PANICHI.

In una precedente Nota (1) ho ammesso, come base di un nuovo metodo di calcolo delle analisi delle rocce, che nelle rocce l'ossigeno sia in primo luogo legato a una parte del silicio a costituire dei gruppi anionici $(\text{SiO}_4)^{4-}$, mentre l'eccesso del Si costituisce, analogamente agli altri cationi presenti, dei raggruppamenti coordinativi con i gruppi anionici $(\text{SiO}_4)^{4-}$. Questo Si in eccesso lo chiamai Si « legante » o « extratetraedrico » non per negare la coordinazione 4 di questa parte del silicio rispetto all'ossigeno, ma per fare risaltare la sua diversa funzionalità rispetto al Si coordinatore del gruppo tetraedrico anionico $(\text{SiO}_4)^{4-}$.

Ho voluto vedere se il concetto del Si « legante » applicato alla struttura dei diversi gruppi dei silicati portasse a qualche considerazione degna di nota ed espongo qui alcuni risultati in proposito.

IL CALCOLO DEL SILICIO « LEGANTE » NEI DIVERSI GRUPPI STRUTTURALI DEI SILICATI. — Per semplicità mi riferirò alle formule ad O_{24} già usate nel lavoro citato, considerando i diversi aggruppamenti Si—O secondo la nota classificazione di Bragg (1930) (2).

A) Gruppi a O dimensioni.

1° Gruppi SiO_4 indipendenti (orto- o neso-silicati). Es.: Forsterite $\text{Mg}_{12}[\text{Si}_6\text{O}_{24}]$,

Silicio legante: O, O, O.

2° Gruppi chiusi (soro- o ciclo-silicati):

a) $\text{Si}_2\text{O}_7 \equiv \underline{\text{Si}}_{1/4} \text{Si}_{\text{an } 1,3/4} \text{O}_7$ es. Thortveitite $\text{Sc}_2[\text{Si}_2\text{O}_7]$,

Silicio legante: $1/4$; $1/8$; $1/7$.

b) $\text{Si}_3\text{O}_9 \equiv \underline{\text{Si}}_{3/4} \text{Si}_{\text{an } 2,1/4} \text{O}_9$ es. Benitoite $\text{BaTi}[\text{Si}_3\text{O}_9]$,

Silicio legante: $3/4$; $1/4$; $1/3$.

c) $\text{Si}_4\text{O}_{12} \equiv \underline{\text{Si}}_1 \text{Si}_{\text{an } 3} \text{O}_{12}$ es. Nettunite $\text{Na}_2\text{FeTi}[\text{Si}_4\text{O}_{12}]$,

Silicio legante: 1; $1/4$; $1/3$.

d) $\text{Si}_6\text{O}_{18} \equiv \underline{\text{Si}}_{3/2} \text{Si}_{\text{an } 9/2} \text{O}_{18}$ es. Berillo $\text{Al}_2\text{Be}_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}]$,

Silicio legante: $1,5$; $1/4$; $1/3$.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Pavia.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) *Di un nuovo metodo di calcolo delle analisi delle rocce e di alcune notevoli conseguenze.*

* Rend. Acc. Naz. Lincei, Classe Sc. fis., mat., e nat., ser. VIII, vol. XIV, 130-138 (1953).

(2) Il valore del silicio « legante » viene espresso:

1° In unità Si per unità di raggruppamento;

2° Come frazione del silicio totale;

3° Come rapporto fra silicio « legante » e silicio « anionico ».

Il silicio legante ed il silicio anionico vengono indicati rispettivamente con Si e Si_{an} .

B) Gruppi con estensione indefinita.

1° Gruppi a estensione indefinita monodimensionale (inosilicati):

a) *A catena semplice*: $(\text{SiO}_3)_x \infty$ Es. Pirosseni: Enstatite

Silicio legante: 2; 1/4; 1/3.

b) *A catena doppia*: $(\text{OH})_2 (\text{Si}_4\text{O}_{11})_x \infty$ Es. Anfiboli: Cummingtonite $(\text{Fe}, \text{Mg})_7 (\text{OH})_2 \text{Si}_{5/2} \text{Si}_{\text{an}11/2} \text{O}_{22}$.

Nel caso degli anfiboli l'idrogeno comincia ad introdursi nel reticolato dei minerali magmatici sotto forma dei gruppi OH^- ed il calcolo del silicio legante potrebbe farsi secondo due diversi principi:

1° si può ammettere che il silicio legante rimanga costante nei pirosseni e negli anfiboli (e poi anche nelle miche) in quanto nel reticolato di questi minerali l'ossigeno totale (compreso quello dei gruppi OH^-) rimane costante (Bragg, Niggli);

2° si può invece considerare che l'ossigeno venga strappato dall'idrogeno ai gruppi (SiO_4) per formare i gruppi OH^- , che le determinazioni strutturali hanno dimostrato non essere mai legati, nei minerali magmatici, al silicio. In tale caso i gruppi (SiO_4) verranno complessivamente a diminuire e in corrispondenza una certa quantità di Si (equivalente all'ossigeno legato nei gruppi OH^-) passerà dalla funzione anionica alla funzione « legante » (del Si_{an} si trasformerà in Si).

Nel primo caso si avrebbero per il silicio legante degli anfiboli i valori: 2; 1/4; 1/3 come nei pirosseni; nel secondo caso, che corrisponde ai concetti basilari del metodo di calcolo qui considerato, il silicio legante diventa: 2,5; 5/16; 5/11.

2° Gruppi ad estensione indefinita bidimensionale (fillosilicati).

Aggruppamento caratteristico: $(\text{OH})_4 \text{Si}_3 \text{Si}_{\text{an}5} \text{O}_{20}$.Es: Miche: Flogopite $\text{K}_2 \text{Mg}_6(\text{OH})_4 \text{Al}_2^{\text{IV}} \text{Si} \text{Si}_{\text{an}5} \text{O}_{20}$.

A seconda dei due casi esposti in b) si hanno per il silicio legante i valori:

1° 2; 1/4; 1/3.

2° 3; 3/8; 3/5.

3° Gruppi ad estensione indefinita tridimensionale (tettosilicati).

Qui possiamo distinguere fra loro i casi dei feldspatoidi, dei feldspati e del quarzo:

a) *Feldspatoidi* (e anortite): es. Nefelina $\text{Na}_6\text{Al}_6\text{Si}_{\text{an}6}\text{O}_{24}$.

Silicio legante: O, O, O.

b) *Feldspati alcalini*: es. Albite $\text{Na}_3\text{Al}_3\text{Si}_3\text{Si}_{\text{an}6}\text{O}_{24}$,

Silicio legante: 3; 1/3; 1/2.

c) *Modificazioni della silice*: es. Quarzo $\text{Si}_6\text{Si}_{\text{an}6}\text{O}_{24}$,

Silicio legante: 6; 1/2; 1.

I LIMITI DI SOSTITUZIONE QUANTITATIVA $\text{Si}-\text{Al}^{\text{IV}}$. - Una delle idee più fruttuose sulla costituzione e la struttura dei silicati è rappresentata, accanto alla affermazione della possibilità di raggruppamenti reticolari com-

plexi Si—O, dal riconoscimento della possibilità di sostituzione, in tali aggruppamenti complessi, di parte del Si con alluminio a coordinazione 4 (Al^{IV}).

I limiti di questa sostituibilità Si— Al^{IV} non sono però stati sino ad ora nettamente definiti (ad eccezione forse del caso dei tetrasilicati), né sino ad ora si sono indicate le ragioni per cui la sostituibilità varia con il tipo di raggruppamento (Si— Al^{IV})—O. Così non mi risulta che il Machatschki, il quale per primo (1928) affermò nettamente sia l'idea degli aggruppamenti complessi Si—O, sia quella della sostituibilità parziale Si— Al^{IV} in questi complessi ⁽³⁾, si sia occupato dei limiti di questa sostituibilità. Nel suo lavoro fondamentale sulla struttura dei silicati (1930) il Bragg («Z. Kr.», 74, 284) si limita, in proposito, ad affermare che: «The unit of structure of a silicate... contains X positions that may be occupied by silicon or aluminium with a general restriction (non meglio specificata) on the extent to which aluminium can replace silicon».

Il Bragg fa anche notare (loc. cit., p. 290, ultime righe della nota) che spesso si ha difficoltà nel definire quando l'Al possa considerarsi insieme al Si e quando no.

A sua volta il Niggli nel suo lavoro sulla stereochimica dei silicati (1932) dopo aver affermato che la sostituibilità massima Si—Al è 1 : 1 (nel caso dei feldspatoidi), osserva che la sostituzione Si—Al sembra avvenire secondo rapporti semplici e razionali («Z. Kr.», 82, 220).

Più recentemente nella seconda edizione delle sue *Mineralogische Tabellen* (1949) lo Strunz afferma (p. 51): «l'Al può assumere il ruolo del Si solo per una parte limitata; nelle catene fino ad 1/4 del totale degli ioni a coordinazione tetraedrica, negli strati e nelle armature tridimensionali sino alla metà».

Dopo la pubblicazione delle Tabelle dello Strunz il problema dei rapporti quantitativi di sostituzione Si— Al^{IV} nei pirosseni, anfibioli e miche è stato affrontato dallo Harry ⁽⁴⁾ (1950) in base ai dati pubblicati precedentemente da A. F. Hallimond ⁽⁵⁾ (1943-1947) per i pirosseni e per gli anfibioli, e dal Nockolds ⁽⁶⁾ (1947) per le biotiti magmatiche.

Per i *pirosseni* è possibile basarci oltre che sulle 10 analisi di «pirosseni plutonici» elencate dall'Harry (loc. cit., p. 144), sulle 171 analisi raccolte dal Niggli ⁽⁷⁾ di pirosseni della consolidazione magmatica (144 di pirosseni monoclini e 27 di pirosseni rombici) e sulle 44 analisi (di cui 40 nuove) di pirosseni monoclini comuni (con paragenesi varie) riportate da H. H. Hess ⁽⁸⁾.

(3) La prima idea della sostituzione del Si con Al nei silicati si può far risalire al famoso lavoro di TSCHERMAK sui feldspati (1864), «Berichte d. K. K. Akad. d. Wiss. Wien», vol. 150, 566-613 (1864).

(4) W. T. HARRY, «Min. Mag.», 29, 142-149 (1950).

(5) A. F. HALLIMOND, «Min. Mag.», 28, 230-243 (1947) e «Am. Min.», 28, 65-89 (1943).

(6) S. R. NOCKOLDS, «Am. Journ. Sci.», 245, 401-420 (1947).

(7) P. NIGGLI, «Schw. Min. Petr. Mitt.», 23, 536-607 (1943).

(8) H. H. HESS, «Am. Min.», 34, 621-667 (1949).

Da tutti questi dati appare che la sostituzione Si—Al nei pirosseni magmatici assume per solito valori molto più bassi di quelli ammissibili teoricamente (Al^{IV} : Si = 1 : 3). Così tra i pirosseni i cui dati sono riportati dallo Harry si ha una sostituzione massima di 0,860 Al^{IV} : 7,140 Si = 1: 8,3 = 0,12), mentre tra i 171 pirosseni elencati dal Niggli, facendo per il momento astrazione dall'analisi n. 75, di cui dirò poi, si hanno solo i seguenti casi di sostituzione relativamente elevata:

N° An.	64	74	76	124
% in peso SiO_2	41.80	40.28	42.59	35.04
Al_2O_3	9.30	10.30	10.63	9.42
				TiO_2 8.97
Si in Z	6.44	6.23	6.46	5.64
Al^{IV} in Z	1.56	1.77	1.54	2.13
				Ti^{IV} 0.23
Al^{VI}	0.12	0.11	0.35	0
% Al^{IV} in Z	19.5	22.1	19.2	26.8
				$\text{Al}^{\text{IV}} + \text{Ti}^{\text{IV}}$ 29.5

An. 64: Titanaugite; Ice River (Colombia Britannica). in B. E. WARREN, J. A. ALLEN, M. F. CONNER, «Am. Journ. Sc.», 43, 75-78 (1917).

An. 74: Titanaugite; Scawt Hill, Co. Antrim. Da una dolerite nefelinico-melilitica; «Min. Mag.», 22, 439 e sgg. (1929-31).

An. 76: Titanaugite, Medwes, Ungheria. Incluso in un basalto; «Foltani Kögleny», 40, 581-590 (1910); «Ref. N. Jahrb. Min.», II, 193 (1911).

An. 124: Titanaugite, Oirota, Siberia occidentale. Da un gabbro ilmenitico; P. LEBEDEV e A. LEBEDEV, «Compt. Rend. Acad. Sc. U.S.S.R.», 3, 294-297 (1934).

Fra le analisi dell'Hess solo 2 (l'an. 24 e l'an. 25, rispettivamente di una salite e di una ferrosalite) contengono l'11,2 e l'11,4 % di Al tra gli atomi Z.

Giustamente quindi fa notare già l'Hess (loc. cit., p. 625) che la sostituzione Si—Al appare nei pirosseni piuttosto limitata: ben poche sono le analisi (e non tutte di minerali sicuramente magmatici!) in cui la sostituzione dell' Al^{IV} al Si supera il 12 % (degli atomi a coordinazione 4) ⁽⁹⁾. Gli unici casi in cui la sostituzione teorica (25 %) appare raggiunta o addirittura superata è quello, ricordato sia dall'Hess (p. 625), sia dal Niggli (an. 75), in cui la sostituzione Al—Si raggiunge il 26,2 % degli atomi Z ⁽¹⁰⁾ e quello qui riportato dell'an. 124, in cui l' Al^{IV} raggiunge il 26,8 % e $\text{Al}^{\text{IV}} + \text{Ti}^{\text{IV}}$ raggiunge il 29,5 % delle posizioni Z.

Nel caso dell'analisi 75 si tratta di una titanaugite di Aberdeenshire raccolta da H. H. Read, che forma una piccola macchia o segregazione entro ad un hornfels diopsidico-plagioclasico, ricco di sfeno, xenolitico entro ad

(9) Cioè la metà della sostituzione massima teoricamente possibile.

(10) Il dato è riportato erroneamente da Hess come 27,6 %. Dall'analisi originale (B. E. DIXON e W. F. KENNEDY, «Z. Krist.», 86, 114 (1933)) si calcola 26,2 %.

una norite di Haddo, che gli Autori considerano come di origine metamorfica ⁽¹²⁾.

Quanto all'analisi 124 essa è caratterizzata da un tenore assai elevato di TiO_2 (8,97%), tale che il Ti entra in piccola parte (0,23 su 8) nelle posizioni Z ⁽¹²⁾ a occupare le quali non basta neppure tutto l'Al. Trattandosi di un lavoro russo (sulla geochimica del titanio e del vanadio nella Siberia occidentale) non mi è stato possibile controllare i dati paragenetici sul lavoro originale. Il fatto che si tratti, secondo quanto riporta il Niggli, di una titaugite entro ad un gabbro ilmenitico fa pensare però ad una paragensi basica, parzialmente ossidica, a caratteri particolari, per un eccezionale tenore in ossido di titanio, sia del minerale che della roccia madre.

Anche nel caso dei pirosseni acmitici studiati da P. A. Sabine ⁽¹³⁾ si ha, per le 20 analisi da lui riportate, un valore aritmetico medio di sostituzione Al^{IV} —Si pari al 4,5 % delle posizioni Z; il suo valore massimo (an. n. 23) è uguale solo al 10,3 %. La sostituzione Al—Si sembra quindi avere nei pirosseni alcalini, carattere perfettamente simile a quello su ricordato per gli altri pirosseni.

Per gli *amfiboli* magmatici i limiti di sostituzione citati dall'Harry, dai dati dell'Hallimond, variano, per formule ad O_{24} , usate già dall'Autore, tra:

	Min.	Max.
Si	6,40	5,60
Al^{IV}	1,60	2,40

I limiti di sostituibilità massima Si—Al superano quindi nel caso degli amfiboli monoclini magmatici i valori di $1/3$ (2 Al/6 Si) assegnati dallo Strunz, per avvicinarsi al valore 2,5/5,5 corrispondente al valore da me precedentemente calcolato nel caso *b*) per il rapporto $\frac{Si}{Si_{an}}$.

Se poi consideriamo i dati dell'Hallimond per gli amfiboli calciferi vediamo che su 188 amfiboli anidri, 27 (15 %) superano il valore di sostituzione Al — $Si = 1 : 3$ dato dallo Strunz, mentre il valore minimo per il silicio totale è 5,56, molto vicino al valore 5,50 calcolato per il silicio « anionico » degli amfiboli.

Analogamente i dati medi riportati dall'Harry per le *biotiti* di rocce alcali—calciche indicano che la sostituzione dell'alluminio al silicio può raggiungere in presenza di muscovite (o di topazio e in genere di minerali allu-

(11) B. E. DIXON e W. Q. KENNEDY, loc cit., p. 112: « the only other example of titaugite of metamorphic origin is that described by Coulson from Rajputana (« Rec. Geol. Surv. India », 63 (4), 448-450 (1930)) where a pseudo-uniaxial titaniferous augite occurs as a contact metamorphic product at the junction of an olivine gabbro plug with a calcic sediment. It is significant that, both in Aberdeenshire and Rajputana, the metamorphism is due to the action of a basic magma ».

(12) Come vedremo una sostituzione simile può accadere anche negli amfiboli (sempre però per valori inferiori al 5 % delle posizioni Z).

(13) P. A. SABINE, « Min. Mag. », 29, 113-125 (1950).

miniferi) il valore 2,70 (su 8), valore intermedio fra i valori di 2,50 e 3 calcolati per il Si nel caso degli anfiboli e delle miche. Se ora esaminiamo direttamente i valori singoli calcolati dal Nockolds, troviamo che il valore di sostituzione massimo (3,04) diventa quello teorico (3,00) per una biotite associata a muscovite (An. n. 12), in una diorite quarzifera dei Monti Tatra (Polonia) ⁽¹⁴⁾.

Con questa paragenesi biotitico-muscovitica 8 su 12 biotiti presentano una sostituzione Al—Si maggiore di 2,50. Anche nel caso di sola biotite la sostituzione alluminio-silicio supera il valore 2,50 in 12 su 21 analisi. È inoltre da osservare che la sostituzione Al—Si nelle miche tende a diminuire quando i minerali associati siano orneblenda, oppure pirosseni e, od, olivina, cioè quando aumenta la basicità dell'ambiente o meglio col diminuire della paragenesi alluminifera. Con paragenesi pirossenico-olivinica solo un'analisi su 12 presenta una sostituzione Al—Si di 2,65.

Nelle 14 biotiti di rocce alcaline esaminate dal nostro Autore solo 4 presentano una sostituzione maggiore di 2,50 (massimo 2,85).

È da notare che secondo il Nockolds in tre di queste analisi una parte del Ti sembra far parte dei gruppi Z, o, secondo la notazione qui introdotta, sostituire il silicio « legante ». La sostituzione Ti—Si sembra assumere valori piuttosto limitati (in media 0,4 atomi su 8) con valori limite tra 0,42 e 0,35. Calcolando fra i sostituenti del silicio anche il titanio (Ti^{IV}), cosa che, entro i bassi limiti surricordati, appare plausibile se si considera il Si , le analisi in cui la sostituzione del Si supera i limiti calcolati per gli anfiboli raggiungono anche nelle biotiti delle rocce alcaline il 50 % (7 su 14) ⁽¹⁵⁾.

Dai dati su riportati mi pare che si possa dedurre che *nei minerali magmatici ferromagnesiani i limiti di sostituzione Al—Si coincidono con la sostituzione completa del Si con Al^{IV}* .

Nella 2ª parte di questo lavoro mostrerò come in quei minerali (per esempio miche fragili) nei quali la sostituzione Al—Si sembra superare i limiti suddetti di sostituzione completa Al^{IV} — Si le considerazioni topologiche e paragenetiche portino piuttosto a considerare questi minerali come dei silicati basici (con O legato in parte direttamente all'Al) per fenomeni di contatto e di assimilazione.

Infine esporrò i dati per cui la regola su esposta di sostituzione Al—Si si può estendere ai minerali sialici con struttura di tettosilicati ed ai minerali ad aggruppamento chiuso Si—O, acquistando così quella validità generale a cui avevo già accennato nelle conclusioni del 1º lavoro ⁽¹⁶⁾.

(14) Quest'analisi (Pawlica, 1915, sembra piuttosto caratterizzata da un basso tenore in SiO_2 (33,36 %), che da un elevato tenore in Al_2O_3 (2,71 %): perciò particolarmente scarso appare l' Al^{IV} (0,35 atomi contro 3,04 di Al^{IV}).

(15) Mentre il lavoro era già in corso di redazione è apparsa una Nota di M. FEDERICI e M. FORNASERI su *Le miche dei proietti del Vulcano Laziale* in « Per. Min. », 21, 209-230, 1952), in cui sono riportate le analisi relative a 4 miche. In esse il valore di Al^{IV} varia da un minimo di 2,52 ad un massimo di 2,84 con un valore aritmetico medio di 2,66.

(16) Loc. cit. p. 138.

Fisiologia vegetale. — *Interazione tra auxine e antiauxine a livello dell'attività deidrogenasica «in vitro»* (*). Nota di ERASMO MARRÈ presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

Recenti ricerche hanno permesso di individuare, tra le molte sostanze inibenti la crescita, un gruppo di composti il cui effetto sarebbe imputabile al blocco diretto dell'azione dell'auxina nel primo momento della sua inserzione sui meccanismi cellulari. Questi inibitori, altamente specifici, presenterebbero, come caratteristiche comuni della loro azione sui tessuti viventi, da un lato una certa reversibilità di fronte all'auxina, con un comportamento simile a quello che si rileva nei fenomeni di inibizione competitiva in enzimologia, dall'altro una struttura chimica affine a quella di auxine, naturali o sintetiche, senza che peraltro siano soddisfatti completamente quei requisiti strutturali indispensabili per un'azione positiva: si tratterebbe così, di auxine incomplete; potremmo dire, deformi; e, in realtà, taluni di questi composti si mostrano, in particolari condizioni, dotati di una lieve capacità di stimolo (cfr. Skoog et al. ⁽¹⁾ Thimann ⁽²⁾, Mc Rae et al. ⁽³⁾). Il termine « antiauxine vere » o « strutturali » o « competitive » o, più semplicemente, « antiauxine », applicato alle sostanze che presentano queste caratteristiche, è stato così introdotto per sottolinearne la diversità di meccanismo di azione rispetto a quello di altri composti ad azione sulla crescita più indiretta e aspecifica, come i veleni respiratori e enzimatici in genere, i cui effetti non derivano già da un'interazione con le auxine, ma dalla loro capacità di bloccare processi secondariamente coinvolti nell'accrescimento.

Nel vivo dell'argomento dell'interazione tra auxine e antiauxine sono stato condotto dallo sviluppo di una ricerca circa l'azione di un glucoside, la florizina, sulla pianta superiore. I risultati esposti in una Nota precedente ⁽⁴⁾ mi avevano portato alla conclusione che l'effetto inibente della florizina sulla crescita fosse legato alle sue caratteristiche, rilevabili *in vitro*, di inibitore dell'attività deidrogenasica. D'altro lato la formula della florizina, e a maggior ragione quella del suo aglicone, la floretina, notevolmente più attivo, mi suggeriva un rapporto di parentela chimica tra questi inibitori e altri appartenenti al gruppo delle antiauxine. Infatti la floretina consta dell'unione dell'acido diidro-cumarico, o acido para-idrossi-idrocinnamico, con la floroglucina; può quindi considerarsi come un derivato sia dell'acido

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) F. SKOOG, C. L. SCHNEIDER and P. MALAN, « Amer. Jour. Bot. », 19, p. 568 (1952).

(2) K. V. THIMANN, in *Plant Growth Substances* di F. SKOOG. Univ. Wis. Press, Madison, 1951.

(3) H. D. MC RAE, R. J. FOSTER and J. BONNER, « Plant Phys. », 28, p. 343 (1953).

(4) E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », fasc. prec. (1953).

transcinnamico che della cumarina, entrambi generalmente riconosciuti come antiauxine.

Sono così giunto all'ipotesi che all'analogia strutturale della florizina e della floretina con delle antiauxine potesse corrispondere una sostanziale somiglianza di meccanismo d'azione sulla crescita: in altri termini, che quest'ultimo fosse da ricercarsi, per tutte le sostanze di questo gruppo, in una azione su determinati sistemi deidrogenasici. E poiché, d'altra parte, risulta estremamente probabile che il rapporto di antagonismo tra gli ormoni di crescita e i loro inibitori strutturali derivi da un'interazione di tipo competitivo, come seconda ipotesi mi si è prospettata la possibilità che anche *in vitro*, e cioè in sistemi acellulari, l'auxina potesse rovesciare l'azione di blocco eventualmente indotta da questi suoi antagonisti sull'attività deidrogenasica.

Le ricerche di cui qui dò notizia a titolo preliminare rappresentano solo il frutto di una prima incursione orientativa, intesa a preparare la via ad un più sistematico e particolareggiato studio dei singoli aspetti del problema. Questi primi risultati, pur soggetti a notevole variabilità e incompletamente controllabili quanto a riproducibilità, delineano tuttavia con chiara evidenza alcuni aspetti fondamentali, e sembrano confermare l'ipotesi di una generale azione inibente delle antiauxine su determinati sistemi deidrogenasici, come pure quella della capacità dell'auxina, a concentrazioni fisiologiche, di rovesciare, in sistemi acellulari, questo effetto inibente delle antiauxine.

MATERIALI E METODI. - Come materiale ho utilizzato embrioni di *Avena sativa*, var. « Victory », all'inizio della germinazione, indotto a tale scelta sia dalla notevole attività deidrogenasica rilevabile nei loro estratti, sia dalla considerazione che appunto sul coleoptile di avena germinante esiste una considerevole quantità di dati relativi alla relazione *in vivo* tra auxine, antiauxine, crescita e respirazione.

L'attività deidrogenasica è stata determinata, negli estratti ottenuti per triturazione in mortaio, filtrazione su garza e centrifugazione a bassa velocità, usando sia la tecnica di Thunberg al bleu di Metilene (Umbreit et al. ⁽⁵⁾), sia quella al cloruro di trifenil tetrazolio (Smith ⁽⁶⁾). Entrambi i metodi sfruttano la variazione di colore determinata dalla riduzione dei reattivi ad opera degli enzimi deidrogenanti, in presenza di adeguati substrati.

Come substrato nella maggior parte delle esperienze ho usato il glucosio-6-fosfato (sale sodico preparato da quello di bario per aggiunta di solfato di sodio e centrifugazione). Da esperienze orientative era infatti apparso come l'attività a carico di questo substrato fosse la più intensa, almeno nelle nostre condizioni sperimentali, e anche quella nei cui riguardi meglio si rivelava l'antagonismo tra auxina e antiauxine. È tuttavia da tener presente che essendosi usati estratti non dializzati o comunque purificati, e quindi ricchi di substrati endogeni, gli effetti osservati sono solo indicativamente riferibili a un'azione sulla deidrogenasi specifica per questo substrato, o per quelle che agiscono sui prodotti della sua demolizione, quali potrebbero essere l'acido fosfogluconico, il ribulosio e ribosio ⁽⁵⁾ fosfato, o il sedoeptulosio fosfato (Stumpf ⁽⁷⁾).

(5) W. W. UMBREIT, R. H. BURRIS and J. F. STAUFFER, *Manometric Techniques and Tissues Metabolism*. Burgess, Minneapolis, 1949.

(6) F. G. SMITH, « *Plant Phys.* », 27, p. 445 (1952).

(7) P. K. STUMPF, in *Phosphorus Metabolism*, di McELROY and GLASS, J. Hopkins, Press, Baltimore, 1952.

ESPERIENZE E RISULTATI.

A) *Antiauxine e attività deidrogenasica.*

Come antiauxine in queste esperienze ho usato, oltre alla florizina e alla floretina, l'acido transcinnamico, la cumarina, l'acido difenilil-acetico e l'idrazide maleica. Le caratteristiche di antiauxine « vere » di questi composti sono state descritte, rispettivamente, da Van Overbeck et al. ⁽⁸⁾, da Leopold e Thimann ⁽⁹⁾, da Bertossi ⁽¹⁰⁾, e da Leopold e Klein ⁽¹¹⁾. Le concentrazioni alle quali essi sono stati usati corrispondono, in genere, a quelle che *in vivo* determinano una inibizione non irreversibile della crescita per distensione.

I dati delle Tabelle I e II dimostrano come tutte le antiauxine sopra citate esplichino, *in vitro* un inequivocabile effetto inibitorio sull'attività deidrogenasica.

TABELLA I.

Azione di alcune antiauxine sull'attività deidrogenasica.

Metodo al tetrazolio. Estratto di embrioni di avena al quarto giorno dall'inizio della germinazione, mantenuti al buio e a 25 gradi C. Composizione dell'incubato: Tessuto 25 %, tampona ai fosfati 0,1 M, pH 7,3, KCN 0,005 M, cloruro di trifeniltetrazolio 0,1 % (concentrazioni finali). Volume finale 1 cc. Substrato, quando aggiunto, 2 mg./cc. Tempo di incubazione: 3 ore a 35 C., all'oscurità. Attività del controllo contenente glucosio-6-fosfato presa come eguale a 100, e le altre ad essa riferite. Ogni dato rappresenta la media di tre determinazioni.

Substrato	Inibitore	Attività deidrogenasica	Inibizione
(Endogeni)	—	20	—
Glucosio-6-P	—	100	—
»	Cumarina 10^{-3} M	57	43 %
»	Idrazide Maleica 10^{-3} M	55	45 %
»	DFA $2 \cdot 10^{-4}$ M	80	20 %
»	Ac. Transcinnamico $5 \cdot 10^{-3}$ M	73	27 %
»	Floretina $2 \cdot 10^{-4}$ M	43	57 %

(8) J. VAN OVERBECK, R. BLONDEAU and V. HERNE, « Amer. Jour. Bot. », 83, p. 580 (1951).

(9) A. C. LEOPOLD and K. V. THIMANN, « Amer. Jour. Bot. », 36, p. 342 (1949).

(10) F. BERTOSSI, « Compt. Rend. Ac. Paris », 231, p. 161 (1950).

(11) A. C. LEOPOLD and W. H. KLEIN, « Science », 114, p. 9 (1951).

TABELLA II.

Azione dell'idrazide maleica sull'attività deidrogenasica.

Metodo di Thunberg. Condizioni di esperienza come alla Tabella I, ma bleu di Metilene 0,01 % anziché cloruro di trifeniltetrazolio. Temperatura di incubazione 18 gradi C.

	Tempo di decolorazione in minuti primi
Estratto (substrati endogeni) oltre	450
Estratto più glucosio-6-fosfato	90-90-95
Estratto più glucosio più idrazide maleica $5 \cdot 10^{-4}$	150-153-160

La Tabella III esprime l'azione di diverse concentrazioni di cumarina e di acido difenilil-acetico sull'attività deidrogenasica sia di sfondo (imputabile a substrati endogeni) sia dovuta alla presenza di glucosio-6-fosfato nell'estratto. Da essa emergono, come fatti degni di particolare rilievo, la inattività delle due antiauxine sull'attività deidrogenasica endogena, il chiaro effetto inibente in presenza di glucosio-6-fosfato, e, infine, una soddisfacente proporzionalità tra inibizione e logaritmo della concentrazione dell'inibitore.

TABELLA III.

Azione dell'acido difenilil-acetico e della cumarina sull'attività deidrogenasica, in funzione della concentrazione.

Estratto di coleottili d'avena di lunghezza media di cm. 3, decapitati e defolati. Composizione dell'incubato: tessuto 12 %, tampone ai fosfati 0,05 M, pH 7,5. Difosfopiridin nucleotide (DPN) e trifosfopiridin-nucleotide (TPN), quando aggiunti, 50 gamma/cc (Ambedue i coenzimi forniti dalla ditta «Sigma» di St. Louis). Volume finale cc. 1,2. Tempo di incubazione: 5 ore a 35 gradi C. Attività del controllo senza inibitore e senza substrato aggiunto presa come eguale a 100. Metodo al tetrazolio.

Inibitore	Attività deidro- genasica (endogena) in presenza di DPN	Attività deidro- genasica in presenza di gl. 6-P e di TPN
(H ₂ O)	100	270
Cumarina 10^{-4} M	93	280
Cumarina $2 \cdot 10^{-4}$ M	101	251
Cumarina $5 \cdot 10^{-4}$ M	95	217
Cumarina 10^{-3} M	92	156
DFA 10^{-4}	93	230
DFA $3 \cdot 10^{-4}$	102	198
DFA 10^{-3}	99	160

B) *Rovesciamento da auxina dell'inibizione da antiauxine.*

Come auxina ho usato l'acido indolacetico, probabilmente il più diffuso in natura tra gli ormoni di crescita, e, a quanto noto, il più attivo sul coleoptile d'avena. Anche in questo caso la concentrazione è stata scelta in modo da permettere un accostamento tra i dati preesistenti circa l'azione sulla crescita e quelli eventualmente ottenibili nei riguardi dell'attività deidrogenasica *in vitro*: ho quindi usato, nella maggior parte delle esperienze, una concentrazione di $4 \cdot 10^{-6}$, e cioè quella che su sezioni di coleoptile determina il massimo effetto di stimolo sulla distensione cellulare (Bonner ⁽¹²⁾).

TABELLA IV.

Azione dell'acido indolacetico sull'attività deidrogenasica in assenza e in presenza di antiauxine.

Metodo al tetrazolio. Condizioni sperimentali come alla Tabella I, ma estratto proveniente da altro lotto di avena. Attività in assenza di auxina e antiauxina, e in presenza di glucosio-6-fosfato presa come eguale a 100. Ogni dato rappresenta la media di tre determinazioni.

Substrato	Auxina	Antiauxina	Attività deidrogenasica	Inibizione	Disinibizione da IA
(Endogeni)	—	—	29	—	—
Glucosio-6-P	—	—	100	—	—
Glucosio-6-P	IA 10^{-5}	—	86	14 %	—
Glucosio-6-P	IA $4 \cdot 10^{-6}$	—	88	12 %	—
Glucosio-6-P	—	Cumarina 10^{-3} M	48	52 %	—
Glucosio-6-P	IA $4 \cdot 10^{-6}$	Cumarina 10^{-3} M	63	37 %	29 %
Glucosio-6-P	—	Idrazide maleica $5 \cdot 10^{-4}$	50	50 %	—
Glucosio-6-P	IA $4 \cdot 10^{-6}$	Idrazide maleica $5 \cdot 10^{-4}$	95	15 %	70 %
Glucosio-6-P	—	DFA $3 \cdot 10^{-4}$ M	70	30 %	—
Glucosio-6-P	IA $4 \cdot 10^{-6}$	DFA $3 \cdot 10^{-4}$ M	79	21 %	30 %
Glucosio-6-P	—	Florizina 10^{-3} M	38	62 %	—
Glucosio-6-P	IA 10^{-5}	Florizina 10^{-3} M	68	32 %	49 %

Dai risultati delle esperienze della Tabelle IV e V. appare evidente come l'acido indolacetico, mentre da solo esercita una lieve ma pur signi-

(12) J. BONNER, « Jour. Gen. Phys. », 17, p. 63 (1933).

ficativa azione inibente, fatto già rilevato da Berger e Avery ⁽¹³⁾, si dimostri per contro, in presenza di antiauxine, capace di controbatterne efficacemente l'effetto di blocco sull'attività deidrogenasica, con disinibizioni che variano dal 30 all'80 %.

TABELLA V.

Azione dell'acido indolacetico sull'attività deidrogenasica in presenza e assenza di inibitore.

Metodo di Thunberg. Condizioni di esperienza come alla tabella II, ma estratto di embrioni di avena germinanti da 3 anziché 4 giorni. Temperatura: 16 gradi C.

	Tempo di decolorazione in minuti primi
Estratto (substrati endogeni)	più di 300
Estratto più glucosio-6-P	150-153-155
Estratto più glucosio-6-P più IA $4 \cdot 10^{-6}$. . .	175-180-181
Estratto più glucosio-6-P più Idrazide maleica $5 \cdot 10^{-4}$	205-205-208
Estratto più glucosio-6-P più Idr. maleica più IA	150-165-170

I dati delle due tabelle si riferiscono a serie di esperienze scelte tra le più complete, ed effettuate in condizioni di diluizione dell'enzima, pH e temperatura accuratamente controllate: la significatività dei dati risulta dai bassi valori dell'errore medio. Devo però sottolineare il fatto che (a quanto risulta da altre serie di esperimenti che per brevità non riporto) la azione disinibente dell'auxina è apparsa variare estesamente con le condizioni di esperienza, in particolare in funzione della concentrazione dell'estratto, della natura del substrato aggiunto (effetti praticamente nulli essendosi ottenuti, ad esempio, usando piruvato) del pH finale dell'incubato, del tempo e della temperatura di incubazione, e, infine, dello stadio del materiale utilizzato per gli estratti. In altri termini, mentre l'effetto di disinibizione appare omogeneo e facilmente riproducibile per determinate condizioni dell'incubato, per contro esso è soggetto a estese variazioni in dipendenza di fattori molteplici. Questa difficoltà nel controllo del fenomeno è probabilmente in gran parte imputabile all'ignoranza circa la reazione (o le reazioni) enzimatica specificamente interessata: la cui identificazione potrà raggiungersi solo attraverso uno studio più sistematico.

I dati finora ottenuti sembrano peraltro sufficienti a indicare l'esistenza di un rapporto di interazione, presumibilmente competitiva, tra auxina e antiauxine a livello di un qualche sistema deidrogenasico *in vitro*.

(13) J. BERGER and G. S. AVERY, « Amer. Jour. Bot. », 31, p. 11 (1944).

CONCLUSIONI.

Riassumendo:

I. - Tutte le antiauxine usate, e cioè la cumarina, l'acido difenilil-acetico, l'acido transcinnamico e l'idrazide maleica, hanno inibito, *in vitro* e a concentrazioni vicine a quelle reversibilmente inibenti *in vivo* la crescita, l'attività di determinati sistemi deidrogenasici.

II. - L'acido indolacetico, *in vitro* e a concentrazioni che *in vivo* stimolano la crescita, appare privo di qualsiasi azione di stimolo sull'attività deidrogenasica, anzi, la inibisce lievemente.

III. - Lo stesso acido indolacetico, alle stesse concentrazioni inattive in assenza di inibitori, è però capace di rovesciare, in misura talora notevolissima, l'effetto inibente delle antiauxine sui sistemi deidrogenasici.

Questi risultati sembrano offrire la dimostrazione sperimentale, ottenuta per la prima volta, a quanto mi consta, su un sistema acellulare, di una interazione tra auxine e antiauxine a livello dello stesso sistema enzimatico.

Una valutazione della portata fisiologica di questo reperto presume ulteriori ricerche, e verrà diffusamente esposta in altra sede. Limitando per ora la discussione a un aspetto fondamentale del problema, mi sembra non possa sfuggire l'evidente possibilità di collegamento tra l'effetto *in vitro* sull'attività deidrogenasica e quelli fisiologici che auxine e antiauxine esplicano sulla pianta integra o su isolate di essa. Tale collegamento deriva sia dall'apparire, nei due casi, molto vicine le concentrazioni attive, sia dal ben noto, anche se alquanto vago, rapporto tra respirazione e fenomeni di tipo auxinico, che ha indotto a più riprese altri Autori a prospettare l'ipotesi che l'azione dell'auxina e delle antiauxine sulla crescita sia secondaria a quella su un qualche sistema respiratorio (Commoner e Thimann⁽¹⁴⁾, Bonner⁽¹⁵⁾), e in particolare, sui gruppi sulfidrilici delle deidrogenasi (Thimann⁽¹⁶⁾). Un'interessante conseguenza dei risultati qui esposti, se si accetta l'ipotesi che il fenomeno di interazione osservato *in vitro* sia alla base dell'azione *in vivo* dell'auxina e delle antiauxine, consiste nel fatto che i rapporti tra questi due tipi di sostanze verrebbero ad essere in certo qual modo invertiti; infatti l'auxina, di per sé, lungi dal rappresentare un attivatore diretto di particolari reazioni cellulari (nel senso, ad esempio, in cui lo sono i coenzimi) agirebbe, in realtà, soltanto in virtù di una sua azione disinibente di fronte a sostanze capaci di controllare, mantenendola su livelli ridotti, l'attività potenziale di determinati meccanismi fisiologici: in altri termini, la funzione dell'auxina nella cellula vivente sarebbe inscindibilmente legata alla presenza di antiauxine, naturali, in assenza delle quali non potrebbe in alcun modo esplicarsi.

(14) B. COMMONER and K. V. THIMANN, « Jour. Gen. Phys. », 24, p. 279 (1941).

(15) J. BONNER, « Amer. Jour. Bot. », 36, p. 429 (1949).

(16) K. V. THIMANN and W. D. BONNER, (« Proc. National Acad. of. Sc. », 35, p. 272 (1949).

Entomologia. - *Sulla formazione di spermatofori in un Coleottero Tenebrionide della Tripolitania* (*). Nota di GIORGIO FIORI, presentata (**) dal Corrisp. G. GRANDI.

Nello scorso aprile mi recai in Tripolitania, inviato dall'Istituto di Entomologia della Università di Bologna, per proseguire le ricerche già intraprese in Algeria nella primavera del 1953 sulla entomofauna deserticola, ed ebbi modo di studiare nello « Uádi Sofeggin » non molto lontano da Mízda, le modalità di accoppiamento del Coleottero Tenebrionide *Pimelia angulata Confalonierii* Grid. con la formazione di un vistoso spermatoforo. In questa Nota espongo i principali reperti che ho messo in luce sulla meccanica di emissione dello spermatoforo e sulla costruzione dello stesso nelle vie genitali femminili, facendo precedere una brevissima rassegna di quanto oggi si sa sull'argomento negli Artropodi in generale e nei Coleotteri in particolare. Il lavoro completo con i risultati interamente elaborati ed esposti verrà pubblicato nel « Bollettino dell'Istituto di Entomologia dell'Università degli Studi di Bologna ».

La formazione di spermatofori, cioè di ammassi di spermatozoi o di spermatodesmi rinchiusi entro un involucro secreto dalle ghiandole accessorie, è conosciuta per un grande numero di specie di Artropodi e di gruppi affini. Ricordiamo gli Onicofori (*Peripatus* Guilding e *Peripatopsis* Pocock), i Crostacei (alcuni Copepodi e vari Malacrostaci dei gruppi degli Eufausiacei e dei Decapodi), gli Aracnidi (Pseudoscorpionidi e pochi Acari), infine parecchie specie di Chilopodi. Negli Insetti gli spermatofori sono stati riscontrati fra i Tisanuri, gli Odonati, i Blattoidei, i Mantoidei, i Fasmioidei, gli Ortotteri, Celiferi ed Ensiferi, quasi sicuramente in alcuni Mallofagi, in pochi Emitteri, in vari Neurotteri, Tricotteri e Lepidotteri, in pochissimi Coleotteri ed in alcuni Imenotteri. D'altro canto però nei gruppi sopracitati esistono specie che nell'accoppiamento trasmettono alla femmina sperma libero ed altre, in numero enormemente elevato, di cui non si conoscono i comportamenti. Per di più si è trovato che entità affini, aventi l'apparato di copulazione maschile morfologicamente quasi uguale, differiscono per le modalità di trasmissione dello sperma: alcune infatti emettono spermatofori altre no.

La costruzione, l'emissione, la messa a posto e la struttura degli spermatofori si presentano assai vari nel mondo degli Artropodi. Per darne una idea, dirò che lo spermatoforo può venire costruito prima o durante l'accoppiamento, integralmente fuori od in parte entro il corpo del maschio; che può essere abbandonato in luoghi frequentati dalla femmina, lontano o

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Entomologia della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

vicino ad essa ed in modo che possa venire successivamente da questa raccolto, ovvero deposto su qualsiasi parte del corpo della compagna (nel quale caso lo sperma giunge alle uova attraverso a un foro, eseguito, allo scopo, nel territorio del tegumento sottostante alla deposizione); su aree definite del corpo della femmina, vicino alla apertura genitale, od in tasche esterne costruite da territori modificati di urosterni, o fra speciali scleriti, od infine parzialmente o totalmente entro le vie genitali femminili. Nel primo di questi due ultimi casi, gli spermatofori risultano ancorati all'entrata del gonodotto e pertanto in gran parte esterni; nel secondo (il più specializzato) completamente interni e racchiusi od entro la spermateca od entro la borsa copulatrice.

Le operazioni mediante le quali lo spermatoforo viene introdotto nel corpo della femmina sono generalmente compiute dall'organo copulatorio maschile che in rari casi può essere sostituito da speciali appendici addominali. Oltre ciò la femmina può comportarsi diversamente trattenendolo definitivamente o temporaneamente. Da ultimo conosciamo spermatofori estremamente semplici ovvero molto complicati forniti di una o più cavità, ed infine nudi o rivestiti da uno speciale strato di sostanza gelatinosa (« spermatophylax »).

Per quanto riguarda i Coleotteri non si è saputo nulla di sicuro fino al 1924, anno in cui A. Cros trovò spermatofori in vari Tenebrionidi, in alcuni Scarabeidi Cetonini, in un Alleculide ed in un Meloide ed E. Korschelt studiò, nel *Dytiscus marginalis* L., la struttura e le modalità di costruzione e di messa a posto di uno spermatoforo che viene fabbricato e sistemato, all'esterno delle vie genitali femminili, in una tasca speciale le cui pareti risultano formate dagli ultimi urosterni e dalle relative membrane intersegmentali. Successivamente questo metodo di trasmissione dello sperma fu riscontrato anche da K. Rittershaus (1927) in altri Scarabeidi, un Melolontino e due Rutelini, e da altri autori in un Carabide ed in due specie di Birridi del medesimo genere.

Da quanto riferito appare evidente che le ricerche in materia ed a riguardo dei Coleotteri non sono molte, che quelle esistenti non risultano sempre precise e complete, e che infine le conoscenze sull'intimo meccanismo di formazione e di messa a posto degli spermatofori sono scarsissime.

Prima di parlare dell'accoppiamento della *Pimelia angulata Confalonierii* Grid. e delle complesse attività che portano a completare lo spermatoforo entro le vie genitali femminili, mi tratterò brevemente sulla struttura dell'apparato riproduttore maschile e femminile dell'insetto, nonché su quella dello spermatoforo completamente costruito.

L'apparato riproduttore maschile della nostra *Pimelia* risulta formato da due voluminosi testicoli costituiti da numerosissimi (circa un migliaio ciascuno) follicoli spermatici ovoidali da gracili e lunghi deferenti che si allargano in una vescicola seminale allungata poco prima di sfociare nelle mesadenie e vicinissimo al loro sbocco, da due ectadenie bene sviluppate e con

l'estremità avvolta a spirale, da due mesademie lunghe ed aggomitolate, da un eiaculatore fornito di una poderosa muscolatura ed infine da un fallo di piccole dimensioni.

L'apparato riproduttore femminile possiede due vistosissimi ovari con brevi e scarsi (poco più di una quarantina ognuno) ovariooli, due ovidutti laterali che si allargano in un voluminoso calice, un ovidutto comune che presenta una lunga vagina ed una grande borsa copulatrice, nella porzione distale della quale si apre, con un breve canale, una lunga e sottile glandola.

Lo spermatoforo completamente formato è costituito da un lunghissimo peduncolo, di 90-95 mm. circa di lunghezza e da un ampolla uniloculare, contenente lo sperma, che misura in media intorno ai 13 mm. di lunghezza ed ai 3 mm. di larghezza. Le dimensioni di tutto il complesso appaiono certamente vistose se si pensa che una femmina di normale statura è lunga 22-25 mm.

La *Pimelia angulata Confalonierii* Grid. è una abitatrice delle sabbie dunose ed attiva solamente durante il giorno nelle ore in cui la temperatura ambiente è mite. Quasi solamente verso il tramonto si accoppia, ed il maschio, dopo avere seguito la femmina per breve tempo, le sale sul dorso ed estroflette parzialmente gli ultimi due uriti ed il fallo. La femmina evagina poco dopo il penultimo urite, mantenendo l'ultimo introflesso al precedente ed avvolto a manicotto dalla lunghissima membrana intersegmentale, in modo che l'apertura anale ed il gonotrema appaiano all'esterno. Il maschio introduce allora il fallo all'inizio della vagina ed incomincia subito la emissione dello spermatoforo che ha forma iniziale di tubolino. La coppia intraprende a questo momento una lenta passeggiata, percorre due o tre ed anche cinque metri, e durante la quale il maschio aiuta nel procedere la compagna con le zampe posteriori e completa la costruzione dell'involucro dello sperma all'interno delle vie genitali femminili. Spesso questa passeggiata iniziale s'interrompe per breve tempo quando si ha la compressione dello sperma nella porzione terminale del tubolino, ma riprende poi successivamente per cessare tuttavia poco dopo. Il maschio si lascia allora cadere dal dorso della femmina che continua a camminare trascinandosi dietro il compagno supino sulla sabbia fino a che il peduncolo, ancora collegato col fallo, si libera da quest'ultimo. Le sostanze che servono a costruire lo spermatoforo vengono secrete dall'epitelio delle ectadenie e si raccolgono in una massa ovalare e compressa, situata un poco più distalmente della metà della lunghezza della glandola stessa. Questa massa risulta formata da due diverse sostanze, una di natura elastica, diafana e subtrasparente, l'altra (in quantità notevolmente minore), plastica e di color bianco latteo. Da essa parte un filamento laminare costituito da una vistosa fascia mediale della sostanza elastica, fiancheggiata da due straterelli formati dal materiale plastico. Uno di questi due straterelli appare più spesso dell'altro. Il filamento percorre tutta la glandola e giunge nell'eiaculatore dove si accosta a quello proveniente dalla

glandola antimerica. Qui i due filamenti si dispongono a V rovesciato, con i rispettivi margini di sostanza bianca più spessa a contatto. Essi vengono intimamente accostati e plasmati dall'azione della fortissima muscolatura dell'eiaculatore in modo da costituire un'unico cordone composto da tre strati: uno centrale di sostanza plastica, un intermedio avvolgente il primo molto più spesso e costituito da sostanza elastica, infine uno esterno, sottilissimo, del medesimo materiale del primo strato. Terminata la contrazione muscolare dello eiaculatore che ha portato alla formazione del suddetto cordone, questo aumenta di diametro raccorciandosi, e forma così un tubolino elastico con le pareti spalmate internamente ed esternamente dalla sostanza bianca e con lo strato esterno straordinariamente sottile. Il tubolino così formato, costituisce il primo abbozzo dello spermatoforo; è chiuso al suo inizio, si allunga gradualmente per continuo apporto di materiale dalle ectadenie e per l'attività della muscolatura dell'eiaculatore e giunge nell'endofallo. Qui incontra una successione di diverse formazioni sclerificate, ed allora, dapprima viene incanalato su fitte listerelle sclerificate, un poco rilevate e longitudinali che lo guidano, impedendo che si attorcigli a cavatappi, poi prosegue su brevi banderelle a superficie denticolata, che si susseguono longitudinalmente per breve tratto, e che provocano un temporaneo suo arresto. In seguito, per ciò che si è detto e sotto la spinta della sua porzione che si viene a poco a poco formando nell'eiaculatore ed in funzione della elasticità del materiale che in massima parte lo compone, aumenta di diametro ed in conseguenza allarga la sua cavità interna. Il tubolino così sistemato giunge innanzi al fallotrema saldamente chiuso ed incontra altre formazioni spiniformi sclerificate, inizialmente brevi poi lunghette, rivolte verso il lume dell'endofallo ed un poco cefalicamente (a fallotrema aperto esse sono rivolte invece caudalmente e non ostacolano il passaggio del tubolino), che provocano in funzione dell'arresto del tubolino stesso, dell'aumento del diametro della sua cavità interna e della spinta a tergo, la introflessione del suo apice distale. La porzione introflessa aumenta gradualmente in lunghezza e si dispone come una serpentina, raggiungendo una lunghezza poco superiore a quella che avrà la vescicola dello spermatoforo definitivamente formato. Terminata l'introflessione, si apre il fallotrema, ed il tubolino abbandona il fallo con la sua porzione invaginata, strettamente compressa tra le sue pareti ora non più dilatate. Comincia in questo momento una nuova fase del completamento dello spermatoforo, quella dell'introduzione dello sperma, fino allora contenuto nelle vescicole seminali, nella cavità del tubolino e dell'allungamento di quest'ultimo. Le vescicole seminali sfociano nella porzione prossimale delle mesadenie presso al loro punto di sbocco, che è situato vicino, cefalicamente ed un poco ventralmente al punto in cui partono, dall'eiaculatore le ectadenie. Il secreto delle mesadenie che, nella porzione prossimale della glandola vicino allo sbocco delle vescicole spermatiche, si trova frammisto a spermatozoi, è un liquido che con tutta probabilità serve a dissociare gli spermatozoi ed a rendere l'insieme un poco fluido in modo che siano facilitati i processi di compressione dello stesso entro il tubolino.

Esso potrebbe altresì rappresentare un materiale trofico per lo sperma stesso. Questo ultimo, appena abbandona le vescicole seminali si rifornisce del liquido secreto dalle mesadenie e giunge nell'eiaculatore vicino al punto in cui i filamenti provenienti dalle ectadenie si dispongono a V rovesciato. Cessano all'ora, per un momento le contrazioni muscolari che plasmano le due lamine nel cordone, si forma il già ricordato tubolino la cui cavità interna si apre nel punto dove queste incominciano a modificarsi e lo sperma può, incanalato dalla disposizione a V delle stesse, essere spinto dalla muscolatura dello eiaculatore entro il tubolino medesimo. Così con l'alternarsi delle due azioni, formazione di un tratto di tubolino ed immissione in esso dello sperma, si giunge a poco a poco all'ultima fase. Infatti il tubolino dopo avere abbandonato il fallo, si allunga, aumenta di diametro assottigliando le sue elastiche pareti, si mantiene rigido in funzione della pressione esercitata sullo sperma al momento della introduzione, e raggiunge la sua definitiva lunghezza. La muscolatura dell'eiaculatore può esercitare allora ed in pieno la sua forza sullo sperma, in modo che la porzione distale del tubolino, invaginata fino dalle prime fasi della costruzione dello spermatoforo ed ora non più strettamente rinchiusa dalle pareti dello stesso per l'avvenuto aumento di diametro, si estroflette. Essa sotto una nuova breve, ma violenta, compressione dello sperma, si dilata a vescicola e lo sperma la riempie svuotando conseguentemente la retrostante parte che prende il nome di peduncolo. Lo spermatoforo è così completo.

Non resta ora che chiarire come e dove lo spermatoforo viene sistemato nelle vie genitali femminili. Ho già riferito che il maschio immette il fallo agli inizi della vagina, per un modesto tratto, e che inizia subito l'emissione del tubolino. Questo, favorito dalla sua rigidità, penetra nella vistosissima borsa copulatrice, si allunga a poco a poco, si attorciglia varie volte su se stesso a cavatappi e raggiunge la porzione cefalica di detto organo. Dopo di ciò si piega quasi sempre verso la parte posteriore, avanza fino a metà lunghezza dell'organo che lo contiene e si ripiega infine dirigendosi nuovamente in avanti. In questo momento viene evaginato il tratto distale introflesso del tubolino più volte nominato, che si dilata a vescicola allargando vistosamente la borsa copulatrice e comprimendo il peduncolo nella porzione caudale della stessa. Lo spermatoforo così sistemato, conserva la sua integrità per breve tempo dopo l'accoppiamento. In seguito le sue pareti cominciano a disgregarsi per probabile azione del secreto della glandola che sbocca nella borsa copulatrice e lo sperma viene così liberato dall'involucro ed è possibile la fecondazione delle uova.

Entomologia. — *Influenze esercitate dalla vittima sul parassita nella simbiosi antagonistica « Pterophorus microdactylus » Hbn. (« Lepidoptera Pterophoridae ») e « Phytomyptera nitidiventris » Rond. (« Diptera Larvaevoridae »)*^(*). Nota di EGIDIO MELLINI, presentata ^(**) dal Corrisp. G. GRANDI.

Negli studi sui parassiti, ed in particolare nelle indagini sulle interazioni che vengono ad instaurarsi nelle simbiosi antagonistiche, si è troppo spesso trascurato di esaminare quelle eventuali influenze di ordine fisiologico che l'ospite può esercitare sul parassita. Ciò è vero specialmente a riguardo di quel ciclopico raggruppamento di organismi che sono gli Insetti ed in particolare dei Larvevoridi, grande famiglia di Ditteri Ciclorafi comprendente forme esclusivamente parassite.

Durante le ricerche da me effettuate sull'etologia del Lepidottero Pteroforide, *Pterophorus microdactylus* Hbn., e di un suo parassita, il Dittero Larvevoride *Phytomyptera nitidiventris* Rond., la pubblicazione dei cui risultati è imminente nel « Bollettino dell'Istituto di Entomologia dell'Università di Bologna », ho avuto modo di potere compiere osservazioni nel senso ora prospettato. Esse formano qui oggetto di una Nota separata stante il loro interesse e le nostre scarse conoscenze sull'argomento che investono. Per una migliore comprensione tratto dapprima brevemente dell'etologia dei due insetti quindi passo ad illustrarne gli intimi rapporti.

Il *P. microdactylus* Hbn. è una specie monofaga che compie il suo ciclo sull'*Eupatorium cannabinum*, Composita vegetante in ambienti molto umidi. Presenta praticamente due generazioni annuali, la 1^a galligena nello stelo e nei rametti e la 2^a antofaga. L'ibernamento è sostenuto dalle larve mature della 2^a generazione, rifugiate in cunicoli appositamente scavati nello stelo e nei rametti della pianta ospite, e da una grossa aliquota di larve, pure mature, della 1^a generazione rimaste in diapausa nelle galle. Nell'ultima decade di aprile il pteroforide comincia ad incrisalidarsi e durante tutto maggio, e nella 1^a metà di giugno, sfarfallano gli adulti. Le uova vengono deposte sulle foglie e sullo stelo della pianta ancor giovane. Le larve neonate migrano sullo stelo nel quale penetrano, di preferenza a livello dei nodi, inducendovi la formazione di una galla. Esse abbisognano per il loro sviluppo di tessuti teneri e molto ricchi di acqua, condizioni queste che si trovano realizzate nella metà alta della pianta in accrescimento, che è appunto quella attaccata. Divenute mature, dai primi di giugno in poi, le larve impupano od entrano in diapausa, in proporzione a un dipresso uguali. Nell'ultima decade di giugno hanno inizio gli sfarfallamenti che, raggiunta la punta massima

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Entomologia dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

verso la metà di luglio, si continuano in seguito con qualche sporadico caso fino a mezzo settembre. Le larve della 2ª generazione, dalla 2ª decade di luglio a tutto agosto, si evolvono sulle infiorescenze ed una volta mature le abbandonano per scavare nei rametti e nello stelo brevi gallerie in cui trascorrono l'inverno.

Alcune caratteristiche fondamentali di questo pteroforide meritano ora di essere sottolineate per meglio comprendere il suo ciclo e quello correlato del parassita. Le larve del *P. microdactylus* Hbn. risultano morfologicamente adattate ad una vita endofitica e fisiologicamente legate per il loro sviluppo, come si è dianzi accennato, ad organi molto idratati. Ora, essendo tutte le varie fasi della vita del lepidottero notevolmente scalate nel tempo, ne consegue che le ultime falangi della 1ª generazione vengono a svilupparsi in tratti di stelo o di rametto in via di lignificazione o già lignificati; le galle perciò sono in questi casi poco appariscenti o addirittura assenti e le relative larve risultano, una volta mature, di dimensioni progressivamente minori. Nella 2ª generazione poi, che si evolve nelle infiorescenze, in un ambiente cioè ben poco dotato nei riguardi delle esigenze del *Pterophorus*, le dimensioni risultano ulteriormente ridotte e le larve mature, decisamente nane, sono, in rapporto volumetrico, pari a circa $1/3$ di quelle galligene nello stelo. In dipendenza di quanto sopra esposto, o meno, è un fatto che una buona metà delle larve della 1ª generazione, una volta mature, entrano in diapausa. È importante precisare che tale stato di quiescenza non è per tutte le larve irrevocabilmente fissato fino alla primavera successiva; alcune di esse infatti possono o prima o poi, nella 2ª metà dell'estate, incrisalidarsi.

La *Phytomyptera nitidiventris* Rond. è un larvevoride anch'esso ben poco noto nella sua etologia ma d'altronde segnalato a più riprese come parassita di diverse specie di lepidotteri di varie famiglie e particolarmente di Tortricidi. Delle due generazioni del *Pterophorus* esso attacca soltanto la 1ª; la 2ª, che come si è detto è rappresentata da forme nane e quindi tale da rappresentare una massa nutritizia del tutto inadeguata per lo sviluppo del dittero, che appena di misura può evolversi sulla 1ª, risulta costantemente indenne. Il dittero iberna allo stato di larva immatura nella fase iniziale della 2ª età nel lacunoma dell'ospite, incapsulata nell'esuvia della 1ª età da cui sporge brevemente con l'avancorpo e ancorata mediante un minutissimo imbuto respiratorio al tegumento della vittima. In aprile, allorquando la massa residuale delle larve di 1ª generazione del *Pterophorus* si appresta, congiuntamente alle larve ibernanti della 2ª generazione, ad incrisalidare, il larvevoride riprende l'accrescimento, interrotto alla fine della precedente primavera, ed in breve raggiunge la maturità, divorando integralmente i visceri della piccola larva ospite che, fino a quel momento, non aveva mostrato minimamente di risentire la presenza del parassita. La *Phytomyptera* impupa entro il dermascheletro della vittima ed una decina di giorni dopo sfarfallano gli adulti.

È d'uopo precisare che anche gli sfarfallamenti del dittero come quelli del lepidottero si protraggono lungamente nel tempo. Le femmine parassitizzano i bruchi ancor giovani della 1ª generazione dell'ospite che si sta evol-

vendo negli steli e nei rametti e le loro larve neonate, penetrate che siano nel corpo del *Pterophorus*, mantengono l'estremità caudale a contatto con l'esterno attraverso il foro di penetrazione, attorno al quale il tegumento della vittima ben presto differenzia un piccolo tubo che ancora il parassita per tutta la durata del suo accrescimento. Le larvette della *Phytomyptera* subiscono la 1^a muta di regola allorché le larve ospiti entrano nell'ultima età. In seguito il loro sviluppo può arrestarsi o proseguire con uguale probabilità. Gli adulti sfarfallati, i quali, da quanto detto, rappresentano circa la metà della massa totale dei parassiti, finiscono per riversarsi su altri lepidotteri (parassitismo asincrono). La *P. nitidiventris* Rond. compie adunque, su *P. microdactylus* Hbn., una generazione all'anno, con ibernamento allo stato di larva della 2^a età e con parziale sfarfallamento primaverile-estivo di adulti che si disperdono però su altre vittime.

Dall'esame comparato dei cicli dei due insetti appare evidente che il ritmo di sviluppo del parassita è dominato da quello dell'ospite. Si è detto che circa una metà delle larve mature di 1^a generazione del *Pterophorus* entra in diapausa in piena buona stagione, mentre dall'altra metà sfarfallano normalmente gli adulti del lepidottero e quelli del dittero parassita. Analogamente le larve quiescenti sono in parte parassitizzate ed in parte nò. Nella primavera seguente pertanto da tale massa residuale emergeranno adulti della vittima e adulti del parassita secondo i casi. Non solo, ma la diapausa del gruppo quiescente di 1^a generazione del pteroforide non risulta rigidamente fissata per tutte le larve fino all'aprile dell'anno successivo: una piccola percentuale di esse infatti durante l'ultimo scorcio di luglio, l'agosto, e la 1^a metà di settembre, può tendere, prima o poi, ad impuparsi, e così si assiste a sporadici sfarfallamenti del lepidottero, e di pari passo del dittero parassita. Se infine si considera, prima che abbiano inizio gli sfarfallamenti, alla fine della primavera, ed in autunno, allorquando gli sfarfallamenti sporadici sono terminati e la diapausa è oramai definitiva, il rapporto tra il numero delle larve di 1^a generazione non parassitizzate e quello delle larve che lo sono, si nota che esso non varia. Tutto ciò significa che il pteroforide entra o non entra in diapausa indipendentemente dalla presenza del parassita ed anzi che l'arresto dello sviluppo di questo dipende proprio dalla diapausa dello ospite e che l'ininterrotto o ripreso accrescimento del larvevoride è determinato dalla mancanza o dall'abbandono dello stato di quiescenza nella o da parte della vittima. Che l'inibito accrescimento della *Phytomyptera*, la quale pure dispone di tutto il pabulum necessario per raggiungere la maturità e si trova in piena buona stagione, sia dovuto alla diapausa del *Pterophorus* è anche dimostrato dal fatto che in larve quiescenti di quest'ultimo condotte durante l'estate naturalmente o sperimentalmente a lenta morte lungo il periodo della loro progressiva decadenza lo sviluppo del parassita non rimase minimamente influenzato ed il dittero finì col soccombere qualche giorno dopo la morte dell'ospite.

Quale sia il meccanismo mediante il quale questo parassita entri in diapausa, conseguentemente a quella dell'ospite, non è possibile per ora stabi-

lire con sicurezza. Una delle ipotesi che si possono formulare è che gli ormoni⁽¹⁾ che governano lo sviluppo del lepidottero possano passare dal lacunoma di questo a quello del parassita attraverso il tegumento di quest'ultimo, estremamente sottile e permeabile, e che tali sostanze, direttamente (è stata dimostrata in alcuni casi la non specificità di certi ormoni, ad esempio, secondo Wigglesworth, 1948, quello «gonadotropo» dei corpi allati) o indirettamente (stimolando cioè il meccanismo umorale proprio del dittero) finiscano con l'agire sul ritmo di sviluppo del parassita nello stesso senso in cui regolano quello della vittima. Tale intima dipendenza dell'accrescimento del larvevoride da quello del pteroforide, e più precisamente lo stato di diapausa indotto da questo sul primo, diapausa probabilmente derivata al fitofago dal contrasto tra le sue esigenze trofiche ed il ciclo della pianta cui è infeudato da una stretta monofagia, è quello che ha permesso al dittero di legarsi a tale ospite stabilmente ed in modo definito con una generazione all'anno. Se il lepidottero non avesse presentato simile fenomeno o questo non fosse stato a sua volta indotto sul parassita, il *Pterophorus* sarebbe rimasto per la *Phytomyptera* soltanto una vittima saltuaria e del tutto casuale.

Ho voluto porre in evidenza questo interessante caso di dominanza esercitata dall'ospite sul parassita poiché, come ho premesso, esso investe un campo di ricerca molto trascurato e pur tuttavia di estremo interesse per le nostre conoscenze di biologia generale, sia a riguardo del parassitismo, sia a quello della diapausa.

Salt, per gli insetti, fece una dozzina di anni fa⁽²⁾ il punto delle nostre conoscenze sugli effetti esercitati dalle vittime sui loro parassiti sintetizzando in alcuni paragrafi le frammentarie notizie al riguardo. Per ciò che concerne i Larvevoridi trovo citati alcuni casi che dimostrano l'effetto più generale ed intuitivo che ha la mole dell'ospite sulle dimensioni del parassita, e più intimamente le ripercussioni nella proporzione delle parti e la fecondità. Sugli effetti di ordine più squisitamente fisiologico, nei quali rientra il caso da me riportato, sono citati alcuni reperti che rivelano per certe specie polifaghe come, in generale, la velocità di sviluppo del parassita sia legata a quella dell'ospite. Infine altre osservazioni condotte sulla *Compsilura concinnata* Mg.

(1) Il concetto che la diapausa negli insetti sia determinata da uno speciale giuoco ormonico, con ogni verosimiglianza indotto da particolari condizioni ambientali in senso lato, è stato di recente convalidato e generalizzato, dopo uno studio critico dell'abbondante bibliografia sull'argomento, da Bodenheimer il quale appunto scrive: «We can visualise today quite easily, even if many points still remain obscure, that diapause is induced by exterostimulation which change the activity of various incretory glands, and which switch thereby over the normal metabolism into another phase of different intensity and quality». F. S. BODENHEIMER. *Arrested development and arrested activity in Insect life.* Trans. Ninth Int. Congr. Ent., Amsterdam, vol. 1, pp. 21-40 (1952); cfr. p. 39). Per una trattazione più approfondita del determinismo delle diapause cfr. G. GRANDI, *Introduzione allo studio dell'Entomologia*, 2 voll., Bologna 1951.

(2) G. SALT, *The effects of hosts upon their Insect parasites.* «Biol. Rev. Cambr. Philos. Soc.», Cambridge, vol. 16, n. 4, pp. 239-264 (1941), 6 figg., 7 tavv.

da Pantel (1910), Thompson (1910), Webber (1937) e riportate nella citata Memoria di Salt, portano a farci riconoscere la possibilità d'induzione dello stato di diapausa da parte dell'ospite sul parassita. Ora i fatti da me sopra illustrati dimostrano inequivocabilmente questo fenomeno. È quindi accertato che in questo caso, come certamente accade in molti altri di parassitismo protelico, la vittima anziché risultare una sorta di organismo sostanzialmente passivo di fronte al parassita endofago possa invece influire col suo ambiente interno su di questi e determinarne indirettamente, cioè per via umorale, sincronizzandolo, il ritmo di sviluppo.

Fisiologia. — *Modificazioni post-tetaniche di alcune proprietà funzionali del muscolo* (*). Nota di FRANCESCO INFANTELLINA, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

La modificazione della tensione muscolare che compare dopo stimolazione tetanizzante, si accompagna a un abbassamento reversibile del potenziale di riposo del muscolo [Brown e von Euler⁽¹⁾]. Date le relazioni che esistono tanto tra polarizzazione ed eccitabilità in funzione del tempo [Cardot e Laugier⁽²⁾] quanto tra polarizzazione e impedenza [Dubuisson^(3,4,5), Monnier⁽⁶⁾, Dubuisson e Vandervael⁽⁷⁾], si poteva pensare che il tetano fosse seguito da variazioni della cronassia e della permeabilità del muscolo.

Da mie ricerche precedenti [Infantellina⁽⁸⁾] risulta che nel preparato N.ischiatico-M.gastrocnemio di Rana, il grado e la durata del potenziamento post-tetánico variano col variare della durata del tetano. Con le presenti ricerche ho esaminato il comportamento della cronassia, della impedenza e della polarizzazione del muscolo, dopo tetani di durata crescente.

Le ricerche sono state eseguite sul preparato N.ischiatico-M.gastrocnemio di *R. temporaria* e *R. esculenta*⁽⁹⁾. Veniva stimolato il nervo con scariche di condensatori (capacità = 1 μ F; voltaggio di carica = V 2): la frequenza degli stimoli era di 24 al secondo. La durata del tetano variava da 1 a 20 sec, cioè il numero degli stimoli cresceva da 24 a 480. Per la misurazione della cronassia muscolare ho usato l'apparecchio di Pupilli e

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) G. L. BROWN a. U. S. VON EULER, « J. Physiol. », XCH, 39 (1938).

(2) H. CARDOT et H. LAUGIER, « C. r. Soc. Biol. », LXXVI, 249 (1914).

(3) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », XXXVII, 35 (1933).

(4) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », XXXVIII, 85 (1934).

(5) M. DUBUISSON, *Les ionogrammes de la contraction musculaire*. Paris, Hermann (1934).

(6) A. M. MONNIER, *L'excitation électrique des tissus*. Paris, Hermann (1934).

(7) M. DUBUISSON et F. VANDERVAEL, « Arch. int. Physiol. », XL, 173 (1934).

(8) F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XXXVII, 197 (1953).

(9) Nei precedenti esperimenti ho adoperato *R. temporaria*: in questa specie il fenomeno del *ppt* si svolge come in *R. esculenta*.

Lucchini ⁽¹⁰⁾; per quella del potenziale di riposo del muscolo mi sono servito dell'elettrometro a due triodi di Dubuissou e Debot ⁽¹¹⁾, disponendo gli elettrodi impolarizzabili (di Ag-AgCl) in posizione tendine-ventre muscolare. Ho determinato i valori dell'impedenza trasversale del muscolo, per correnti a bassa frequenza (2000 cicli/sec), mediante un apparecchio costruito essenzialmente sullo schema proposto da Dubuissou ^(4, 12); ho adoperato gli elettrodi descritti da Dubuissou ⁽⁴⁾, con quegli accorgimenti che l'A. ha suggeriti.

Le esperienze sono state eseguite mantenendo costantemente il preparato neuromuscolare in camera umida e alla temperatura di 18°-20°C.

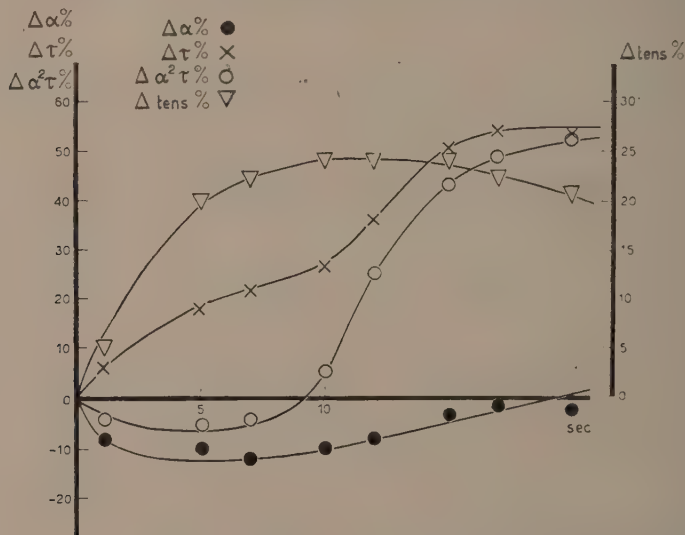


Fig. 1. - Da esperimenti eseguiti sul preparato N. ischiatico-M. gastrocnemio di Rana. Curve della variazione percentuale della rebase ($\Delta\alpha\%$), della cronassia ($\Delta\tau\%$), del prodotto (rebase)² × cronassia ($\Delta\alpha^2\tau\%$) e della tensione del muscolo ($\Delta tens\%$) in funzione della durata della stimolazione tetanizzante. La curva $\Delta tens\%$ è riportata dal l. c. 8. Stimolazione tetanizzante indiretta ottenuta mediante scariche di condensatore. Frequenza degli stimoli = 24 al sec; capacità del condensatore = 1 μF ; voltaggio di carica del condensatore = 2 V.

Il muscolo era tenuto in condizioni isometriche. Ogni singola misura veniva fatta entro i primi 30 sec susseguenti alla fine del tetano.

Nella fig. 1 si leggono le curve delle variazioni percentuali della rebase, della cronassia e del prodotto (rebase)² × cronassia in funzione della durata del tetano; vi è inoltre riportata la curva della variazione massima della tensione muscolare in funzione della stessa variabile (curva riportata dal l. c. 8). Nella fig. 2 sono riprodotte le curve delle variazioni percentuali del potenziale di riposo e della impedenza del muscolo in funzione della durata della

(10) G. C. PUPILLI e A. LUCCHINI, «Lo Sperimentale», XC, 673 (1936).

(11) M. DUBUISSON et A. DEBOT, «Arch. int. Physiol.», L, 54 (1940).

(12) M. DUBUISSON, «J. Physiol.», LXXXIX, 132 (1937).

stimolazione tetanizzante; accanto a queste curve è riportata anche la curva delle variazioni percentuali della cronassia in funzione della stessa variabile.

Dall'esame della fig. 1 si rileva quanto segue. *A)* Dopo una stimolazione tetanizzante, la reobase del muscolo si abbassa: la diminuzione percentuale della reobase si fa maggiore col crescere della durata del tetano da 1 a 7 sec, raggiungendo un massimo del 12 p. 100; per tetani di durata superiore, tale diminuzione decresce progressivamente e per stimolazione della durata di sec 20, la reobase presenta valori assai vicini a quelli pre-tetanici. *B)* Per effetto di stimolazioni tetanizzanti, i valori della cronassia sono aumentati; l'allungamento cronassico cresce progressivamente col crescere della durata di stimolazione fino a sec 15, presentando un incremento maggiore per tetani

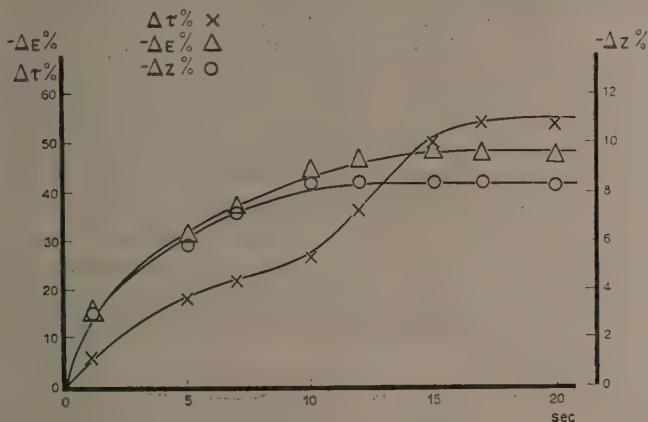


Fig. 2. — Da esperimenti eseguiti sul preparato N. ischiatico-M. gastrocnemio di Rana. Curve della variazione percentuale della polarizzazione ($\Delta E\%$), della impedenza ($\Delta Z\%$) e della cronassia ($\Delta\tau\%$) del muscolo in funzione della durata del tetano. Le condizioni sperimentali sono indicate nella legenda della fig. 1.

di durate crescenti da 10 a 15 sec; per stimolazione di durata maggiore, fino a sec 20, l'allungamento cronassico è praticamente quello medesimo che si osserva per tetani di sec 15. *C)* Il prodotto (reobase)² × cronassia è modicamente diminuito per tetani di durata crescente fino a 7 sec, mentre per stimolazioni di durata maggiore aumenta col crescere di questa.

Dalla fig. 2 risultano i fatti seguenti. *A)* Per effetto di stimolazioni tetanizzanti, il potenziale di riposo del muscolo si abbassa, la diminuzione percentuale facendosi maggiore col crescere della durata di stimolazione fino a 15 sec; per stimolazioni di durata maggiore, fino a 20 sec, l'abbassamento del livello di polarizzazione è quello medesimo che si osserva per stimolazioni della durata di 15 sec. *B)* Dopo stimolazioni tetanizzanti, la impedenza trasversale del muscolo diminuisce: la diminuzione si fa maggiore col crescere della durata del tetano da 1 a 10 sec, fino a un valore massimo a cui si mantiene per tetani di durata maggiore.

Secondo H. e E. Lassalle⁽¹³⁾, l'aumento del prodotto (reobase)² \times cronassia indica una diminuzione dell'eccitabilità del tessuto: per effetto di una stimolazione tetanizzante indiretta, l'eccitabilità del muscolo sarebbe leggermente aumentata dopo tetani di durata da 1 a 7 sec, mentre diminuirebbe progressivamente per tetani di durata maggiore.

Le modificazioni della cronassia in funzione della durata della stimolazione tetanizzante vanno esaminate in relazione con quelle della polarizzazione e della impedenza. I fenomeni descritti concordano con quanto si osserva comunemente, e cioè che l'abbassamento della polarizzazione di un tessuto eccitabile si accompagna generalmente a un allungamento della cronassia [Cardot e Laugier⁽¹²⁾] e a un aumento della permeabilità cellulare [Dubuisson^(3,4,5), Dubuisson e Vandervael⁽⁷⁾, Monnier⁽⁶⁾]. I risultati delle ricerche concernenti la opposta influenza che la permeabilità e la polarizzazione esercitano sulla eccitabilità [Lapicque e Nattan-Larrier⁽¹⁴⁾, Pupilli^(15,16,17), Lapicque⁽¹⁸⁾], inducono a ritenere che le variazioni della cronassia del muscolo per effetto della stimolazione tetanizzante, siano il risultato di due azioni opposte: una di esse va riferita alla variazione del potenziale di riposo e intesa nel senso che la diminuzione della polarizzazione importa un allungamento della cronassia, mentre l'altra è ricollegabile con la influenza diretta che le variazioni della permeabilità del tessuto esercitano sulla sua eccitabilità, nel senso che l'aumento della permeabilità importa un accorciamento della cronassia. Nelle condizioni sperimentali delle presenti indagini, l'effetto della depolarizzazione prevale su quello dovuto all'aumento della permeabilità.

La fig. 2 mostra che l'incremento dell'allungamento cronassico, susseguente al tetano, si fa maggiore per stimolazioni di durate comprese tra 10 e 15 sec: corrispondentemente si nota che entro questi limiti di durata del tetano, la depolarizzazione aumenta in funzione di tale durata, mentre la diminuzione dell'impedenza permane invariata.

Secondo quanto ho dedotto dai risultati di altre mie ricerche⁽⁸⁾, l'aumento del livello del *ppt* è limitato col crescere della durata del tetano, da un fattore antagonista, i cui effetti si rendono manifesti per le medesime durate di stimolazione tetanizzante alle quali appare subordinata la comparsa della inibizione post-tetanica. I risultati ottenuti nelle presenti indagini danno agio di fare alcune considerazioni sul significato del fattore antagonista del potenziamento. Si prendano in esame, nella fig. 1, la curva della variazione massima della tensione muscolare in funzione della durata del tetano e quella della variazione della cronassia in funzione della stessa varia-

(13) H. LASSALLE et E. LASSALLE, «Ann. Physiol. Physicochim. biol.», IV, 323 (1928).

(14) L. LAPICQUE et M. NATTAN-LARRIER, «C. r. Soc. Biol.», XCIV, 808 (1926).

(15) G. C. PUPILLI, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», VII, 68 (1932).

(16) G. C. PUPILLI, «Arch. Farmacol. sper. Sci. aff.», LV, 35 (1933).

(17) G. C. PUPILLI, «Arch. Sci. biol.», XXX, 282 (1944-45).

(18) L. LAPICQUE, *L'excitabilité en fonction du temps*. Paris, Presses Universitaires de France (1926).

bile: quando la curva della cronassia inizia la sua ascesa più ripida (cioè si fa maggiore l'incremento dell'allungamento cronassico), la curva del *ppt* comincia a scendere. È noto che stimolazioni tetanizzanti indirette, di determinate frequenze, provocano una caduta della tensione tetanica del muscolo, che è stata attribuita a mancanza parziale della trasmissione degl'impulsi dal conduttore all'effettore [Wedensky⁽¹⁹⁾, Hofmann⁽²⁰⁾, Lucas⁽²¹⁾, Davis e Davis⁽²²⁾, Feng, Lee, Meng e Wang⁽²³⁾, Rosenblueth e Morison⁽²⁴⁾]; e alla presenza di un blocco parziale, quando si cambia improvvisamente la stimolazione da diretta a indiretta o viceversa, si può dare evidenza durante il tetano anche prima che si manifesti una caduta della tensione tetanica [Brown e Burns⁽²⁵⁾]. Ora, secondo Monnier⁽⁶⁾, l'inibizione diviene molto più probabile quando i valori della cronassia del muscolo aumentano: riportandosi ai risultati delle presenti ricerche, appare lecito concludere che quando l'allungamento post-tetanico della cronassia muscolare presenta un incremento maggiore, si stabiliscono le condizioni più favorevoli alla comparsa di un blocco parziale della trasmissione degli impulsi dal nervo al muscolo, il quale blocco si manifesterebbe col dar origine alla inibizione post-tetanica.

Fisiologia. — *Sul problema dei rapporti tra nutrizione e attività del miocardio* (*). Nota di GAETANO LIVREA, presentata (**) dal Socio G. AMANTEA.

In questa Nota vogliamo delineare ed incominciare ad affrontare un problema che si è presentato ed imposto imperiosamente alla nostra attenzione nel corso di alcune ricerche sperimentali, ancora inedite, circa determinati rapporti intervitaminici e circa la detiaminizzazione da farmaci.

Alludiamo al vasto e complesso problema dei rapporti tra nutrizione e attività del miocardio. Crediamo che la sua delucidazione sia di grande importanza fisiologica, anche perché, come vedremo, consente di impostare e forse di analizzare la questione della sintesi, della conservazione e della usura dei complessi tissulari specifici del cuore.

(19) N. WEDENSKY, « Arch. Physiol. », XXIII, 687 (1891).

(20) F. B. HOFMANN, « Pflüger's Arch. », XCIII, 186 (1903).

(21) K. LUCAS, « J. Physiol. », XLIII, 46 (1911).

(22) M. DAVIS a. P. A. DAVIS, « Amer. J. Physiol. », CI, 339 (1932).

(23) T. P. FENG, L. Y. LEE, C. W. MENG a. S. C. WANG, « Chin. J. Physiol. », XIII, 79 (1938).

(24) A. ROSENBLUETH a. R. S. MORISON, « Amer. J. Physiol. », CXIX, 236 (1937).

(25) G. L. BROWN a. B. D. BURNS, « Proc. roy. Soc. », London (B), CXXXVI, 182 (1949).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma e nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

Ecco come la nostra attenzione è stata attratta dall'anzidetto problema.

Nel corso delle predette ricerche sulla detiaminizzazione da farmaci, abbiamo pensato di utilizzare anche il comportamento del quoziente beriberico (Qb) di G. Amantea. Tale assunto ci ha obbligati ovviamente a stabilire dapprima il Qb in condizioni basali e a tale scopo abbiamo seguito la tecnica appositamente fissata da G. Amantea⁽¹⁻³⁾ in modo da ottenere nella nostra indagine non solo condizioni essenziali di uniformità, ma anche quel decorso degli esperimenti così caratteristicamente costante da permettere a G. Amantea di dividere il corso del beriberi sperimentale dei colombi nelle ben note tre fasi della resistenza, della difesa e della morte.

Trattandosi di ricerche lunghe, pazienti, di necessità oculte, da ripetere più volte sullo stesso animale ad opportuna distanza di tempo (allo scopo di escludere il fattore individuale), noi, per condurle con vantaggio, abbiamo incominciato a sperimentare solo con 8 adatti colombi del nostro allevamento, ma su tutti abbiamo ripetuta ciascuna osservazione almeno 4 o 5 volte.

Ciò non solo è stato per noi di grande insegnamento, ma ci ha permesso anche alcuni nuovi rilievi; che ci hanno fatto scorgere la possibilità di nuove ricerche, soprattutto relative al comportamento del vomito per effetto della somministrazione di tiamina, al comportamento di alcuni aspetti chimici e meccanici della digestione intestinale e della capacità di assorbimento dell'intestino, sia per effetto della carenza che della somministrazione di tiamina, al comportamento della respirazione, della funzione cardio circolatoria, dell'appetito sessuale e della funzione spermatica, dell'attività riflessa spinale e posturale nella seconda fase del beriberi e infine al comportamento dell'equilibrio idrico e dei processi di secrezione e di riassorbimento nei tubuli renali nel corso dell'alimentazione orizantica con o senza tiaminizzazione.

Ai Dott. C. Inzucchi dapprima e A. Dagianti di poi, a Roma, e ai Dott. E. Di Stefano e A. Cambria, a Messina, è stato assegnato il compito di illustrare i primi risultati ottenuti sia dallo studio della presunta azione detiaminizzante di determinate sostanze, sia dalle indagini preliminari in alcuni punti degli anzidetti campi. Per altri, e fra questi quello del comportamento dell'attività cardiaca, il compito ce lo siamo assunto noi stessi.

In questa Nota incominceremo appunto con l'esporre dapprima alcuni aspetti del comportamento cardiaco dei colombi osservati nel corso del beriberi sperimentale e della successiva tiaminizzazione e subito dopo vedremo come i fatti, constatati prima incidentalmente e poi accertati in modo sicuro, con numerosi esperimenti appositamente condotti, ci abbiano indotto ad allargare le indagini in altra direzione, cioè quella dell'inanizione.

Sta di fatto che il significato, che noi credevamo e crediamo di poter attribuire ai nostri reperti non solo ci è sembrato contrastante con le comuni cognizioni sui rapporti tra tiamina e funzione del cuore e tale da indurre alla revisione di alcune delle principali conclusioni consegnate alla letteratura in proposito, ma anche ci ha fatto sentire la necessità di chiarire meglio gli effetti cardiaci dell'inanizione totale e parziale e ci ha mostrato l'opportunità e la possibilità di analizzare per questa via l'importante problema della nutrizione del cuore.

Il comprensibile grande interesse per gli argomenti, che ci stavano di fronte, ci ha deciso a fare un'analisi del tutto personale di essi, prescindendo

(1) G. AMANTEA, « Riv. di Biologia », 4 (1922).

(2) G. AMANTEA, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », 18, sez. VI, 317 (1933).

(3) G. AMANTEA, « ibidem », 18, sez. VI, 399 (1933).

dendo, per non esserne influenzati, da quanto eventualmente già avessero riscontrato altri Autori.

Ecco perché nel riportare queste nostre osservazioni, riteniamo di dover rifare con fedeltà il cammino seguito nel condurle, durante il quale ci siamo lasciati guidare soltanto e direttamente dai fatti a mano a mano ricavati. Ed ecco perché pure non trova posto in questa Nota l'abituale inquadramento bibliografico del nostro punto di partenza e dei nostri rilievi successivi, inquadramento che doverosamente ci proponiamo di fare a tempo debito nell'esteso lavoro che pubblicheremo, comprendendovi l'ampia documentazione dei fatti osservati.

In realtà noi non abbiamo avuto uno specifico punto di partenza, in quanto che, come prima abbiamo detto, il nostro intento di seguire il comportamento delle principali funzioni degli animali a dieta orizantica, e quindi anche il comportamento dell'attività cardiaca, tendeva al solo scopo di fornirci una cognizione per prova diretta di alcuni dei principali dati già acquisiti al riguardo.

E circa la funzione cardiaca, la nostra aspettativa, basata sulle cognizioni di comune dominio, era che la progrediente carenza di tiamina, consecutiva alla dieta di riso, avrebbe determinato bradicardia o, più raramente, tachicardia, le quali sarebbero poi regredite con prontezza in seguito alla somministrazione di tiamina.

In effetti, anche nei nostri colombi, dopo 9-13 giorni di dieta orizantica per imbeccamento, cioè alcuni giorni dopo l'insorgenza del vomito (il quale nei nostri casi è insorto sempre tra il 6° e il 9° giorno) e parecchi giorni prima dell'instaurarsi della polinevrite, si è insediata una bradicardia, che ha progredito col progredire della fase di difesa. Non abbiamo invece mai notato, neppure tardivamente, la rara tachicardia riscontrata da qualche autore soprattutto nei mammiferi da laboratorio. Inoltre, in genere precocemente e soltanto più di rado tardivamente, cioè allorquando il cuore aveva raggiunto o stava per raggiungere le più basse frequenze (in certi casi si possono raggiungere i 90-70 battiti al minuto), abbiamo osservato spessissimo irregolarità del ritmo, la quale non era legata col respiro ed aveva la peculiarità di comparire e scomparire spesso nel corso del giorno e ogniquale volta si faceva eseguire all'animale un piccolo movimento, oppure lo s'impressionava o maneggiava anche dolcemente. Anzi in conseguenza di queste manovre si poteva osservare che la bradicardia trapassava in tachicardia della durata di qualche minuto, cui poteva seguire, talvolta con un certo ritardo, una bradicardia e un'aritmia più marcata.

In sintesi, anche noi abbiamo potuto osservare che, per effetto della dieta orizantica, procedendo nel colombo il depauperamento di tiamina, verso l'inizio della seconda settimana, cioè nella fase di difesa secondo Amantea, in assenza di qualsiasi altro segno esteriore di polinevrite, s'insedia una bradicardia progressiva spesso con incostante aritmia.

In quanto agli effetti della somministrazione di tiamina, sulla base delle comuni cognizioni, noi ci aspettavamo che essa facesse prontamente regredire

gli anzidetti disordini, così come prontamente suole almeno per i segni nervosi del quadro beriberico.

Invece non è stato proprio così e, per dirla subito, ci è apparso un fatto costante e cioè che per ottenere la regressione dei disturbi cardiaci non era necessaria la tiaminizzazione, bensì un'adeguata somministrazione di grano.

A tale reperto noi siamo pervenuti per questa via: allorché si manifestavano i primi chiari segni nervosi del beriberi, sospendevamo la dieta orizanica, praticavamo agli animali una iniezione intramuscolare di 10 mgr di tiamina e continuavamo il controllo del loro comportamento generale e quello specifico delle principali funzioni. Ci accadeva allora di notare che mentre i disordini nervosi scomparivano, talvolta già poco tempo dopo l'iniezione, la bradicardia con o senza aritmia persisteva immutata o quasi anche dopo molte ore dall'iniezione. Il reperto non variava, sia ripetendo la somministrazione nelle 24 ore, sia raddoppiandola dal primo inizio, e ciò allo scopo di essere certi che notevoli quantità di tiamina fossero a disposizione dell'animale carenzato, sia dimezzandola o adoperando dosi appena sufficienti a far migliorare i segni nervosi, e ciò per escludere l'eventualità di un'azione bradicardizzante delle dosi elevate di tiamina.

Qualora invece permettevamo agli animali di alimentarsi ad *libitum* con grano, o se l'imbeccavamo convenientemente con grano, trovavamo che la frequenza cardiaca tendeva ad aumentare e l'aritmia scompariva talvolta già dopo qualche ora dall'assunzione dell'alimento e, dopo 12-24 ore, se la quantità di grano assunta ed elaborata era stata di una certa entità, la frequenza raggiungeva e talvolta anche sorpassava il numero di battiti per minuto primo notato nel normale stato di salute degli animali, cioè nei giorni immediatamente precedenti all'inizio della dieta di riso.

A questo punto ci siamo soffermati per trarre le prime ovvie conclusioni e, sulla base di queste, porre i primi quesiti.

La prima conclusione è stata che la bradicardia con o senza aritmia dei colombi a dieta orizanica non è di certo causata dalla sola carenza di tiamina, che da tale dieta consegue.

E poiché il disordine scompare solo con l'assunzione di una adeguata quantità di grano, è molto probabile che esso dipenda dalla carenza nell'organismo di uno o più principi nutritivi indispensabili per la normale attività del seno e del sistema di conduzione, piuttosto che dalla presenza di una sostanza, prodotta nell'organismo o derivante dal riso, capace di svolgere un effetto tossico sul seno e sul sistema di conduzione.

In ogni caso un'altra conclusione certa è che il disordine della nutrizione, che sta a base del disturbo cardiaco, è diverso dal disordine che sta a base della polinevrite beriberica.

A causa della sua maggiore apparente probabilità, noi siamo voluti partire dall'ipotesi della carenza e, in base ad essa, ci siamo poste queste domande: la carenza del principio o dei principi nutritivi è proprio inerente al riso, alimento non certo completo in protidi, lipidi, sali minerali e vitamine, oppure il disordine cardiaco consegue soprattutto allo stato di rapidamente

progrediente denutrizione determinato dal vomito, che di regola apre la seconda fase del decorso dell'esperienza, e, se non v'è paralisi dell'ingluevie o degli arti inferiori, persiste poi per tutta l'ulteriore durata della stessa?

È evidente lo stretto nesso esistente tra i due quesiti. Entrambi, difatti, presuppongono che il disturbo della funzione cardiaca stia in rapporto con uno stato di inanizione parziale. Noi, però, abbiamo preferito avviare le nostre ricerche tenendo soprattutto di vista il secondo quesito, non solo perché avevamo notato che il vomito precede di qualche giorno la bradicardia, ma anche perché, così facendo, più rapidamente potevamo renderci conto di un fatto di portata più generale, e cioè, secondo noi, non tanto il se, ma il come l'inanizione subacuta da insufficienza quantitativa e qualitativa della dieta può essere causa di modificazioni funzionali cardiache.

Il bisogno di chiarire a noi stessi questo quesito era tanto più sentito in quanto anche l'assunto in esso contenuto non trova esauriente spiegazione nella letteratura, nella quale addirittura non si è ancora appianato il contrasto se il cuore può o non resistere all'inanizione e se, al pari o all'opposto, di quasi tutti gli altri organi va o non va incontro ad importanti modificazioni funzionali ed anatomo-patologiche.

Difatti nel mentre diversi sperimentatori ⁽⁴⁻⁹⁾ dimostrano che il cuore risente profondamente dell'inanizione, da altri e in specie in alcuni manuali di fisiologia e cardiologia ⁽¹⁰⁻²²⁾ si asserisce, forse sulla base di alcuni dati di C. Voit ⁽⁹⁾, che il cuore è salvaguardato dall'inanizione.

Per stabilire l'esistenza o meno dell'anzidetto rapporto causale tra il disordine cardiaco e l'inanizione subacuta da vomito per effetto dell'alimenta-

(4) C. CHOSSAT, «Mém. Acad. Roy. Sciences», 8, 438 (1843).

(5) L. LUCIANI, *Fisiologia del digiuno*, Le Monnier, Firenze (1889).

(6) N. LAZAREFF, *Dissertation*, Warsaw (1895), citato da VAN LIERE.

(7) E. J. VAN LIERE e C. K. SLEETH, «Am. J. Physiol.», 116, 635 (1936).

(8) A. KEYS, A. HENSCHER e H. L. TAYLOR, «ibidem», 150, 153 (1947).

(9) C. VOIT, «Ztschr. f. Biol.», 2, 307 (1866).

(10) M. FOSTER, *A Textbook of Physiology*, Macmillan, New York (1895).

(11) H. VAQUEZ, *Diseases of the Heart*, W. B. Saunders, Philadelphia (1924).

(12) H. E. ROAF, *A Textbook of Physiology*, Wm. Wood, Baltimore (1936).

(13) T. R. PARSONS, *Fundamentals of Biochemistry*, Wm. Wood, Baltimore (1936).

(14) S. WRIGHT, *Applied Physiology*, Oxford Univ. Press, New York (1941).

(15) P. BARD, *Macleod's Physiology in modern Medicine*, C. V. Mosby, St. Louis (1941).

(16) C. H. BEST a. N. B. TAYLOR, *The physiological Basis of medical Practice*, Williams a. Wilkins, Baltimore (1943).

(17) W. D. ZOETHOUT a. W. W. TUTTLE, *Textbook of Physiology*, C. V. Mosby, St. Louis (1943).

(18) C. L. EVANS, *Starling's Principles of human Physiology*, Lea a. Fibiger, Philadelphia (1945).

(19) J. F. FULTON, *Howell's Textbook of Physiology*, W. B. Saunders, Philadelphia (1946).

(20) I. SPADOLINI, *Fisiologia Umana*, Utet, Torino (1946).

(21) E. HEDON, *Précis de Physiologie*, Doin, Paris (1950).

(22) B. A. HOUSSEY, *Physiologie humaine*, E. M. F., Paris (1950).

zione orizanica mediante imbeccamento, abbiamo condotto i seguenti esperimenti ⁽²³⁾.

A) Dopo aver stabilito con numerose osservazioni la frequenza normale del battito cardiaco in un gruppo di animali, già perfettamente educati a questa ricerca, li abbiamo mantenuti a dieta orizanica fino ad ottenere la comparsa dell'abituale netta bradicardia. Dopo di allora, continuando la dieta orizanica, sempre per imbeccamento ⁽²⁴⁾, abbiamo iniziato la somministrazione di dosi di tiamina atte ad arrestare il vomito e ad assicurare in tutto o in gran parte l'elaborazione del riso somministrato.

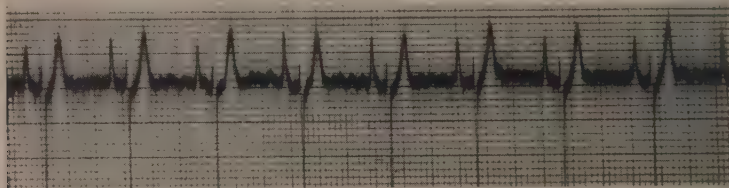


Fig. 1. - Frequenza normale.

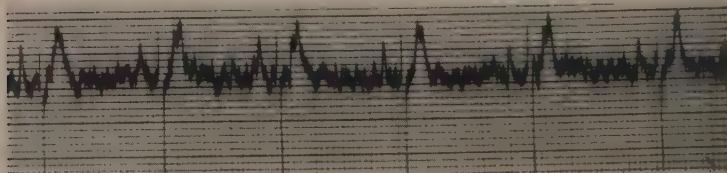


Fig. 2. - Persistenza della bradicardia da dieta orizanica dopo 2 ore dalla somministrazione di 10 mg. di tiamina.

Orbene abbiamo constatato che la frequenza cardiaca quasi raggiungeva i valori di partenza e il disordine del ritmo regrediva o scompariva già dopo 3-4 giorni di un simile trattamento, durante i quali gli animali avevano po-

(23) Ringrazio i dottori A. Cambria, A. Dagianti, E. Di Stefano e C. Zannelli, che mi hanno in vario modo coadiuvato, quando hanno seguito gli stessi miei animali per le indagini collaterali a loro assegnate.

(24) In un lavoro di A. TAORMINA (« Boll. Soc. It. Biol. », 25, 1165 (1949)), relativo alla sindrome presentata dai colombi sottoposti a ripetute e consecutive avitaminosi B1 e trattati con tiamina, si asserisce tra l'altro, che gli animali « dopo 45 minuti dalla somministrazione di tiamina » beccano avidamente il riso brillato ». Pur d'accordo con altri rilievi dell'A., non possiamo confermare questa sua osservazione. I nostri animali non hanno mai assunto spontaneamente il riso, anche dopo molte ore dalla somministrazione di tiamina e di digiuno. Invece essi beccavano sempre con avidità il grano. Tale comportamento ci sembra interessante, in quanto indicativo di una repulsione che, con G. Amantea, possiamo dire specifica per il cibo atto a mantenere lo stato di carenza, cioè il riso, alla quale si associa una fame specifica per il cibo atto a rimuovere la carenza, cioè il grano.

Il fatto poi che la repulsione persiste anche dopo molte ore dalla tiaminizzazione, farebbe pensare che tale persistenza possa essere in rapporto alla carenza complessa indotta dal riso, e poiché tale, non rimovibile con la sola tiamina.

tuto elaborare in media circa 30 gr di riso *pro die* e avevano presentato un miglioramento insignificante della perdita di peso riportata per effetto del primo periodo di dieta orizanica cioè senza somministrazione di tiamina.

Persistendo però nella dieta, dopo non molti giorni, malgrado la somministrazione anche generosa di tiamina o di cocarbossilasi ⁽²⁵⁾, il vomito è ricomparso, l'elaborazione del riso è peggiorata, lo stato di nutrizione dell'animale è stato di nuovo compromesso (pur non estrinsecandosi tale compromissione, almeno in un primo tempo, con notevoli modificazioni del peso corporeo)

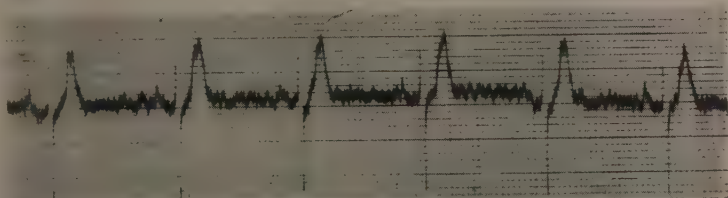


Fig. 3. - Persistenza della bradicardia dopo 24 ore dalla somministrazione di 10 mg. di tiamina.

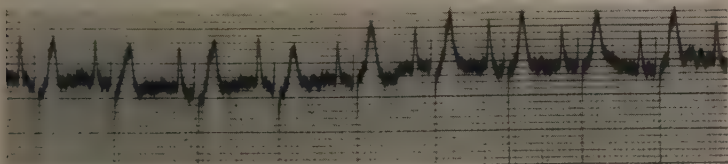


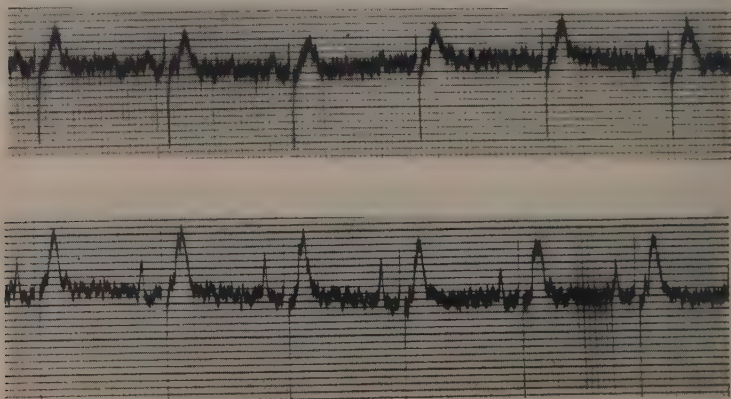
Fig. 4. - Ritorno alla frequenza normale a 24 ore dalla sola somministrazione di g. 30 di grano.

la bradicardia a mano a mano si è ristabilita ed infine, dopo circa 50 giorni di dieta, si è pervenuti ad un quadro molto complesso di alterazione regressiva generale della nutrizione ad esito mortale, caratterizzato da perdita di peso, ipotermia, bradicardia, assenza di polinevrite, anemia ipocroma progressiva ⁽²⁶⁾, leucocitosi, lieve iperglicemia, poliuria, polidipsia, edema palpebrale, flogosi purulenta congiuntivale, cheratite, desquamazione membranacea della mucosa buccale e respiratoria, ecc.

(25) La cocarbossilasi ci è stata cortesemente preparata dall'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Roma, che sentitamente ringraziamo nella persona del suo Direttore, prof. A. Rossi-Fanelli.

(26) In condizioni normali, nei nostri colombi, abbiamo riscontrato un numero di emazie oscillante strettamente intorno a 4 milioni per mmc ed un tasso di emoglobina di 80-95 %. Le cifre dei leucociti hanno oscillato invece ampiamente tra 18.000 e 30.000 circa. Pure molto variabile è stata la formula leucocitaria, soprattutto per il diverso rapporto dei neutrofili e dei monociti e linfociti. Nei colombi ad alimentazione orizanica abbiamo riscontrato invece una caduta progressiva delle emazie e del tasso di Hb ed una tendenza all'aumento dei leucociti proporzionate alla durata dell'alimentazione orizanica. La somministrazione di tiamina, o di cocarbossilasi, non ha modificato né l'anemia, né la leucocitosi.

B) Dopo aver stabilito, al solito, la frequenza normale del battito cardiaco dei colombi di un nuovo gruppo, li abbiamo mantenuti a dieta orizanaica, somministrando però ad ognuno, sin dall'inizio, 5 mgr di tiamina per via intramuscolare ogni 3 giorni. La frequenza cardiaca è rimasta inalterata per molti giorni e soltanto dopo la seconda settimana abbiamo incominciato ad osservare una lieve ma significativa tendenza alla diminuzione della frequenza. A quest'epoca il peso iniziale degli animali o era aumentato o era rimasto immutato, non v'era stato vomito (tranne che in un animale una sola volta) ed elevata era rimasta la capacità di elaborazione del riso, giudicata dalla palpazione mattutina dell'ingluvie, riscontrato quasi sempre vuoto o con lievissimo residuo del riso somministrato il giorno precedente. Insistendo nel trattamento, nel mentre la capacità di elaborazione del riso è peggiorata



Figg. 5 e 6. - Bradicardia da ipoalimentazione con grano.

apparentemente soltanto di poco e il peso corporeo è rimasto pressoché invariato, il disordine cardiaco, invece, è divenuto più marcato, pur non raggiungendo il grado di bradicardia riscontrabile abitualmente nella dieta orizanaica senza tiaminizzazione. Al principio della quinta settimana, poiché in qualche animale s'era pronunciata l'ipotermia, l'anemia ipocroma, l'alterazione dell'equilibrio idrico, ecc., per non pervenire nuovamente al quadro di alterazione regressiva generale della nutrizione dapprima ricordato, abbiamo arrestato gli esperimenti.

Le conclusioni che si possono trarre da questi esperimenti, ci sembrano essere le seguenti:

a) La condizione determinante della bradicardia con o senza aritmia dei colombi tiaminodeficienti è effettivamente rappresentata dall'inanizione, che consegue sia alla diminuita capacità di elaborazione del riso, sia e soprattutto al vomito, il quale, insorgendo nella seconda fase della dieta orizanaica e persistendo sempre più grave per tutta la durata della stessa, sottrae alla digestione e all'assorbimento quantità ognora più notevoli di alimento.

b) Aggiungendo al riso adatte dosi di tiamina o di cocarbossilasi, la bradicardia tarda a comparire, se l'addizione viene instaurata fin dal primo inizio della dieta, o regredisce, se l'addizione viene instaurata nel corso della seconda fase. Tale effetto perdura sino a quando, mercé la tiaminizzazione, si riesce ad ottenere e mantenere la cessazione del vomito e l'elaborazione di un'adeguata quantità di alimento, cioè sino a quando si riesce ad arrestare o ad attenuare il consumo dei costituenti chimici dell'organismo.

c) Poiché la somministrazione anche generosa di tiamina, o di cocarbossilasi, non basta a conferire al riso la dignità di alimento atto a sopperire indefinitamente al fabbisogno nutritivo del Colombo, insistendo in tale dieta si perviene ad un'alterazione regressiva generale della nutrizione, della quale fa parte la bradicardia ma non la polinevrite.

A sanzionare ancora meglio l'indipendenza del disordine cardiaco dalla tiamina e la sua dipendenza dall' inanizione, comunque provocata, abbiamo condotto degli esperimenti, nei quali la dieta orizanica non era affatto in questione. Precisamente, dopo aver eseguito l'abituale studio preliminare di controllo (peso corporeo, respiro, temperatura rettale, dati ematologici, glicemia) di due nuovi gruppi di Colombi, un gruppo lo abbiamo tenuto a digiuno idrico e un altro l'abbiamo ipoalimentato con grano in modo tale (20-25 gr *pro die* per imbeccamento, a seconda della taglia) da avere una perdita di peso non solo trascurabile, ma soprattutto molto lenta nel tempo, esattamente contenuta tra il 5 e l'8 % circa al 40° giorno.

Nel caso dell' inanizione totale abbiamo assistito con la rapidità propria del digiuno idrico, all'insorgenza delle manifestazioni, che in modo meno rapido eravamo abituati ad osservare nel corso dell'alimentazione orizanica: caduta del peso, abbassamento della temperatura rettale, diminuzione della frequenza respiratoria, caduta del numero delle emazie e del tasso dell'emoglobina ed aumento del numero dei leucociti e del tasso glicemico. In quanto alla bradicardia, e all'eventuale aritmia, esse sono comparse con una rapidità in genere nettamente proporzionale alle condizioni generali di partenza degli animali, nel senso che più erano depauperate le condizioni all'inizio del digiuno e più rapida è stata l'insorgenza e l'accentuarsi del disturbo.

Nel caso dell'ipoalimentazione con grano la ripercussione più significativa chiara e costante a carico delle funzioni esplorate ci è sembrata quella sulla capacità funzionale del cuore. La bradicardia e, allorché c'è stata, l'aritmia, si è insediata in modo più o meno lento, ma sempre progressivo, così da aversi, dopo 40 giorni, una diminuzione della frequenza iniziale del 30-45 % a seconda degli animali, in genere tanto più spiccata quanto migliori erano le condizioni generali di partenza, con le quali si accompagnano di norma le più alte frequenze.

Il punto forse che merita maggiore attenzione delle nostre ricerche ci sembra essere proprio questo: il fatto, cioè, che l'ipoalimentazione cronica con grano, vale a dire con un alimento atto in opportune quantità ad assicurare al Colombo un equilibrio apparentemente indefinito, possa determinare

l'insorgenza di un'alterazione della funzione cardiaca, anche allorquando non v'è una significativa perdita di peso (5-8 % al 40° giorno) e quindi una palese rottura a favore dei processi di usura dell'equilibrio tra meccanismi di sintesi e di disassimilazione.

Se, come apparirebbe per ora giustificato dai reperti istopatologici ed istochimici del cuore da inanizione⁽²⁷⁾, si deve escludere il meccanismo nervoso nel determinismo dell'alterazione funzionale cardiaca, allora sembrerebbe regolare supporre:

1° Che negli organismi, almeno nei colombi, si può verificare una carenza di determinati principi indispensabili per il normale metabolismo e quindi la normale funzione del sistema specifico del cuore, anche allorquando c'è uno squilibrio inapprezzabile o appena apprezzabile tra i processi di assimilazione e di catabolismo;

2° Che tale carenza, almeno nel colombo, non può o solo per poco tempo può essere ovviata con la nutrizione endogena, cioè con la ricerca dei principi indispensabili al sistema specifico del cuore attraverso la distruzione delle sostanze proprie dell'organismo;

3° Che il cuore, forse a causa del suo incessante lavoro in forma ritmica, è capace solo parzialmente di adattarsi agli squilibri del bilancio calorico-nutritivo, dei quali risente non meno, anzi più e più precocemente di qualsiasi altro organo o muscolo.

Eravamo partiti da un'osservazione del tutto accidentale fatta nel corso di ricerche tese ad un altro scopo e siamo pervenuti ad un problema di vasta portata, quello della nutrizione del cuore. La soluzione integrale di esso sta nel comprendere le complesse e finora oscure modalità metaboliche con cui, movendo dalle sostanze alimentari, si giunge alla costruzione dei complessi tissulari specifici del cuore, alla loro conservazione e alla loro usura.

L'analisi di questi aspetti del problema è indubbiamente molto difficile, ma noi pensiamo che un metodo di indagine di sicuro affidamento, almeno nei primi passi in questo campo, sia rappresentato dallo studio del comportamento funzionale del cuore durante l'inanizione e le varie forme di denutrizione sperimentale.

Con questa convinzione noi abbiamo condotto le prime ricerche al fine di analizzare le cause dell'alterata funzione del cuore da inanizione, e precisamente il ruolo svolto sia dalla carenza delle sostanze regolatrici dei processi nutritivi (vitamine e sali minerali), sia dalla carenza dei vari gruppi di sostanze, che con ogni probabilità servono a formare e a mantenere i complessi tissulari specifici, nonché a ripararne la continua usura.

27) Lo studio anatomopatologico dei nostri animali è stato condotto in collaborazione col professore P. Craxi dell'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Messina. La Nota relativa è in corso di stampa.

Biologia. — *Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. Esperienze di trapianto di abbozzi di arto in embrioni di «Bufo vulgaris».* Nota (*) di TEODORO PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Espongo in questa Nota ^(*) i risultati che ho finora raggiunto in esperienze di trapianto del presunto abbozzo dell'arto posteriore, in embrioni di *Bufo vulgaris*, esaminando l'innervazione di questi arti e le modificazioni correlative che si hanno nei gangli spinali e nel midollo spinale. Espongo altresì i risultati ottenuti trapiantando gli abbozzi degli arti posteriori insieme con la parte posteriore degli organi assili, ivi compreso il midollo spinale. Queste ricerche sono anzitutto una necessaria premessa per una prossima Nota sull'innervazione degli arti soprannumerari, negli Anuri, da induzione abnorme. Hanno inoltre interesse per se stesse in quanto s'inseriscono nel vasto problema del come avvengano le connessioni tra il sistema nervoso centrale e gli organi periferici, argomento sorto da vari decenni ma che attende ancora una soluzione soddisfacente. Il mio secondo gruppo di esperienze (trapianto di abbozzi di arto insieme con midollo spinale) ha più particolarmente lo scopo di studiare la mobilità degli arti in rapporto all'estensione ed alla struttura del midollo spinale trapiantato, ed è quindi uno studio morfologico e fisiologico.

Nello studio degli arti soprannumerari da induzione abnorme, negli Anuri, mi sono man mano occupato di numerosi problemi morfologici e biologici. Sono ora passato ad indagare le connessioni tra arti soprannumerari e sistema nervoso; argomento che finora avevo lasciato in disparte per dedicarvi uno studio apposito, tanto più che ebbi occasione di osservare alcuni casi di arti indotti che si mostravano mobili.

Per chiarire l'indirizzo di queste mie ricerche sul sistema nervoso, è necessaria una premessa. Lo studio delle connessioni tra arti e sistema nervoso centrale è uno di quei problemi, giova ribadire, nei quali, come sempre sostenne il Cotronei ⁽²⁾, è necessaria la compenetrazione tra Morfologia comparata, Morfologia ecologica e Morfologia causale. Ricordo infatti che la differente conformazione degli arti (ossia l'essere la deambulazione profondamente diversa nelle varie classi dei Vertebrati, o nell'ambito di una stessa classe come tipicamente avviene negli Anfibi e nei Rettili) si accompagna con differenze nella struttura, soprattutto, dello scheletro ⁽³⁾, della

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma, con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) Rinvio al lavoro in esteso in «Rivista di Biologia» per più ampie notizie bibliografiche e per la documentazione dei risultati raggiunti.

(2) *La Zoologia nel quadro della Biologia moderna*, Pisa, 1927 e «Monit. Zool. Ital.», suppl. al vol. 45, 1934.

(3) T. PERRI, «Arch. Ital. di Anat. e di Embriol.», vol. 58, 1953.

muscolatura e del sistema nervoso⁽⁴⁾. In queste ricerche comparative ed ecologiche s'inserisce la morfologia causale che cerca di chiarire, mediante opportune esperienze, con quale meccanismo si stabiliscano (è questa la parte che qui interessa maggiormente) le correlazioni tra il sistema nervoso centrale e gli arti o, più in generale, tra il sistema nervoso centrale e gli organi periferici. In concreto, la morfologia causale cerca di rispondere al quesito: con quale meccanismo i prolungamenti nervosi raggiungono gli organi periferici, siano essi nella loro sede naturale oppure siano trapiantati in sede anomala? A questo problema se ne connette un altro: se, e con quale meccanismo, l'innervazione influenzi lo sviluppo degli organi; e vedremo come ciò abbia particolare interesse per lo sviluppo della muscolatura. Altro problema strettamente connesso con il precedente, è: in qual modo e con quale meccanismo la mancata innervazione di un organo (perché asportato o che comunque sia venuto a mancare) modifica la struttura del sistema nervoso centrale?

Le connessioni tra organi periferici e sistema nervoso centrale sono studiate ormai da tempo, usando sia la tecnica delle asportazioni che quella dei trapianti. Così l'abbozzo olfattorio o il calice ottico si possono connettere, in condizioni di trapianto, con il sistema nervoso centrale. Il Cotronei e la sua scuola mostrarono che queste connessioni si hanno pure in trapianti xenoplastici tra Anuri ed Urodeli.

Per le connessioni nervose degli arti ricordo che vari Autori se ne occuparono, essenzialmente, per studiare se la loro innervazione fosse indipendente dai nervi del portatore, ed in tal senso conclusero sia il Braus che il Banchi in esperienze su Anuri. Il Gemelli osservò invece, nelle stesse condizioni sperimentali, che erano i nervi della zona, nella quale veniva effettuato il trapianto, quelli che innervavano, penetrandovi, l'arto trapiantato. Queste conclusioni del Gemelli furono poco dopo confermate ed estese dall'Harrison e successivamente da moltissimi altri Autori.

Numerosi ricercatori, con esperienze di trapianto e di asportazione, si occuparono dei rapporti tra arti, midollo spinale e gangli spinali per indagare le leggi generali con cui si effettuano tali rapporti (neurotropismi, neurobiotassi, struttura del substrato, ecc.) (v. Weiss, 1939) senza giungere tuttavia a risolvere la questione.

Gli Autori (Braus, Shorey, Dürken, May per gli Anuri; Detwiler e altri per gli Urodeli; Shorey, Hamburger ed altri per il pollo; Hall e Schneiderhan per i Mammiferi) sono concordi nel riconoscere che l'asportazione di un arto fa nettamente diminuire (trattasi essenzialmente di ipoplasia) il volume dei gangli spinali interessati. Questi ultimi aumentano di volume (trattasi essenzialmente di iperplasia) nei casi di trapianto di un arto (Shorey, Detwiler, May, Hamburger ed altri).

⁽⁴⁾ Vedi i lavori di ALB. STEFANELLI, particolarmente: «Comment. Pontif. Acad. Scient.», vol. 8, n. 10, 1944 e «La Ricerca Scientifica», vol. 18, 1948, suppl. del Centro di studi per la biologia.

Il comportamento della parte motoria del midollo spinale nei casi di asportazione o di trapianto di arti è invece molto controversa. Il Detwiler se ne occupò a lungo in *Amblystoma*: egli osservò ⁽⁵⁾ che asportando una parte di midollo spinale (3°, 4°, 5° segmento) e ritrapiantandola in sede dopo ruotamento di 180° (in modo che il 3° segmento veniva ad occupare il posto del 5°) si ha che il differenziamento delle varie parti del trapiantato è conforme al nuovo posto occupato: ne dedusse che vi esistono ampi fatti regolativi. In altre ricerche il Detwiler ⁽⁶⁾ osservò che il trapianto o l'asportazione di un arto non provoca variazioni numeriche delle cellule motorie. In base a questi due tipi di esperienze concluse ⁽⁵⁾ che la proliferazione delle cellule motorie non è in rapporto con la richiesta funzionale della muscolatura innervata, bensì con il numero delle fibre longitudinali di conduzione che normalmente terminano al livello brachiale per il controllo coordinato dei riflessi degli arti anteriori. Tanto più che osservò che gli arti trapiantati sono funzionanti solo se ricevono la loro innervazione (in tutto o in parte) dalla parte del midollo corrispondente al normale livello degli arti, ossia se, egli dice, sono in connessione con le vie centrali riflesse coinvolte nella locomozione normale degli arti.

Nel pollo non si hanno invece (come particolarmente risultò dalle ricerche di Hamburger ⁽⁷⁾ ed allievi) i fatti di regolazione osservati negli Urodeli. Nel pollo, sostituendo al segmento brachiale un segmento cervicale o toracico, oppure eseguendo un trapianto eterotopico di arto, allora nel segmento innervante l'arto non si ha iperplasia delle cellule motorie. Nell'asportazione di un arto le cellule motorie sono nettamente diminuite di numero. Il Bueker ⁽⁸⁾ interponendo in embrioni di pollo un frammento di midollo spinale tra i somiti e l'abbozzo dell'arto, osservò che in alcuni casi il midollo trapiantato innervava un arto ben sviluppato, e dal numero dei neuroni motori in detto midollo concluse che le fibre longitudinali di più alti livelli non avessero importanza per il differenziamento quantitativo della colonna motrice lombo-sacrale del pollo.

Per gli Anuri, le esperienze del Braus e del Dürken in giovanissime larve, del May ed anche alcune mie ⁽⁹⁾ in embrioni, mostrano che mancando un arto (per asportazione o per inibizione del suo abbozzo) non si osservano sul lato interessato i corni ventrali e le grosse cellule motorie. Il trapianto di un arto provoca secondo il May (1933) ⁽⁹⁾, in esperienze in embrioni di *Discoglossus pictus*, iperplasia delle cellule motorie il che porta ad una asimmetria del midollo. In casi con arti soprannumerari, trovati in natura, funzionanti con innervazione dal plesso brachiale, il Canella non osservò alcuna asimmetria nel corrispondente midollo spinale; il Bueker ebbe scar-

(5) * J. exper. Zool. *, vol. 38, 1923.

(6) Ivi, vol. 35, 1922.

(7) * Ann. New York Acad. of Sciences *, vol. 55, 1952.

(8) * J. exper. Zool. *, vol. 93, 1943.

(9) * C. r. Acad. Sci. Paris *, vol. 196, 1933.

sissimo aumento di cellule motorie in una rana (trovata in natura) che aveva da un lato tre arti funzionanti al posto dell'arto normale, e tutti innervati dallo sciatico.

ESPERIENZE DI TRAPIANTO DELL'ABBOZZO DELL'ARTO (ved. figura). - Ho sperimentato in *Bufo vulgaris*, in vari stadi di sviluppo, da bottone codale piccolissimo sino al primo inizio delle contrazioni: adunque in stadi nettamente precedenti all'inizio dell'innervazione degli arti. Il presunto abbozzo

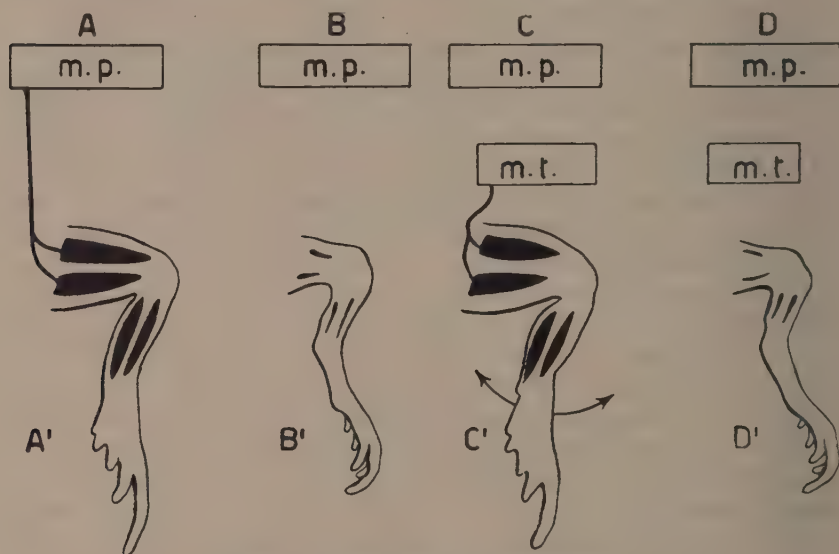


Fig. 1. - Schema dei risultati raggiunti.

m. p.: midollo spinale del portatore; m. t.: midollo spinale trapiantato; le frecce in C' indicano mobilità dell'arto. In A' e B': trapianto di abbozzi di arto, in A' lo sviluppo della muscolatura è notevole e si osserva innervazione, in B' la muscolatura è scarissima e non si osserva innervazione. In C' e D': trapianto degli abbozzi degli arti posteriori insieme con un tratto di midollo spinale (è qui rappresentato uno solo dei due arti); in C' l'estensione del midollo trapiantato è maggiore e comprende buona parte del tratto lombo-sacrale, gli arti presentano notevole sviluppo della muscolatura, innervazione rispetto al midollo trapiantato e mobilità; in D' il midollo trapiantato è essenzialmente midollo caudale, gli arti presentano scarissima muscolatura, non si scorge innervazione, e l'arto è rigido: sia in C' che in D' non si notano connessioni tra il trapiantato ed il midollo spinale del portatore.

dell'arto posteriore veniva asportato e trapiantato su un altro embrione in varie zone del tronco: sia in prossimità degli arti normali che nella zona intermedia. Si sono sviluppati spesso arti ben conformati, a volte uno solo, a volte due. Sono stati sempre arti posteriori, anche se il trapiantato è nelle immediate vicinanze dell'arto anteriore: il che vuol dire che trattasi effettivamente dello sviluppo dell'abbozzo trapiantato, e non di arto soprannumerario da induzione abnorme. Come tecnica di colorazione usai l'emalume Meyer ed eosina, oppure quella all'argento colloidale del Bodian che è specifica. Ho per ora limitato l'esame istologico a casi giunti alla metamorfosi con gli arti trapiantati apparentemente ben sviluppati.

Lo studio di questi trapianti è utile per indagare vari problemi (determinazione, accrescimento, lateralità, innervazione): in questa Nota mi limito allo studio delle correlazioni nervose.

In nessun caso ho notato mobilità degli arti trapiantati.

Debbo distinguere gli arti trapiantati nei quali la muscolatura raggiunge uno sviluppo notevole o almeno discreto, da quelli dove lo sviluppo della muscolatura fu assai deficiente o, addirittura, praticamente assente. La parte scheletrica ha sempre presentato uno sviluppo abbastanza tipico.

Negli arti con muscolatura sviluppata bene o discretamente, ebbi sempre innervazione: i nervi si seguono agevolmente fino allo stilopodio o allo zeugopodio. Questi nervi provengono, per gli arti più prossimi al normale arto anteriore o al normale arto posteriore, dai plessi degli arti normali: così nei primi si ha che dal terzo nervo spinale si diparte un piccolo ramo che si porta all'arto trapiantato. I gangli spinali interessati presentano un volume maggiore che i controlaterali. Generalmente sono interessati più gangli. La questione del comportamento della parte motoria del midollo spinale è certamente meno chiara: si può però asserire con certezza che non vi sono notevoli differenze tra i due lati del midollo, ossia non vi è un chiaro aumento numerico o volumetrico delle cellule motorie sul lato interessato. Ritengo che solo la ricerca della presenza o meno di espansioni nervose motorie nei muscoli di questi arti trapiantati possa chiarire la questione.

Invece negli arti nei quali la muscolatura è pochissimo sviluppata o praticamente assente, non sono riuscito ad osservare innervazione. Per quanto riguarda la cute e la sua innervazione, me ne occuperò in seguito. Si tenga presente che, anche con la tecnica del Bodian, perché l'innervazione sia riconoscibile, è necessario che i fascetti nervosi non siano al di sotto di certe dimensioni sia pure molto piccole.

Ho già detto che varie volte nel trapianto si ebbe lo sviluppo di due arti: di questi, almeno nei casi finora esaminati, uno è con muscolatura ben sviluppata e innervazione, e l'altro con muscolatura scarsissima e senza evidente innervazione.

Ho adunque notato una corrispondenza tra quantità di muscolatura e quantità d'innervazione, il che ho pure osservato (ne dirò più estesamente nella prossima Nota) negli arti soprannumerari indotti. È una questione di vivo interesse che rientra sia nel problema dell'attrazione dei nervi, sia in quello dell'importanza che, da un certo stadio di sviluppo in poi, ha l'innervazione per lo sviluppo della muscolatura. Sono quesiti ai quali manca ancora una soluzione soddisfacente. Nei miei casi ho osservato che le fibre muscolari anche quando sono presenti in piccolissimo numero, hanno un aspetto normale; si prospetta non privo d'interesse lo studio delle varie fasi di sviluppo di questi arti trapiantati.

TRAPIANTO DI ABBOZZI DI ARTO INSIEME CON MIDOLLO SPINALE (ved. figura). — L'altro gruppo di esperienze al quale ho accennato al principio di questo lavoro, riguarda il trapianto, in *Bufo vulgaris* a bottone codale

piccolissimo, dei due presunti abbozzi degli arti posteriori insieme con la parte posteriore, più o meno estesa, degli organi assili (midollo spinale, corda dorsale, miotomi, soprastante cute). I portatori furono tenuti in vita sino alla metamorfosi. Ebbi lo sviluppo degli arti, della coda e delle parti assili.

In questi casi è interessante l'osservazione *in vivo* della mobilità o meno degli arti, posta poi a confronto con i risultati dell'esame microscopico. In alcuni casi gli arti furono mobili, in altri rigidi. Anche la coda presentava, di tanto in tanto, mobilità. Questi movimenti, sia degli arti che della coda, si mostrarono indipendenti dai movimenti degli arti o della coda del portatore: essi avvenivano sia senza causa apprezzabile (rientrano nei movimenti riflessi) sia dopo stimolazione, e solo di poco erano meno vivaci del normale.

L'esame microscopico dei miei casi ha mostrato che la mobilità o meno degli arti è in rapporto con l'estensione del midollo spinale trapiantato insieme con gli abbozzi degli arti. In tutti i casi nei quali gli arti erano mobili, ho osservato che il midollo spinale comprendeva gran parte dell'intumescenza posteriore, e la parte caudale non ancora riassorbita. Nel segmento di midollo trapiantato sono presenti le grosse cellule motorie disposte a colonna. Da questo midollo vengono, in modo assai regolare, innervati gli arti trapiantati, la cui muscolatura è abbondantissima. Non ho mai osservato, per quanto li abbia attentamente ricercati, fascetti nervosi che dal portatore andassero al trapiantato. D'accordo con ciò è sia il fatto che i gangli spinali del portatore non hanno subito alcuna variazione, sia l'autonomia fisiologica, poco sopra ricordata, dei movimenti degli arti trapiantati rispetto al portatore. Osservo che la tecnica ch'io ho usata permette lo studio di parti del sistema nervoso in condizioni di isolamento rispetto al sistema nervoso del portatore.

Questa parte delle mie ricerche mi sembra interessante, soprattutto per il fatto che si è avuta la presenza nel midollo trapiantato dei corni ventrali con grosse cellule motorie, e mobilità degli arti, pur non essendovi alcuna connessione tra il midollo trapiantato e le altre parti del sistema nervoso centrale: non ho infatti riscontrato connessioni nervose tra il trapianto e il sistema nervoso del portatore.

Nei casi, invece, nei quali osservai arti rigidi, di midollo spinale vi era, essenzialmente, solo quello caudale non ancora scomparso. La muscolatura di questi arti è scarsissima: si verifica anche qui il rapporto tra quantità di muscolatura e quantità d'innervazione di cui ho detto a proposito del trapianto di arto.

CONCLUSIONI. - Dai risultati esposti, rimandando al lavoro in esteso per una più ampia discussione, si possono trarre le seguenti conclusioni.

1. Gli abbozzi di arti trapiantati, se si sviluppano in arti provvisti di muscolatura in quantità notevole o almeno discreta, presentano innervazione, con aumento di volume dei corrispondenti gangli spinali, ma senza evidente aumento numerico o volumetrico delle cellule motorie della corri-

spondente parte del midollo spinale. Se negli arti trapiantati la muscolatura è invece scarsissima, allora non vi si osserva alcuna innervazione.

2. Gli abbozzi degli arti trapiantati insieme con midollo spinale (tratto lombo sacrale) danno arti funzionanti pressoché come il normale e innervati solo dal midollo trapiantato, il quale presenta i corni ventrali con grosse cellule motorie. Se il frammento di midollo spinale è midollo caudale (ossia è mancato il segmento lombo sacrale), allora gli arti sono rigidi e con scarsissima muscolatura. Nei casi di mobilità non mi è stato possibile accertare connessioni nervose tra il trapiantato e il sistema nervoso del portatore.

3. I risultati che ho ottenuto tendono a dimostrare che nel midollo spinale di Anuri vi sono differenze regionali, che si instaurano in stadi giovanissimi.

Antropologia. — *Lorenzo il Magnifico e il fratello Giuliano dal punto di vista antropologico.* Nota di GIUSEPPE GENNA, presentata (*) dal Socio S. SERGI.

Chi, interessandosi ai documenti delle antiche glorie di Firenze, entrato nella Sacrestia Nuova della Basilica di San Lorenzo, volge lo sguardo alla parete posta a destra della porta di ingresso, vi scorge, tra due statue raffiguranti San Cosma e San Damiano, il meraviglioso gruppo michelangiesco della Madonna col Bambino; il tutto adagiato su un bancone marmoreo, che, come ha confermato una ricognizione da me effettuata il 23 ottobre 1945, contiene, in due distinte casse, i resti scheletrici di Lorenzo dei Medici, detto il Magnifico, e di Giuliano suo fratello.

Lorenzo, nato nel 1449 da Piero dei Medici, detto il Gottoso, e da Lucrezia Tornabuoni, dopo quarantatré anni di vita fortunosa, in cui imprese l'orma potente del suo ingegno nelle più svariate manifestazioni della vita politica ed artistica del suo tempo, mostrando di assommare in sé le più alte qualità spirituali della famiglia da cui discendeva, raggiunse nella tomba il fratello Giuliano, che, ucciso nel 1478, a venticinque anni, per la congiura dei Pazzi, era stato anch'egli seppellito a San Lorenzo.

L'esame delle ossa di Giuliano ha fornito la documentazione pressoché completa delle ferite infertegli da Francesco dei Pazzi e da Bernardo Bandini, incaricati da Girolamo Riario, orditore della congiura, di uccidere Giuliano. Nel mezzo dell'osso frontale, fra le due bozze, si ha una perdita di sostanza a carico del tavolato esterno e della diploe, lunga circa 6 cm., diretta dal basso in alto, dall'avanti all'indietro, e da destra a sinistra. Nella regione parietotemporale destra si nota un'ampia breccia, che risulta dal confluire di varie soluzioni di continuo, con schegge distaccate, alcune delle quali mancanti. Sulla bozza parietale sinistra si vede una lesione analoga

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

per aspetto a quella situata nel mezzo del frontale, ma più piccola, a carico anch'essa del tavolato esterno e della diploe. Altra analoga lesione, ma ancora più piccola e a carico del solo tavolato esterno, si nota sulla superficie laterale della parte destra del corpo mandibolare. Nella scapola destra, fossa sottospinosa, si nota una soluzione di continuo lunga cm. 3,5. Nell'omero destro si ha una perdita di sostanza, lunga poco più di 1 cm., sul margine latero-posteriore della tuberosità deltoidea; sulla faccia posteriore dell'osso, 4 cm. al di sopra della fossa olecranica, si notano due tagli perpendicolari tra loro. Il femore destro presenta alcune intaccature quasi trasversali sulla faccia diafisaria laterale, 10 cm. al disopra del tubercolo condiloideo. La fibula destra presenta una intaccatura trasversale sulla cresta laterale, circa 15 cm. al di sotto dell'estremo superiore libero. Inoltre la estremità distale della stessa fibula è nettamente staccata con un taglio obliquo dall'indietro in avanti, dal basso in alto, ed in senso lateromediale. Questo taglio ha intaccato profondamente la tibia destra, di lato e posteriormente, penetrando in profondità per circa 1 cm. Tutte queste ferite sono dovute a colpi di accetta e di pugnale.

Secondo Leoncini, al quale affidai l'esame di dette lesioni ossee dal punto di vista medico-legale, Giuliano, colpito da una pugnata del Bandini vibrata sulla schiena e trapassante la scapola, ma senza ledere organi vitali, essendo disarmato tentò di fuggire; però fu aggredito di dietro dal Pazzi a colpi di accetta vibrati sul capo, dai quali cercò di ripararsi mediante il braccio destro; ma inutilmente, ché il Pazzi riuscì a finirlo con nuovi colpi al cranio, alla faccia e alla gamba destra.

A parte dette lesioni traumatiche, il sistema osseo di Giuliano è bene sviluppato, robusto, ben rifinito nei particolari morfologici. È interessante rilevare che il sacro è composto di sei vertebre, senza che sembri si possa parlare di assimilazione di vertebre dalle regioni vertebrali finitime, poiché si contano sette vertebre cervicali, dodici toraciche, cinque lombari, mentre la prima coccigea è separata dal sacro.

Questa conformazione del sacro si ritrova in Lorenzo, in cui si ha inoltre la saldatura della prima coccigea col sacro. Una tale variazione morfologica non si trova in Piero il Gottoso, genitore dei due fratelli, né negli altri ascendenti di cui è stato possibile studiare lo scheletro. È probabile che essa sia di origine materna; ma lo scheletro della madre manca. Fra i discendenti, detta variazione si ritrova in Alessandro, Duca di Firenze, figlio di Giulio (Clemente VII), figlio di Giuliano.

Invece lo scheletro di Lorenzo, esente da lesioni traumatiche, presenta una costituzione grossolana, con esostosi e osteofiti, sparsi qua e là, in alcune ossa accompagnati da vere e proprie deformazioni. Specialmente la colonna vertebrale ne è piena. L'omero sinistro è deforme nell'estremità superiore per processi patologici distruttivi e neoformativi, che hanno alterato notevolmente la superficie articolare della testa, superficie che risulta ridotta ad uno specchio anteriore, mentre i due terzi mediali e posteriori sono coperti da neoformazione ossea patologica, estesa fino al tubercolo maggiore. Sembrerebbe

che i movimenti possibili in vita dovessero essere ridotti a quelli di adduzione e di abduzione. Visti di lato, testa e collo dell'omero sinistro appaiono retroversi rispetto alla diafisi, con formazione di una curvatura a concavità posteriore. Il femore sinistro presenta il terzo trocantere. Le superfici articolari contigue del primo metatarsale e della prima falange dell'alluce sono incrostate da neoformazione ossea irregolarmente sfrangiata.

La statura, calcolata in base alle ossa lunghe degli arti, è alta in ambedue i fratelli: un po' meno in Lorenzo con cm. 175,2, un po' più in Giuliano con cm. 177,6. A conferma di ciò, risulta che le vertebre di Giuliano sono generalmente più alte di quelle corrispondenti di Lorenzo.

In base alla lunghezza delle varie ossa lunghe degli arti, si conclude anche che l'arto superiore era sensibilmente più lungo in Giuliano, specialmente per una maggior lunghezza dell'omero, mentre, nell'arto inferiore, Giuliano ha il femore più lungo, ma la tibia più corta. Ne consegue che Lorenzo ha indice intermembrale minore e indici radio-omerale e tibio-femorale maggiori.

Le clavicole sono più lunghe in Lorenzo, e meno in Giuliano, indizio di una costituzione corporea più brachitipica nel primo, e più longitipica nel secondo.

Il cranio cerebrale è in ambedue i fratelli aristencefalo, cioè con capacità molto grande, cmc. 1660 in Lorenzo e cmc. 1700 in Giuliano.

I suoi diametri fondamentali sono molto simili nei due: grandissima la lunghezza, media la larghezza e l'altezza.

In norma verticale, il contorno è pressoché identico nei due, nettamente dolicomorfo, ellissoide, con indice 73,37 in Lorenzo e 73,98 in Giuliano. La espansione laterale della fronte è notevole: l'eurimetopia è un po' maggiore in Giuliano.

In norma laterale, la curva sagittale mediana risulta quasi uguale nei due, se si orientano i crani secondo l'asse basion-bregma, come consiglia S. Sergi, salvo che la prominenza della glabella è alquanto più sensibile in Lorenzo, il quale presenta anche una protuberanza occipitale esterna insolitamente sviluppata e prominente in basso a guisa di capezzolo, prominenza che è appena accennata in Giuliano. L'indice altezza-lunghezza è di circa 68 in ambedue, cioè di camecrazia, dovuta alla grande lunghezza cranica.

In norma posteriore, la curva trasversale del cranio appare rotondeggiante in Giuliano, con indice di metriocrania verso il limite della tapeinocrania; in Lorenzo appaiono più prominenti la regione del vertice e le due bozze parietali, sicché il contorno cranico è piuttosto poligonale con indice di metriocrania.

La faccia ossea ha una lunghezza eguale nei due, che va classificata come media; l'altezza superiore è poco differente e va classificata come grande; l'altezza totale è grande in Lorenzo, è grandissima in Giuliano, essenzialmente per una maggiore altezza delle corone dentarie in quest'ultimo. In complesso la faccia è grande, macroprosopa in ambedue.

L'indice facciale superiore è di leptenia in ambedue; quello facciale totale è di leptoprosopia in Lorenzo, di iperleptoprosopia in Giuliano.

Gli indici fronto-jugale e mandibolo-jugale rivelano che, rispetto alla lunghezza bizigomatica, Lorenzo ha la fronte media e la mandibola larga, Giuliano la fronte larga e la mandibola media.

Il profilo verticale della faccia è prognato in Lorenzo, ortognato in Giuliano. Il dorso nasale osseo è corto e come schiacciato in Lorenzo; lungo e normalmente sporgente in Giuliano.

Le aperture orbitali sono generalmente mesoconche, le aperture nasali leptorrine, i palati leptostafilini. La regione dell'angolo mandibolare è prominentemente lateralmente molto più in Lorenzo che in Giuliano. Mento normalmente prominente in ambedue.

Sintetizzando i risultati dell'analisi svolta per i singoli caratteri somatici, può ben dirsi che la comune origine parentale di Lorenzo e Giuliano risulta evidente dall'eguale comportamento, nei due, dei vari caratteri riguardanti specialmente lo sviluppo corporeo complessivo e il cranio cerebrale: tali sono l'alta statura, la grande capacità cranica, forme e indici della testa specialmente nelle norme verticale e laterale, la speciale costituzione dell'osso sacro da sei vertebre, ecc.

Ma molti altri caratteri distinguono nettamente l'uno dall'altro fratello: essi riguardano specialmente lo stile corporeo generale e la faccia.

Lorenzo ha uno scheletro di fattura grossolana con diffuse esostosi e deformazioni patologiche, e vari contrassegni di brachitipia corporea, come il tronco meno alto e più largo, l'arto superiore meno lungo, ecc. La sua faccia è alta, non altissima, con fronte mediamente larga e mandibola alquanto larga rispetto alla larghezza bizigomatica; il dorso nasale osseo è corto e schiacciato; la regione alveolo-dentale sporge alquanto in avanti; determinando un certo grado di prognatismo; la regione dell'angolo mandibolare sporge alquanto lateralmente.

Giuliano ha uno scheletro robusto, ma di fattura regolare, senza osteofiti, né anomalie, e con vari contrassegni di longitipia somatica, come il tronco più alto e meno largo, l'arto superiore più lungo, ecc. La sua faccia è altissima, con fronte larga e mandibola meno larga rispetto alla larghezza bizigomatica; il dorso nasale osseo è lungo e assai prominente in avanti; la regione alveolo-dentale non sporge all'innanzi, sicchè il profilo della faccia è perfettamente ortognato; l'angolo mandibolare non sporge oltre misura lateralmente.

I nostri rilievi tratti dall'esame dello scheletro confermano ed integrano la descrizione dei caratteri fisici dei due fratelli quale risulta dall'antica letteratura e dalle antiche raffigurazioni artistiche come quadri, miniature, medaglie, sculture, ecc.

Di Lorenzo scrisse Niccolò Valori (1568): « Fu Lorenzo di grandezza più che mediocre, nelle spalle largho, di corpo solido et robusto, et di tanta agilità che in questo ad alcuno non era secondo. . . ; fu di colore ulivigno e la faccia, ancor che in quella non fusse venustà, era nondimeno piena di tal dignità, che a' riguardanti induceva reverenza; fu di vista debole, haveva il naso depresso e al tutto dell'odore privato ». Il Nardi aggiunse che il Magni-

fico aveva la voce poco grata: «per la strettezza del naso pareva che fosse fioco».

Il Pieraccini aggiunge: «Se noi oggi volessimo completare l'esame obiettivo esterno del Magnifico sulla guida della iconografia, potremmo aggiungere che Lorenzo ebbe faccia scarna e angolosa, naso largo e schiacciato alla base, testa voluminosa coperta di capigliatura nera e abbondante, fronte alta e larga, sguardo profondo e vivo, per quanto l'occhio avesse struttura miopica, omeri ampi, petto largo, collo breve, un forte sviluppo di masse muscolari, impiantate sopra robusta struttura scheletrica. Quindi, maggior sembianza di forza fisica che avvenenza di forme; tuttavia dalla faccia traspariva, come ben rilevò il Valori e come altrettanto bene possiamo rilevare noi dalle sue immagini, un'anima dignitosa superiore e attraentissima, una grande originalità di espressione, fatta di energia e di pensiero».

Di Giuliano scrisse Angelo Poliziano: «Statura fuit procera, quadrato corpore, magno et prominenti pectore; teretibus ac musculosis brachiis, validis articulis, compressa alvo, ampliis femoribus, suris aliquanto plenioribus, vegetis, nigrisque oculis, acris visu, sub nigro colore, multa coma, capillo nigro, et promisso, atque in occiput a fronte rejecto, equitandi, jaculandique gnarus: saltu et palaestra excellens; venatu mirum in modum delectari solitus: vigiliae atque inediae juxta patiens: potionis adeo exigue, ut ea aliquando vel integrum diem sponte abstinuerit...».

E ancora lo stesso Poliziano: «Magni erat animi; maximae constantiae; religionis et bonorum morum cultor; picturam maxime amplectebatur et musicam, atque omne munditiarum genus; ingenio erat ad poësin non inepto... Gravis decorusque erat eius incessus atque omnino dignitatis plenus. Obsequi erat multi, multae humanitatis. Magnae in fratrem pietatis atque observantiae; magni roboris et virtutis».

Tra le raffigurazioni artistiche di Giuliano ha importanza preminente il ritratto a mezzo busto opera di Sandro Botticelli, copia del quale si conserva nell'Accademia Carrara di Bergamo; vi risultano evidenti le caratteristiche facciali a cui abbiamo accennato, mentre l'espressione del viso appare mesta e pensosa, quasi presaga del triste evento a venire.

Fra le numerose raffigurazioni di Lorenzo sono particolarmente notevoli, come testimonianza dei suoi caratteri fisici, quella dell'affresco di Domenico Ghirlandaio (Chiesa di Santa Trinita, Firenze), in cui Lorenzo appare in piedi, tra altri personaggi, e inoltre il busto di lui attribuito al Verrocchio.

Ma il ritratto più vero di Lorenzo rimane pur sempre la sua maschera mortuaria, custodita dalla Società Colombaria di Firenze. In essa, meglio che in qualsiasi altro documento, ritroviamo le proporzioni e le forme del volto, quali ci sono apparse all'indagine scheletrica, mentre dalla fisionomia pur immobile sembra spirare ancora quell'aria di austerità e di superiorità, che gli permisero di dominare gli eventi della vita politica e culturale dei suoi tempi.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Ugo Lombroso

tenuta (*) dal Socio EGIDIO MENEGHETTI

Nel 1901, un giovane ventiquattrenne, che frequentava l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Torino, presentò un gruppo di ricerche sperimentali sull'assorbimento intestinale dei grassi e sui modi secondo i quali la funzione pancreatica influenza tale fenomeno.

Era UGO LOMBROSO, che dalla guida del Sacerdotti, doveva passare sotto quella del Morpurgo, sempre a Torino, andare poi a Roma presso il Luciani, qui, dal 1916 al 1918, dirigere per incarico l'Istituto di Fisiologia, passando quindi, sempre per incarico, dal 1918 al 1922, al corrispondente Istituto dell'Università di Messina. Nominato professore, fu chiamato a Palermo e vi rimase dodici anni, venendo poi trasferito, nel 1935, alla direzione dell'Istituto di Fisiologia di Genova. Durante la brutale parentesi delle persecuzioni razziali, fra il 1938 e il 1945, fu ospitato dall'École de Médecine di Parigi come « maître de recherches » e poi dall'Istituto Superiore di Sanità di Roma. Nel 1946 era divenuto Socio Corrispondente della nostra Accademia, passando Socio Nazionale un anno dopo.

Oltre cinquant'anni di fervidissima attività.

Ebbene, proprio cinquant'anni dopo la presentazione di quel primo lavoro sulla funzione pancreatica, il settantacinquenne ricercatore, pochi giorni prima di morire, inviava al « III Congresso Europeo delle Società Nazionali di Gastro-Enterologia - aprile 1952 » una relazione su argomento fondamentalmente corrispondente: vero testamento scientifico, dove si trovano riassunti i risultati ottenuti da Lui e dai suoi collaboratori, in mezzo secolo di lavoro.

Già a questo punto risulta in piena luce una delle caratteristiche fondamentali dello studioso: quella di non disperdere la propria attività su argomenti molteplici, senza sforzo di approfondimento e senza calore di passione. Lo svagato « flirt » scientifico non era nel Suo temperamento e anche a tale alta dote di serietà e di tenacia si deve se oggi, con pacatezza obiettiva di storici, possiamo dire, senza tema d'errore, che nessuno il quale voglia trattare della funzione pancreatica in rapporto al metabolismo dei grassi, può permettersi non solo di trascurare l'opera di Lui, ma di non considerarla fondamentale.

Proprio per questo, dovendo oggi parlare del Lombroso e tentando di farlo in modo degno, se di altri risultati da Lui raggiunti si dirà assai breve-

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

mente, limitandosi talvolta a fugace cenno, o anche si tacerà, di quel Suo centrale gruppo di studi si parlerà subito con qualche ampiezza.

* * *

Nel 1902-1903 il Lombroso controllò e approfondì le osservazioni secondo le quali i cani a cui è asportato il *pancreas* presentano, dopo una decina di giorni dall'intervento, steatorrea e imponente infiltrazione adiposa del fegato. Sebbene già l'Abelmann e il Minkoski avessero osservato che quando nell'organismo rimane un segmento di pancreas, completamente separato dall'intestino, l'assorbimento del grasso intestinale può ancora compiersi per circa la metà del normale, l'interpretazione comunemente data considerava come causa fondamentale la deficienza di secreto pancreatico nel lume intestinale.

Fin da allora, il Lombroso prospettò il problema con estrema limpidezza, osservando come la spiegazione dei fenomeni ammetteva due sole ipotesi:

1° o il segmento di pancreas sfuggito all'estirpazione e in nessun modo comunicante con l'intestino continua tuttavia a elaborare il secreto esterno immettendolo nel torrente circolatorio, così da farlo arrivare per questa via alle ghiandole intestinali, le quali, riversandolo nel lume, consentono che esso compia la sua azione digestiva;

2° o il segmento di pancreas, per funzione endocrina, con assoluta indipendenza dal secreto pancreatico esterno, influisce sull'assorbimento dei grassi: mancando tale funzione non solo mancherebbe l'assorbimento, ma tutto il metabolismo dei lipidi risulterebbe alterato, tra l'altro con infiltrazione adiposa epatica e con espulsione di grassi attraverso l'emuntorio intestinale.

Sul fondamento di queste ipotesi Egli inizia tutta una serie di indagini e di controlli con tecniche svariate, spesso ingegnose, talvolta del tutto originali.

Per brevità ometto di esporre la documentazione sperimentale precisa ed esauriente che gli permise senz'altro di escludere la prima delle due ipotesi, così che, già in via teorica, la seconda rimaneva convalidata.

Ne era tuttavia necessaria la dimostrazione sperimentale. Qui le ricerche del Lombroso, pure avendo assai spesso pregio di priorità, s'intrecciano validamente e a conferme e a indagini di altri studiosi.

Egli esclude dapprima ogni influenza della secrezione insulare sul metabolismo lipidico: in realtà, con trattamento insulinico, steatorrea e steatosi non si modificano affatto nei cani spancreati; inoltre, Egli costata che nelle anitre - le quali sopravvivono parecchi mesi all'estirpazione completa del pancreas senza presentare disturbi di ricambio glucidico - all'intervento operatorio segue immediatamente la perdita totale di grasso nelle feci; se tuttavia un frammento di pancreas sfugge all'estirpazione l'assorbimento dei grassi

nell'intestino raggiunge facilmente i quattro quinti del normale. Nelle anitre, dunque, si confermano, in modo che si potrebbe dire tipico, le osservazioni fatte nel cane. Ed ecco un altro Suo esperimento più volte controllato: se in un'ansa alla Vella si introducono emulsioni oleose, dopo circa un'ora una notevole quantità di grasso non è recuperabile; nessuna scomparsa si nota invece quando si ripeta l'esperimento nello stesso animale dopo estirpazione del pancreas, sia che il cane si trovi in stato di glicosuria, sia che la glicosuria venga dominata per somministrazione di insulina.

Di fondamentale importanza, e in se stessa e per gli sviluppi che ne conseguirono, è l'osservazione di Hédon, secondo la quale nei cani spancreati, per contemporaneo trattamento insulinico e somministrazione orale di poltiglia pancreatica si ha sopravvivenza non solo per mesi, ma addirittura per anni, e al tavolo anatomico-patologico il fegato risulta normale. In quale modo la poltiglia di pancreas fresco protegga la vita del cane spancreato e insulinizzato, ebbe diversa interpretazione. Qui basti ricordare che secondo Best e collaboratori, l'azione favorevole sarebbe soprattutto dovuta alla colina, cioè a un fattore di azione protettiva in senso lipotropo. Il Lombroso esclude subito tale interpretazione, osservando che la colina non manifesta per nulla l'azione delle poltiglie di pancreas.

A questo punto intervengono le ricerche del Dragstedt e collaboratori, imponenti per la ricchissima documentazione sperimentale. Questi studiosi, in primo luogo dimostrarono che la somministrazione di ingenti quantità di secreto pancreatico non soltanto non rallenta e non diminuisce l'insorgere del fenomeno, ma lo accelera e lo aumenta; in secondo luogo che la somministrazione di poltiglie di fegato, di cervello, di altri organi contenenti colina in quantità superiore a quella delle poltiglie di pancreas non impedisce la steatosi; in terzo luogo che un estratto di pancreas, privo completamente di colina, riesce invece a impedirla in modo assai efficace. Progressive purificazioni hanno permesso al Dragstedt di giungere a un estratto attivo per iniezioni di pochi centigrammi a cui è stato dato il nome di « lipocaic ».

Un altro gruppo di autori americani (Entenmann, Chaikoff, ZilverSmith) si è diversamente orientato estraendo dal pancreas, con lo stesso metodo usato per l'estrazione degli enzimi, un composto di attività proteolitica che denominarono anti-fegato-grasso (A.F.L.), il quale libererebbe nell'intestino, dagli alimenti, particolari aminoacidi o dipeptidi e comunque fattori lipotropi diversi dalla colina (metionina. .).

Sempre su questo indirizzo, nel 1950, Chaikoff, Entenmann, Montgomery, Feinberg e altri, dopo un periodo di discussioni e di interpretazioni incerte, affermarono decisamente che l'azione lipotropa del pancreas è dovuta all'enzima triptico in esso contenuto e agente nel lume intestinale.

A questo punto, il Lombroso, dopo paziente e sistematica revisione dei risultati ottenuti, dopo accurato perfezionamento delle tecniche in precedenza impiegate, in base a nuove ricerche, giunse alla conclusione che non soltanto la parte triptica del pancreas agisce in quantità minima, non soltanto che essa agisce anche per iniezione, ma infine che l'azione lipotropa

rimane intatta quando si distrugga in essa, o con il calore, o per azione di acidi, qualsiasi azione enzimatica. Mise ancora in evidenza che l'azione dei diversi fattori lipotropi valutata in base al consumo di O_2 e al Q. R., risulta nettamente diversa tra l'uno e l'altro, e che il componente lipotropo contenuto nella frazione triptica privata di ogni potere enzimatico appare più potente di tutti.

In tale modo, solidamente si giunge all'accoglimento di una funzione interna pancreatica dominante il metabolismo dei lipidi. Manca ancora la identificazione della parte del pancreas capace di tale funzione, e il Lombroso, nelle ultimissime Sue ricerche, quelle appunto riferite nella ricordata relazione, affronta tale problema, indagando se la sede dei fattori endocrini pancreatici, per quanto riguarda i lipidi, sia il tessuto acinoso o il tessuto insulare. Scrive (e sono le Sue ultime parole di studioso): « Per quanto riguarda la funzione lipotropa, esercitata dal pancreas, appare che essa possa ascrivarsi al tessuto acinoso, senza che risulti, almeno per ora, una partecipazione del tessuto insulare. Le esperienze iniziate dalla scuola americana, che volevano attribuire all'attività triptica il compito lipotropo del pancreas, quando siano bene analizzate ed impostate con adeguata disposizione sperimentale, dimostrano che non è l'attività proteolitica, esercitata nel lume intestinale, la causa di questa azione. Rimane pertanto a questi studiosi americani il merito di aver richiamata l'attenzione su di un materiale, che dalle nostre successive esperienze appare di una efficacia lipotropa assai superiore a quella di altri fattori sino ad ora studiati, compreso il "lipocaic" e l'"A.F.L." da loro preparato. Ciò che a noi più interessa e che riveste una importanza notevole dal punto di vista scientifico, è il fatto che le ricerche già svolte e da svolgere permetteranno, a nostro avviso, di individuare definitivamente la sede dove hanno origine i fattori lipotropi pancreatici ».

L'Orestano, il quale di recente, commemorando Ugo Lombroso, ne ha riassunto l'opera scientifica in una sintesi efficace, osserva, a questo punto, come tale gruppo di ricerche, che da principio mirava a problemi di carattere strettamente scientifico, abbia trovato in modo rapido, quasi tumultuoso, vasta applicazione terapeutica. Basti fare cenno alla molteplicità di forme morbose oggi trattate con estratti pancreatici, o con « lipocaic », o con fattore anti-fegato-grasso, o con sostanze lipotropiche svariate: non v'ha proprio dubbio che fondamento di tutte queste applicazioni si trova nell'opera e nei concetti del Lombroso.

* * *

Limitandoci a un rapido cenno per quanto si riferisce alle indagini sul determinismo della secrezione esterna pancreatica (secondo le quali risulta dimostrata, con brillante sperimentazione, la netta differenza fra il meccanismo della secrezione dovuta al passaggio di acido nel duodeno e quello dovuto a intervento di secretina) conviene, e sia pure brevemente, dare notizia delle ricerche che intimamente si collegano a quelle sopra esposte e che

si rivolgono allo studio dell'influenza del succo enterico sull'assorbimento dei grassi intestinali e sulla forma chimica secondo la quale tale assorbimento si compie.

Il Lombroso constatò il lieve potere lipolitico del secreto normale e, in particolare, la capacità deidrogenante di questo secreto, cui è dovuta la formazione di doppi legami nella molecola di grasso saturo. Su questo argomento Egli aveva riferito con ampiezza nella relazione presentata il 23 aprile 1950 alla « II Settimana di Alta Cultura Medica Internazionale ».

* * *

Validi e chiarificatori contributi sono stati portati all'interpretazione del meccanismo di secrezione intestinale, con la dimostrazione che fattore precipuo di esso è rappresentato dallo stimolo chimico diretto di sostanze che durante la digestione si formano nell'intestino. La secrezione determinata da stimoli chimici a diretto contatto con le mucose non si propaga né per via umorale né per via nervosa. Per dimostrare che attraverso i plessi nervosi decorrenti lungo le tuniche intestinali non avviene tale propagazione, il Lombroso applicò una speciale tecnica di fistola intestinale, ottenendo due anse alla Vella, mantenenti continuità dei plessi nervosi: in tali anse egli poteva far passare, a volontà, l'una o l'altra delle sostanze eccitanti la secrezione. Anche con tale dispositivo risultò che la secrezione è sempre mantenuta e contenuta nei territori dove agisce localmente lo stimolo chimico

* * *

Il problema dell'esistenza e delle proprietà dei mediatori chimici nel dominio del sistema nervoso vegetativo fu da Lui affrontato in modo originale, studiando l'influenza e del suo tono e della sua stimolazione sulle variazioni del metabolismo gassoso, espressione di quel metabolismo energetico che è così intimamente connesso alla situazione funzionale del sistema nervoso vegetativo. I rapporti fra le due sezioni del sistema nervoso vegetativo, metabolismo energetico e complesse influenze ormoniche, furono ampiamente indagati, e fra i risultati di più ricco significato vanno ricordati quelli che riguardano i rapporti tra funzione surrenale e ricambio energetico.

Tutta una serie di pazienti indagati lo portarono a constatare che la deficienza di funzioni surrenali sia negli animali che sopravvivono spontaneamente, sia in quelli che sopravvivono per somministrazione di cortina, porta sempre alla perdita degli effetti eccitometabolici di un farmaco para-simpatico-mimetico: la pilocarpina. L'acetilcolina, che secondo l'opinione di alcuni autori rappresenterebbe il mezzo col quale le capsule surrenali manterrebbero il tono del parasimpatico, non ridona agli animali scapsulati reattività alla pilocarpina e non esplica alcuna influenza diretta sul metabolismo gassoso. Anche per quanto riguarda la influenza delle capsule surrenali sulla

termogenesi essa non costituirebbe affatto un fattore indispensabile, poiché le massime punte di metabolismo gassoso a bassa temperatura sono state appunto ottenute in animali scapsulati.

* * *

Legato sotto molti aspetti e per molte vie al problema precedente, è quello dell'azione dinamico-specifica degli alimenti, particolarmente per quanto riguarda le proteine: si tratta di argomento fondamentale, ancor oggi non risolto nè sufficientemente indagato, il quale ha vasti riflessi su problemi di assai diversa natura, anche economica e sociale (si pensi, per esempio, al valore alimentare dell'alcool, troppo spesso affrontato e risolto con semplicismo). Il Lombroso, allontanandosi da molte delle più comuni ipotesi fatte per interpretare il fenomeno, attribuisce la maggiore importanza nel determinismo dell'extra-calore dovuto alle proteine, all'azione di metaboliti intermedi sul sistema neuro-ormonico, e proprio perché con le ricerche sopra ricordate egli aveva costatato quanto sensibile sia il ricambio energetico a variazioni anche lievi di tono o di stimolo di una o dell'altra delle due sezioni. L'interpretazione di risultati contrastanti ottenuti nelle diverse specie, o anche in una stessa specie per piccole varianti di condizioni sperimentali, andrebbe ricercata nei rapporti intercorrenti fra sistema nervoso vegetativo e scambi gassosi, rapporti i quali subiscono l'influenza della grande variabilità e di reazioni e di condizioni di quel sistema, sul quale possono influire potentemente, modificando in definitiva l'azione dinamico-specifica di un determinato alimento, fattori endocrini complessi.

È evidente come il collegare l'azione dinamico-specifica delle proteine con l'influenza esercitata dai loro metaboliti sul sistema neuro-ormonico, più che rappresentare esauriente spiegazione del fenomeno, indica una via da seguire e un territorio da esplorare; comunque è una indicazione senza dubbio feconda, come anche di recente Cesare Lombroso, degno figlio dello scomparso e Ardy, dimostrarono con numerosi esperimenti dove, molto intelligentemente, sono stati impiegati farmaci di sintesi che in modo opportuno bloccano il sistema nervoso simpatico o quello parasimpatico.

* * *

Spero che brevità di questa sintesi e inevitabile rinuncia a esporre ricerche pur valide e spesso originali, abbiano tuttavia permesso di dare evidenza, oltre che all'importanza dell'opera, alle sue principali caratteristiche architettoniche; solidità costruttiva, complessiva armonia, coerenza stilistica. L'opera, insomma, di un ricercatore sistematico che non indulge alla suggestione di mode fuggevoli e sa costantemente mantenersi nell'esigua schiera dei pionieri.

Ma se qui terminasse il mio dire avrei senza dubbio, in gran parte, mancato al compito, che non può essere soltanto quello di riassumere nelle sue

linee più valide un'opera scientifica, ma anche, e più, quello di definire una ricca individualità nei suoi complessi aspetti psicologici, nei suoi molteplici rapporti di reazione e di cooperazione al travagliato periodo storico, all'eccezionale ambiente familiare, a tormentate vicende di un'ardua esistenza.

Compito difficile e al tempo stesso affascinante, anche perché Ugo è figlio di Cesare e cresce e si apre agli interessi umani e culturali e italiani e sociali nella caratteristica atmosfera di quel gruppo Lombroso che, alla fine del secolo scorso e ai primi del nostro, ebbe non solo influenza sulla vita italiana, ma clamore di fama e vasta efficacia di rapporti con la vita europea.

Qui non si vuole in alcun modo né giudicare, né interpretare, ma semplicemente ricordare: basti la constatazione che fu senza dubbio quello un periodo di felice e operante ottimismo, il quale si imperniava soprattutto sulla profonda fiducia dello studioso che dalla scienza e dai suoi progressi potesse venire soluzione per tutti i problemi, dal problema filosofico, dove la scienza sembrava poter dare al positivismo trionfante nuovi lumi e indicare nuove vie; al problema sociale, dove un generoso umanitarismo impegnava assai spesso lo studioso di scienze sperimentali e mediche alla difesa, o all'adesione, o alla collaborazione col cosiddetto socialismo scientifico. Non v'ha dubbio che di questo periodo - il quale, superate le crisi del '98 e del '900, ebbe splendore e per conquiste e per civiltà, contribuendo a portare l'Italia in quell'atmosfera di moderno liberalismo che, in precedenza, si era affermato in tutta Europa - il gruppo Lombroso fu valido e caratteristico componente.

Cesare Lombroso: centro di un sistema di cui fecero parte altri astri, e basti ricordare Guglielmo Ferrero, Enrico Ferri, il Patrizi, il Garofalo, il Lucchini, il Sighele, lo Zerboglio, Gina Lombroso Ferrero, Mario Carrara, Paola Lombroso Carrara, l'Antonini e molti altri. Parte dell'intelligenza italiana ed europea, l'entusiasmo forse ingenuo ma pienamente sincero di innumerevoli giovani, si rivolsero con fiducia e con speranza a questo gruppo.

Per un giovane dell'ingegno di Ugo, sembrava segnato destino l'essere trascinato fra le orbite di quel sistema e attratto da quegli astri; divenire cioè coadiutore e collaboratore: così invece non fu, perché egli ebbe caratteristici atteggiamenti e individualità spiccatamente diversa, anche nel campo scientifico.

Nello spirito di Ugo, accanto alla devozione per il padre famoso, devozione piena di pudore e di riserbo, che fu tra le manifestazioni più caratteristiche della sua personalità, vi fu pure, senza la più piccola contraddizione, la volontà di dare alla propria vita un'impronta diversa.

Preferì appunto, fin da quegli anni, la penombra, e di fronte a sconvolgente e talvolta precipitosa audacia di ipotesi, contornata da clamore di polemica, scelse la operosa clausura del laboratorio scientifico, il meticoloso rigore del controllo sperimentale: non già che anch'Egli non fosse fervido elaboratore di ipotesi - aveva il fondamentale dono della fantasia - ma la fantasia

era sempre vigilata dal dubbio che gli diveniva perfino angoscia e che gli imponeva un'esuberante documentazione sperimentale, spinta fino alla ripetizione ossessionante.

Per quanto riguarda problemi filosofici e religiosi fu, come spesso avviene negli sperimentatori, un agnostico; restio a quella filosofia scientifica che dovrebbe cominciare dove termina la scienza e ricavare dai fatti una maggiore ampiezza di deduzioni e di costruzioni teoriche (arbitrarie, perché i fatti già in precedenza dalla scienza utilizzati) e, al tempo stesso, all'aprioristica rinuncia dell'«*ignorabimus*» di Du Bois Reymond.

Fede ebbe senza dubbio, fervidissima, incrollabile e direi quasi candida, nel valore etico ed educativo della ricerca scientifica, e nel beneficio che la ricerca stessa in ogni campo doveva arrecare all'uomo. Era una fede sostenuta soprattutto da una fervorosa, instancabile curiosità di conoscere, di indagare, di prevedere, di stabilire rapporti tra i fenomeni e di formulare tali rapporti in leggi definite.

Della ricerca sperimentale fu perduto innamorado, tanto che, sottile ragionatore e mordace critico, seppe felicemente in questo campo, appunto perché innamorado, sfuggire alla mortificazione della critica: così avvenne che, poco prima di spegnersi, consapevole della fine, lamentasse la durezza del destino che gli impediva di concludere una serie di ricerche appassionanti, e non vedeva, nel fervore della Sua passione, che se pure la vita gli fosse durata mill'anni, sempre avrebbe ripetuto, al momento del distacco, lo stesso rimpianto. Proprio per questo fu sempre, fino al momento della morte, pienamente giovane.

Scienza fu dunque per Lui fede e passione, costume e disciplina di vita. Ebbe sempre vigile consapevolezza che per uno studioso e per un insegnante dignità e libertà sono imperativi assoluti. Così fu che in tempi di rassegnato conformismo universitario, che è quanto dire di umiliata dignità del pensiero, conservò intatta la propria indipendenza.

Fierezza senza iattanza, ché non era nel Suo temperamento aristocratico e garbatamente ironico, possibilità di atteggiamenti che avessero aspetto di enfasi. Non iattanza, ma neppure titubanza: sopportando serenamente dure persecuzioni, esilio, isolamento, distacco dai figli, dispersione dei beni, impossibilità di lavoro, mantenne una linea degna della Sua tradizione familiare, delle Sue convinzioni di uomo, di italiano, di cittadino.

Ritornata la possibilità della civile convivenza, ristabilita finalmente, dopo tanti sacrifici, l'atmosfera indispensabile per degna attività del pensiero, dalla tenace coerenza e dai molti patimenti non trasse, non volle trarre, vantaggio alcuno. Egli sapeva, che se il soffrire per un'idea e per un costume di vita può essere merito, questo inevitabilmente s'incrina quando serva a procacciare guiderdoni e onori.

Di tale alto ammaestramento chi Lo conobbe e chi gli visse vicino, Lo ringraziano ancora più fervidamente che non per la Sua opera di scienziato; questa suscita ammirazione, quello nutre un sentimento profondo, indistruttibile finché in noi, con la vita, duri il Suo ricordo: l'amore.

COMUNICAZIONI-VARIE

Il Presidente comunica che è presente alla seduta il prof. Renè Garnier della Accademia di Francia, il quale è venuto a Roma appositamente per intervenire alla solenne cerimonia svoltasi questa mattina nella Facoltà di Scienze dell'Università, in memoria del compianto Senatore Guido Castelnuovo.

All'illustre Collega straniero il prof. Giordani porge il caldo saluto della Classe e suo personale, unitamente ad un vivo ringraziamento per avere egli voluto associarsi al tributo d'omaggio reso alla memoria dell'indimenticabile Presidente Castelnuovo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica ai Colleghi la dolorosa notizia della morte del Socio Corrispondente prof. GIORGIO VALLE, Direttore dell'Istituto di Fisica «A. Righi» dell'Università di Bologna e invia un pensiero di reverente omaggio alla sua memoria.

Il Presidente dà poi la parola al Socio Meneghetti che rievoca, con elevata e commossa orazione, la figura e l'opera del compianto Collega Ugo Lombroso.

Il Prof. Giordani ringrazia il Socio Meneghetti e rinnova ai familiari dell'illustre scienziato scomparso, presenti alla commemorazione, l'espressione dei più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale.

Su proposta del Presidente, i Soci Perucca, Abetti e Polvani vengono incaricati dalla Classe di commemorare rispettivamente i compianti Colleghi Pochettino, Colacevich e Valle.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Crocco, anche a nome dei Colleghi Pistolesi e De Marchi, legge la relazione della Commissione, composta dai tre predetti Soci, incaricata di riferire sulla proposta di riconoscimento del nome di «Numero di Allievi» a una caratteristica posta dall'Allievi a base dei suoi calcoli sul «Colpo d'Ariete».

La Commissione, premesso che tale proposta rivolta dall'ing. Novelli all'Associazione Elettrotecnica Italiana e sulla quale l'Associazione ha chiesto il parere della nostra Accademia e di altre Accademie italiane, è ispirata all'intendimento di rendere onore al nome di Lorenzo Allievi, tecnico illustre e geniale figura di studioso, e che a tale intendimento non può che aderire cordialmente l'Accademia, ha preso in attento esame la proposta stessa sotto l'aspetto scientifico e ha concluso che, se alla parola numero

si intende di lasciare il significato che convenzionalmente le è assegnato e che è ormai accettato da qualche decennio in campo internazionale, la stessa parola non può essere adottata per indicare la caratteristica di Allievi.

Il Socio Armellini chiede qualche delucidazione e il Socio Crocco riconferma le conclusioni della Commissione, mettendo in particolare evidenza che se si usasse la parola numero per indicare la citata caratteristica, si correrebbe il rischio di vedere respinta tale denominazione in campo internazionale.

Il Socio Perucca, premesso che i fisici usano nomenclature diversissime per indicare le espressioni adimensionali, crede che se in luogo della denominazione «Numero di Allievi» se ne usasse un'altra, che potrebbe essere, per esempio, «Caratteristica di Allievi», sarebbe possibile conciliare l'intendimento di rendere un doveroso omaggio alla memoria dell'insigne scienziato con le conclusioni della Commissione.

Il Presidente si associa al Collega Perucca e chiede alla Commissione e alla Classe se egli, per l'ulteriore sviluppo della pratica, si possa ritenere autorizzato a considerare la proposta del predetto Socio come proposta della Commissione e dell'intera Classe.

Il Socio Crocco risponde affermativamente e la Classe si associa all'unanimità.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Giovanni Sansone presenta il primo volume delle Memorie di Ulisse Dini e ne parla.

Egli ricorda che nel 1918, subito dopo la morte del Dini, fu espresso il voto di fare un'Edizione Nazionale delle Sue Memorie e che l'U.M.I. fin dal 1928 si assunse questo compito; le vicende che dal 1935 pesarono sulla Nazione ne ritardarono la realizzazione.

Le Memorie del Dini sono state dal prof. Sansone suddivise in tre volumi: il primo contiene quelle di algebra e di geometria differenziale, il secondo, a cura di F. Cecioni, G. Sansone, G. Scorza Dragoni, M. Picone, conterrà le Memorie sulle funzioni di variabile reale, sugli sviluppi in serie, sulle funzioni di variabile complessa, sul così detto problema di Dini-Neumann, e infine il terzo volume, a cura di G. Sansone e M. Picone, conterrà le Memorie sulle equazioni differenziali, ordinarie ed alle derivate parziali.

Seguiranno due volumi che avrebbero dovuto essere curati da L. Tonelli. Uno riprodurrà il famoso volume delle Serie di Fourier da cui è nata la moderna trattazione degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali, l'altro sarà ricavato da un corso, apparso in litografie nel 1910 ed ormai introvabile, sulla rappresentazione analitica delle funzioni.

La introduzione alle Memorie di algebra del volume primo fu scritta da M. Cipolla, quella alle Memorie di geometria differenziale da Enea Bertolotti. Questi due eminenti colleghi, alla cui memoria, il Socio Sansone manda un reverente e grato saluto, misero in luce i problemi affrontati dal Dini e, in particolare, quanto è rimasto della Sua Opera nei trattati.

I teoremi sulle serie a termini positivi, quelli sulla limitazione delle radici di un'equazione algebrica, le superficie pseudosferiche del Dini, i teoremi sulla rappresentazione sferica delle superficie e quelli sulla rappresentazione geodetica di una superficie su di un'altra, costituiscono risultati definitivamente acquisiti nella Matematica.

Il volume ha anche interesse storico: lo studioso vi potrà apprezzare il grado cui era arrivata la Geometria differenziale prima che L. Bianchi, il più grande scolaro del Dini, iniziasse l'edificazione del Suo grande trattato.

Il volume comprende 700 pagine di stampa: esso compare grazie al generoso contributo del C.N.R. a cui il prof. Sansone, anche per la Presidenza dell'U.M.I., rivolge un sentito ringraziamento, grazie anche alla fattiva collaborazione dell'Editore Paolo Cremonese, e grazie anche all'opera disinteressata di chi si è preso cura dell'edizione e di tutti indistintamente i suoi collaboratori.

Il Socio Bompiani offre in omaggio i seguenti volumi:

1° L. Bianchi, *Opere*, vol. 1°, parte seconda (Ediz. Cremonese Roma, 1953).

2° *Bibliografia Matematica Italiana*, vol. II, anno 1951 (Ediz. Cremonese, Roma, 1953), dovuti all'iniziativa dell'Unione Matematica Italiana.

Gli argomenti cui si riferiscono i lavori raccolti nel volume del Bianchi sono divisi in quattro gruppi: *Curve ellittiche normali*, con introduzione di F. Conforto; *Ricerche sui gruppi finiti continui di trasformazioni*, con introduzione di U. Amaldi; *Equazioni alle derivate parziali*, con introduzione di E. Bompiani ed Enea Bortolotti; *Commemorazioni e relazioni*.

La Memoria sulle curve ellittiche di ordine tre e cinque ha suggerito a F. Klein l'uso sistematico delle funzioni *sigma* e *theta* di Weierstrass nello studio delle curve ellittiche d'ordine qualunque.

Le tre Memorie sui gruppi, occasionate da una rielaborazione personale della teoria per un corso di lezioni, caratterizzano i gruppi continui finiti simili a gruppi equivalenti o proporzionali e trasportano al campo dei gruppi continui il concetto di gruppo complementare di un gruppo rispetto ad un suo sottogruppo, chiarendo la ragione del successo del procedimento del Lie per la determinazione dei gruppi transitivi.

Il gruppo di lavori sulle equazioni a derivate parziali mostra ad un tempo la potenza del Bianchi come analista e la ricchezza della sua ispirazione geometrica che gli suggerisce problemi e soluzioni.

Infine le commemorazioni di Sophus Lie, del Weingarten, del Dini, del Jordan, del Klein ci mostrano il Bianchi a colloquio con questi «spiriti magni» con i quali ebbe familiarità.

Basterebbe questo volume a porre il Bianchi nella eletta schiera degli «immortali». E dobbiamo esser grati all'Unione Matematica Italiana che ha iniziato e continuerà l'edizione delle sue Opere.

La *Bibliografia Matematica Italiana* relativa al 1951 elenca la produzione matematica italiana in detto anno; essa assolve un impegno di carattere internazionale assunto dall'Unione Matematica Italiana.

L'una e l'altra pubblicazione, rese possibili anche dal contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, sono edite con ogni cura e in forma degna dal Cremonese.

Il Socio Dore offre in omaggio il «Verbale della 50^a Sessione della Commissione geodetica italiana», tenuta in Roma il 14 gennaio 1952, che illustra i lavori eseguiti nel 1951 e quelli in programma per il 1952.

Il Socio Perucca offre in omaggio il III dei 5 volumi dell'opera da lui diretta dal titolo: «Dizionario d'Ingegneria» e, mentre è lieto di constatare che tale opera ha ormai superato la metà, confida che essa possa assolvere le finalità che si propone, di costituire cioè un fondamentale aiuto per chiarire infiniti interrogativi che si presentano, non solo agli ingegneri, ma, in genere, a tutte le persone colte.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato pubblicazioni.

Il Segretario accademico illustra le pubblicazioni inviate in omaggio, mettendo in particolare evidenza il «Trattato di Zoologia» del Collega Umberto D'Ancona, il volume contenente gli Atti dell'VIII^o Congresso Nazionale di Microbiologia e un estratto dal «Bulletin de l'Association des Amis de l'Université de Liege», n. 2, 1952, dal titolo: «Les Sociétés scientifiques liégeoises».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei «Rendiconti» i Soci Tonzig, Quilico, Grandi, Remotti, Cotronei, Armellini, Segre, Montalenti, Sergi, Signorini, Pupilli e Picone.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

RUSSO A. – Il ciclo vitale di *Tryptochilum echini* Mps., a differenza di altri Infusori, ha fenomeni analoghi a quello dei Metazoi.

ASCENZI A. e ALISI A. – Ricerche biometriche sullo sviluppo e sulla senescenza dell'aorta umana (pres. dal Socio S. SERGI).

BAFFONI G. M. – Aspetti morfologici della sostanza PAS positiva nei neuroni di Vertebrati in condizioni normali e sperimentali (pres. dal Socio G. COTRONEI).

BERTOLINI F. – Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

COCCHI G. – Campi potenziali attorno a schiere di cerchi (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

PERRI T. – Correlazione tra sistema nervoso ed arti. – II. Comportamento degli arti soprannumerari da induzione abnorme (pres. dal Socio G. COTRONEI).

RIGGIO BEVILACQUA L. – Attività piridinucleotidasica in *Solanum tuberosum* (pres. dal Corrisp. E. REMOTTI).

SINISCALCO M. – Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche (pres. dal Corrisp. G. MONTALENTI).

URBANI MISTRUZZI L. – Osservazioni citologiche sulle ghiandole salivari di *Eobania vermiculata* Müll (pres. dal Socio G. COTRONEI).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 dicembre 1953

- BIANCHI Luigi. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I, p. II. Roma, Ed. Cremonese della Casa Ed. Perrella, 1953. Pp. 276, in-8°.
- BOK Bart J. — *The Southern Sky*. Estr. da «Scientific American», 1952, July.
- COMMISSIONE GEODETICA ITALIANA. — *Verbale della 50^a Sessione tenuta in Roma il giorno 14 gennaio 1952*. Bologna, Azzoguidi, 1953. Pp. 67, in-4°.
- D'ANCONA Umberto. — *Trattato di Zoologia*. Torino, U.T.E.T., 1953. Pp. xxiv-1102, in 8°.
- DINI Ulisse. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I. *Algebra-geometria differenziale*. Roma, Ed. Cremonese della Casa Ed. Perrella, 1953, Pp. 698, in-8°.
- Dizionario d'Ingegneria diretto da Eligio Perucca*. Vol. III (Fos-Mos). Torino, U.T.E.T., 1953. Pp. viii-1043, in-4°, con figg. e tavv.
- PERUCCA Eligio. — Vedi: *Dizionario d'Ingegneria*.
- RUSSO Giuseppe e SANTORO Rolando. — *Esperimenti di lotta antidacica eseguiti in Ascea Marina [Salerno] nel 1952*. Estr. da «Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria Filippo Silvestri di Portici». Vol. XII, 1953.
- SANTORO Rolando. — Vedi: RUSSO Giuseppe e SANTORO Rolando.
- SOCIETÀ INTERNAZIONALE DI MICROBIOLOGIA. — *Atti del Congresso Nazionale di Microbiologia (VIII)*. Milano, 17-18-19 aprile 1952. Milano, Istituto Sieroterapico Milanese, 1952. Pp. 430, in-8°.
- Les Sociétés scientifiques liégeoises*. Estr. da «Bulletin de l'Association des Amis de l'Université de Liège», 1952, n. 2.
- TING YING H. Ma. — *Research on the Past and Continental Drift*. Voll. IV, V, VI. Taipei, 1951-53, in-8°.
- UNIONE MATEMATICA ITALIANA. — *Bibliografia Matematica Italiana*. Vol. II. Anno 1951. Roma, Ed. Cremonese della Casa Ed. Perrella, 1953. Pp. xii-158, in-8°.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

- ANDREATTA C. e FORNI I., Confronto fra spettrogrammi Debye di cartilagine umana naturale, di osso demineralizzato e di osso naturale, 147.
- ANDRISANO R. e PAPPALARDO G., Spettri U. V. di alcuni derivati nitro-furil-etilenici, 64.
- ARMELLINI G., Sopra le variazioni dell'eccentricità nel problema astronomico dei due corpi di masse decrescenti, 345.

B

- BACCHETTI T. e GALLONE ARNABOLDI A., Sulla reazione di Ramberg e Bäcklund, 75.
- BACCHETTI T., vedi CANONICA L.
- BALCONI M., I limiti di sostituzione silicio: alluminio nei minerali magmatici. Nota I, 427.
- BARBATELLI R., vedi CASTELLANO M.
- BENEDETTI E. L., Sulle proprietà ottiche delle fibre reticolari, 138.
- BERTOLINI F., Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Nota I, 368.
- BIANCHETTI G., vedi FUSCO R.
- BOMPIANI E., Topologia differenziale. — VI. Invarianti topologici di elementi di una calotta, 242.
- BONDI C., Ricerche sperimentali sull'ossiforo di Spirito (catalasi). L'ossiforo di Spirito nel sangue di coniglio in relazione al trattamento con tiroxina, 132.
- BONETTI D., vedi REMOTTI E.
- BUFFA P. e COLAJANNI L., L'acido citrico in relazione al calcio ed al fosfato inorganico nelle calcificazioni patologiche, 302.

C

- CALOI P., Onde longitudinali e trasversali guidate dall'astenosfera, 352.
- CANONICA L. e BACCHETTI T., Sintesi di α - ω -diacetilparaffine. Nota IV, 278.
- CASTELLANO M. e BARBATELLI R., Determinazioni di ascensione retta dei pianeti

vesta e Cerere e del pianeta Urano, 44.

- CAVALLO G. e FALCONE G., Ossigeno e lisi in ghiacciaia, 228.
- Perossidi e filamentizzazione batterica, 234.
- CHIERICI L. e PASSERINI R., Su alcuni fenil-alchini e difenil-seleniuri, 69.
- CIMINO M., Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota V ed ultima, 33.
- Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Nota I, 39.
- CLAUSER E., Una particolare soluzione delle equazioni einsteiniane della relatività unitaria, 171.
- COCCHI G., Il moto laminare vario in tubi cilindrici di sezione circolare, 393.
- COLAJANNI L., vedi BUFFA P.
- COLETTI O., vedi SACCO A.
- CONTI R., Sulla semicontinuità degli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria. Nota I, 149.
- Sulla semicontinuità degli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria. Nota II, 158.
- CORRADINI P., vedi NATTA G.

D

- DESIO A., Sull'eccezionale avanzamento di un ghiacciaio himalayano, 253.

E

- EMILIANI F. e PELLIZZER R., Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite. Nota II, 101.

F

- FALCONE G., vedi CAVALLO G.
- FAVERO P. e VECCHI E., Perfezionamento dell'apparecchiatura a sparpagliamento multiplo in polarografia oscillografica, 415.
- FEDERLIN P., Il problema delle aldeidi in polarografia, 289.

FERRO R., Cristallografia differenziale delle polveri. - Considerazioni sull'interpretazione delle riflessioni secondo Debye-Scherrer. Nota I, 285.
 - Cristallografia differenziale delle polveri. - Esami differenziali di primo ordine. Nota II, 408.

FIORI G., Sulla formazione di spermatofori in un Coleottero Tenebrionide della Tripolitanica, 440.

FORNI I., vedi ANDREATTA C.

FORTINI T., Miglioramento delle orbite di cinque piccoli pianeti, 24.

— Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio di Monte Mario e confronto con i risultati ottenuti precedentemente da altri Osservatori, 194.

FRACASTORO M. G., Un caso interessante di equipartizione di energia, 192.

FRESA A., La variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) e la verifica della legge Hattori, 55.

FUNAIOLE E., Sullo slittamento elastico nel rotolamento, 15.

FUSCO R. e BIANCHETTI G., Sintesi dell'azadadamantano, 420.

G

GALLARATI D., Sul massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r linearmente indipendenti, ai quali appartengono gli S_k tangenti di una V_k di S_r , 10.

GALLI M., Sopra una variante cinematica dell'esperimento di Sagnac. Nota II, 58.

GALLONE ARNABOLDI A., vedi BACCHETTI T.

GEYMONAT L., Analisi della validità degli assiomi di separazione in uno spazio non-V, 262.

GENNA G., Lorenzo il Magnifico e il fratello Giuliano dal punto di vista antropologico, 469.

GUALTIEROTTI T., Alcune determinazioni della densità dell'encefalo nell'uomo, 216.

GUGGENHEIMER H., Geometria pseudo-kähleriana. Nota II, 271.

H

HACK M., Sulla classificazione spettrale bidimensionale. Risultati preliminari, 47.

HORNICH H., Risolubilità di generali equazioni lineari a derivate parziali mediante serie di potenze, 7.

I

INFANTELLINA F., Modificazioni post-tetaniche di alcune proprietà funzionali del muscolo, 449.

K

KAWAGUCHI A., Generalizzazioni del calcolo tensoriale e delle sue applicazioni, 255.

L

LIVREA G., Gli effetti delle crisi convulsive da elettroshock (ES) sulla secrezione istmica del piccolo stomaco di Pawlow-Bickel, 219.

— Sul problema dei rapporti tra nutrizione e attività del miocardio, 453.

LOMBARDO-RADICE L., Sui piani microdesarguesiani affini, 264.

M

MALATESTA L. e SACCO A., Complessi isonitrici del cobalto monovalente. Nota II, 93.

MARCHETTI L., Sul moto di un corpo rigido in un gas indefinito, 274.

— Moti oscillatori di un corpo rigido galleggiante in un liquido di cui si considera l'inerzia, 387.

MARRÈ E., Azione inibente, della florizina e della floretina sui sistemi deidrogenasici della pianta superiore, 296.

— Interazione tra auxine e antiauxine a livello dell'attività deidrogenasica *in vitro*, 433.

MASOTTI A., Su alcune questioni di media nei moti centrali, 381.

MELLINI E., Influenze esercitate dalla vitina sul parassita nella simbiosi antagonistica «*Pterophorus microdactylus*» Hbn. («*Lepidoptera Pterophoridae*») e «*Phytomypta nitidiventris*» Rond. («*Diptera Larvaevoridae*»), 445.

MENEGHETTI E., Commemorazione del Socio Ugo Lombroso, 474.

N

NATTA G. e CORRADINI P., Struttura di alcuni composti carbonilici del cobalto, 248.

NOCILLA S., Su di un problema di aerodinamica relativo alle ali a delta, 177.

P

- PAPPALARDO G., vedi ANDRISANO R.
 PASSERINI R., vedi CHIERICI L.
 PEYRONEL G., Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota I, 402.
 PELLIZER R., vedi EMILIANI F.
 PERRI T., Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. Esperienze di trapianto di abbozzi di arto in embrioni di « Bufo vulgaris », 463.
 PIRANI R., I minerali del gruppo dell'Ortler. — VIII. Actinolite di Sas dell'Anel (Malè) e sua solubilità, 292.
 — I minerali del gruppo dell'Ortler. — IX. Actinolite e antofillite di Vedretta Alta-Hochwart (Ultimo) e loro solubilità, 422.
 POY M., Orbita definitiva del pianetino 1196 Sheba, 187.
 PROFUMO P., Azione di alcune antiauxine sulla sintesi d'amido dal Glucosio-I-fosfato in stomi isolati di Iris, 135.

Q

- QUILICO A., Sul comportamento dei derivati dell'isossazolo di fronte agli alcoolati alcalini, 357.

R

- RANZOLI F., Osservazioni sulla sessualità nel polichete « Hydroides norvegica », 207.
 REMOTTI E. e BONETTI D., Microemorragie da transito ematico e presumibile loro portata nell'economia dell'Embrione, 364.
 ROTH L., Sull'estensione di un teorema di Castelnovo-Humbert, 376.
 RUSSO A., Il potere germinativo dei tessuti somatici ridestato da agenti cancerigeni. Individualità dei blastomi, 3.
 — Etiologia dei tumori illustrata alla Radio da Rondoni, 6.

S

- SACCO A., Complessi isonitrilici del cobalto trivalente ioduri, bromuri e perclorato alogenuri, 82.
 — Complessi isonitrilici del manganese monovalente, 421.
 SACCO A., vedi MALATESTA L.
 SACCO e COLETTI O., Complessi cobalto (II)-e ferro (II)- arilisonitrilici, 89.

- SEGRE A. G., Risultati preliminari dell'esplorazione ecometrica del Basso Tirreno, 95.
 SEGRE B., Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. Nota I, 237.
 — Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. Nota II, 339.
 SEMERANO G., Relazione sul Convegno Internazionale di Polarografia a Bressanone, 315.
 STEFANI R., La fisiologia dell'accoppiamento in « Haploembia Solieri » Ramb. (« Embioptera Oligotomidae »), 211.

T

- TENANI M., Commemorazione del Socio Francesco Vercelli, 317.
 TOMBA A. M., I minerali del gruppo dell'Ortler-VII-Microclino della pegmatite di Val Martello e sua solubilità, 203.

U

- UDESCHINI P., Successiva linearizzazione delle ultime equazioni del campo unitario einsteiniano, 165.
 URBANI E., Osservazioni spettrofotometriche sull'ocite in crescita di « Antedon rosacea » Lamark. Nota II, 308.
 URBANI E. e URBANI-MISTRUZZI L., Osservazioni sulla vita latente. — IV. Studio della fosfatasi alcalina di « Artemia salina » L., 126.
 URBANI-MISTRUZZI L., vedi URBANI E.

V

- VANNINI E., Sul comportamento dell'apparato nucleolare negli ovociti di « Gobius aphiocephalus », 111.
 VECCHI R., vedi FAVERO P.

Z

- ZACCHEI A. M., Ulteriori ricerche sui centri tegmentali rombencefalici degli Anfibi Anuri, 107.
 — La struttura cerebellare degli Anfibi Anuri in rapporto alle condizioni statiche e di locomozione, 120.
 ZANOBBETTI D., Impedenza dei conduttori cilindrici pieni e cavi alle correnti ad impulso, 200.

INDICE PER MATERIE

A

Aerodinamica. — Sul moto di un corpo rigido in un gas indefinito. MARCHETTI L., 274.

— Su di un problema di aerodinamica relativo alle ali a delta. NOCILLA S., 177.

Analisi matematica. — Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Nota I, BERTOLINI F., 369.

— Risolubilità di generali equazioni lineari a derivate parziali mediante serie di potenze. HORNICHI H., 7.

Antropologia. — Lorenzo il Magnifico e il fratello Giuliano dal punto di vista antropologico. GENNA G., 469.

Astronomia — Determinazioni di ascensione retta dei pianetini Vesta e Cerere e del pianeta Urano. CASTELLANO M. e BARBATELLI R., 44.

— Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota V ed ultima CIMINO M., 33.

— Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Nota I, CIMINO M., 39.

— Miglioramento delle orbite di cinque piccoli pianeti. FORTINI T., 24.

— Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio di Monte Mario e confronto con i risultati ottenuti precedentemente da altri Osservatori. FORTINI T., 194.

— Un caso interessante di equipartizione di energia. FRACASTORO M. G., 192.

— La variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) e la verifica della legge Hattori, FRESA A., 55.

— Sulla classificazione spettrale bidimensionale. Risultati preliminari. HACK M., 47.

— Orbita definitiva del pianetino 1196 Sheba. POY M., 187.

B

Biologia. — Confronto fra spettrogrammi Debye di cartilagine umana naturale, di osso demineralizzato e di osso naturale. ANDREATTA C. e FORNI I., 147.

— Ricerche sperimentali sull'ossiforo di Spirito (catalasi). L'ossiforo di Spirito nel sangue di coniglio in relazione al trattamento con tiroxina. BONDI C., 132.

— L'acido citrico in relazione al calcio ed al fosfato inorganico nelle calcificazioni patologiche. BUFFA P. e COLAJANNI L., 302.

— Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. Esperienze di trapianto di abbozzi di arto in embrioni di « Bufo vulgaris ». PERRI T., 463.

— Microemorragie da transito ematico e presumibile loro portata nell'economia dell'Embrione. REMOTTI E. e BONETTI D., 364.

— Il potere germinativo dei tessuti somatici ridestato da agenti cancerigeni. Individualità dei blastoni. RUSSO A., 3.

— Eziologia dei tumori illustrata alla Radio da Rondoni. RUSSO A., 6.

— Osservazioni spettrofotometriche sull'ocite in crescita di « Antedon rosacea » Lamark. Nota II. URBANI E., 308.

— Osservazioni sulla vita latente. — IV. Studio della fosfatasi alcalina di « Artemia salina » L., URBANI E. e URBANI-MISTRUZZI L., 126.

— Sul comportamento dell'apparato nucleolare negli ovociti di « Gobius ophiocephalus ». VANNINI E., 111.

— Ulteriori ricerche sui centri tegmentali rombencefalici degli Anfibi Anuri. ZACCHEI A. M., 107.

— La struttura cerebellare degli Anfibi Anuri in rapporto alle condizioni statiche e di locomozione. ZACCHEI A. M., 120.

C

Calcolo delle variazioni. — Sulla semicontinuità degli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria. Nota I. CONTI R., 149.

— Sulla semicontinuità degli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria. Nota II. CONTI R., 158.

Chimica. — Spettri U. V. di alcuni derivati nitro-furil-etilenici. ANDRISANO R. e PAPALARDO G., 64.

— Perfezionamento dell'apparecchiatura a sparpagliamento multiplo in polarografia oscillografica. FAVERO P. e VECCHI E., 415.

— Il problema delle aldeidi in polarografia FEDERLIN P., 289.

Chimica fisica. — Cristallografia differenziale delle polveri. — Considerazioni sull'interpretazione delle riflessioni secondo Debye-Scherrer. Nota I. FERRO R., 285.

— Cristallografia differenziale delle polveri. — Esami differenziali di primo ordine. Nota II. FERRO R., 408.

— Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota I. PEYRONEL G., 402.

Chimica generale. — Struttura di alcuni composti carbonilici del cobalto. NATTA G. e CORRADINI P., 248.

Chimica inorganica. — Complessi isonitrilici del cobalto monovalente. Nota II. MALATESTA L. e SACCO A., 93.

— Complessi isonitrilici del cobalto trivalente ioduri, bromuri e perclorato alogenuri. SACCO A., 82.

— Complessi isonitrilici del manganese monovalente. SACCO A., 421.

— Complessi cobalto (II)- e ferro (II)- arilisonitrilici. SACCO A. e COLETTI O., 89.

Chimica organica. — Sulla reazione di Ramberg e Bäcklund. BACCHETTI T. e GALLONE ARNABOLDI A., 75.

— Sintesi di α - ω -diacetilparaffine. Nota IV. CANONICA L. e BACCHETTI T., 278.

— Su alcuni fenil-alchin- e difenil-seleniuri. CHIERICI L. e PASSERINI R., 69.

— Sintesi dell'azaadamantano. FUSCO R. e BIANCHETTI G., 420.

— Sul comportamento dei derivati dell'isosazolo di fronte agli alcoolati alcalini. QUILICO A., 357.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Ugo Lombroso. MENEGHETTI E., 174.

— Commemorazione del Socio Francesco Vercelli. TENANI M., 317.

Comunicazioni varie. 332, 482.

Convegni internazionali. — Relazione sul Convegno Internazionale di Polarografia a Bressanone. SEMERANO G., 315.

Cosmogonia. — Sopra le variazioni dell'eccentricità nel problema astronomico dei due corpi di masse decrescenti. ARMELINI G., 345.

E

Entomologia. — Sulla formazione di spermatofori in un Coleottero Tenebrionide della Tripolitania. FIORI G., 440.

— Influenze esercitate dalla vittima sul parassita nella simbiosi antagonistica « Pterophorus microdactylus » Hbn. (« Lepidoptera Pterophoridae ») e « Phytomyptera nitidiventris » Rond. (« Diptera Larvaevoridae »). MELLINI E., 445.

F

Fisica. — Sopra una variante cinematografica dell'esperimento di Sagnac. Nota II. GALLI M., 58.

Fisica matematica. — Impedenza dei conduttori cilindrici pieni e cavi alle correnti ad impulso. ZANOBETTI D., 200.

Fisiologia. — Alcune determinazioni della densità dell'encefalo nell'uomo. GUALTIEROTTI T., 216.

— Modificazioni post-tetaniche di alcune proprietà funzionali del muscolo. INFANTELLINA F., 449.

— Gli effetti delle crisi convulsive da elettroshock (ES) sulla secrezione istaminica del piccolo stomaco di Pawlow-Bickel. LIVREA G., 219.

— Sul problema dei rapporti tra nutrizione e attività del miocardio. LIVREA G., 453.

Fisiologia vegetale. — Azione inibente della florizina e della floretina sui sistemi deidrogenasici della pianta superiore. MARRÉ E., 296.

— Interazione tra auxine e antiauxine a livello dell'attività deidrogenasica *in vitro*. MARRÉ E., 433.

— Azione di alcune antiauxine sulla sintesi d'amido dal Glucosio-I-fosfato in stomi isolati di Iris. PROFUMO P., 135.

G

Geofisica. — Onde longitudinali e trasversali guidate dall'astenosfera. CALOI P., 352.

Geologia. — Sull'eccezionale avanzamento di un ghiacciaio himalayano. DESIO A., 253.

— Risultati preliminari dell'esplorazione ecometrica del Basso Tirreno. SEGRE A. G., 95.

Geometria. — Topologia differenziale. — VI. Invarianti topologici di elementi di una calotta. BOMPIANI E., 242.

— Sul massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r linearmente indipendenti, ai quali appartengono gli S_k tangenti di una V_k di S_r . GALLARATI D., 10.

— Geometria pseudo-kähleriana. Nota II. GUGGENHEIMER H., 271.

— Sui piani microdesarguesiani affini. LOMBARDI-RADICE L., 264.

Geometria algebrica. — Sull'estensione di un teorema di Castelnuovo-Humbert. ROTH L., 376.

I

Idrodinamica. — Il moto laminare vario in tubi cilindrici di sezione circolare. COCCHI G., 393.

M

Matematica. — Analisi della validità degli assiomi di separazione in uno spazio non-V. GEYMONAT L., 262.

— Generalizzazioni del calcolo tensoriale e delle sue applicazioni. KAWAGUCHI A., 255.

— Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. Nota I. SEGRE B., 237.

— Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. Nota II. SEGRE B., 339.

Meccanica. — Una particolare soluzione delle equazioni einsteiniane della relatività unitaria. CLAUSER E., 171.

— Sullo slittamento elastico nel rotolamento. FUNAIOLI E., 15.

— Moti oscillatori di un corpo rigido galleggiante in un liquido di cui si considera l'inerzia. MARCHETTI L., 387.

— Su alcune questioni di media nei moti centrali. MASOTTI A., 381.

— Successiva linearizzazione delle ultime equazioni del campo unitario einsteiniano. UDESCHINI P., 165.

Microbiologia. — Ossigeno e lisi in ghiacciaia. CAVALLO G. e FALCONE G., 228.

— Perossidi e filamentizzazione batterica. CAVALLO G. e FALCONE G., 234.

Mineralogia. — I limiti di sostituzione silicio: alluminio nei minerali magmatici. Nota I. BALCONI M., 427.

— Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite. Nota II. EMILIANI F. e PELLIZZER R., 101.

— I minerali del gruppo dell'Ortler. — VIII. Actinolite di Sas dell'Anel (Malè) e sua solubilità. PIRANI R., 292.

— I minerali del gruppo dell'Ortler. — IX. Actinolite e antofillite di Vedretta Alta-Hochwart (Ultimo) e loro solubilità. PIRANI R., 422.

— I minerali del gruppo dell'Ortler-VII. Microclino della pegmatite di Val Martello e sua solubilità. TOMBA A. M., 203.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 336, 486.

P

Patologia. — Sulle proprietà ottiche delle fibre reticolari. BENEDETTI E. L., 138.

Personale accademico, 332, 482.

Plichi suggellati, 333.

Presentazione di libri, 334, 483.

Presentazione di Note e Memorie, 335, 485.

R

Relazioni di Commissioni, 482.

Z

Zoologia. — Osservazioni sulla sessualità nel polichete «Hydroides norvegica». RANZOLI F., 207.

— La fisiologia dell'accoppiamento in «Haploembia Solieri» Ramb. («Embioptera Oligotomidae». STEFANI E., 211.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1-2.

LUGLIO-AGOSTO 1953.

NOTE DI SOCI

RUSSO A., Il potere germinativo dei tessuti somatici ridestato da agenti cancerigeni. Individualità dei blastoni	Pag.	3
RUSSO A., Eziologia dei tumori illustrata alla Radio da Rondoni		6

NOTE PRESENTATE DA SOCI

HORNICH H., Risolubilità di generali equazioni lineari a derivate parziali mediante serie di potenze (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag.	7
GALLARATI D., Sul massimo numero di complessi lineari di S_k linearmente indipendenti, ai quali appartengono gli S_k tangenti di una V_k di S_r (pres. dal Corresp. <i>B. Segre</i>)		10
FUNAIOLI E., Sullo slittamento elastico nel rotolamento (pres. dal Socio <i>E. Pistoletti</i>)		15
FORTINI T., Miglioramento delle orbite di cinque piccoli pianeti (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)		24
CIMINO M., Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota V ed ultima (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)		33
CIMINO M., Osservazioni fotometriche e polarimetriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Nota I (Pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)		39
CASTELLANO M. e BARBATELLI R., Determinazioni di ascensione retta dei pianetini Vesta e Cerere e del pianeta Urano (pres. dal Socio <i>L. Carnera</i>)		44
HACK M., Sulla classificazione spettrale bidimensionale. Risultati preliminari (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>)		47
FRESA A., La variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) e la verifica della legge Hattori (pres. dal Corresp. <i>G. Cecchini</i>)		55
GALLI M., Sopra una variante cinematica dell'esperimento di Sagnac. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>)		58
ANDRISANO R. e PAPPALARDO G., Spettri U. V. di alcuni derivati nitro-furil-etilenici (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)		64
CHIERICI L. e PASSERINI R., Su alcuni fenil-alchin e difenil seleniuri (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)		69
BACCHETTI T. e GALLONE ARNABOLDI A., Sulla reazione di Ramberg e Bäcklund (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)		75
SACCO A., Complessi isonitrilici del cobalto trivalente ioduri, bromuri e perclorato alogenuri (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)		82
SACCO A. e COLETTI O., Complessi cobalto (II)- e ferro (II) arilisonitrilici (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)		89
MALATESTA L. e SACCO A., Complessi isonitrilici del cobalto monovalente. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)		93
SEGRE A. G., Risultati preliminari dell'esplorazione ecometrica del Basso Tirreno (pres. dal Socio <i>R. Fabiani</i>)		95

EMILIANI F. e PELLIZZER R., Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite. Nota II (pres. dal Corrisp. C. <i>Andreatta</i>)	Pag. 101
ZACCHEI A. M., Ulteriori ricerche sui centri tegmentali rombencefalici degli Anfibi Anuri (pres. dal Socio G. <i>Cotronei</i>)	107
VANNINI E., Sul comportamento dell'apparato nucleolare negli ovociti di «Gobius aphiocephalus» (pres. dal Corrisp. U. <i>D'Ancona</i>)	111
ZACCHEI A. M., La struttura cerebellare degli Anfibi Anuri in rapporto alle condizioni statiche e di locomozione (pres. dal Socio G. <i>Cotronei</i>)	120
URBANI E. e URBANI-MISTRUZZI L., Osservazioni sulla vita latente. - IV. Studio della fosfatasi alcalina di «Artemia salina» L. (pres. dal Socio G. <i>Cotronei</i>)	126
BONDI C., Ricerche sperimentali sull'ossiforo di Spirito (catalesi). L'ossiforo di Spirito nel sangue di coniglio in relazione al trattamento con tiroxina (pres. dal Socio G. <i>Cotronei</i>)	132
PROFUMO P., Azione di alcune antiauxine sulla sintesi d'amido dal Glucosio-I- fosfato in stomi isolati di Iris (pres. dal Corrisp. E. <i>Remotti</i>)	135
BENEDETTI E. L., Sulle proprietà ottiche delle fibre reticolari (pres. dal Socio G. <i>Ver-noni</i>)	138

FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE-OTTOBRE 1953.

NOTE DI SOCI

ANDREATTA C. e FORNI I., Confronto fra spettrogrammi Debye di cartilagine umana naturale, di osso demineralizzato e di osso naturale (pres. dal Corrisp. C. <i>Andreatta</i>)	Pag. 147
--	----------

NOTE PRESENTATE DA SOCI

CONTI R., Sulla semicontinuità degli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria. Nota I (pres. dal Socio G. <i>Sansone</i>)	Pag. 149
CONTI R., Sulla semicontinuità degli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria. Nota II (pres. dal Socio G. <i>Sansone</i>)	158
U'DESCHINI P., Successiva linearizzazione delle ultime equazioni del campo unitario einsteiniano (pres. dal Corrisp. B. <i>Finzi</i>)	165
CLAUSER E., Una particolare soluzione delle equazioni einsteiniane della relatività unitaria (pres. dal Corrisp. B. <i>Finzi</i>)	171
NOCILLA S., Su di un problema di aerodinamica relativo alle ali a delta (pres. dal Corrisp. C. <i>Ferrari</i>)	177
POY M., Orbita definitiva del pianetino 1196 Sheba (pres. dal Socio G. <i>Armellini</i>)	187
FRACASTORO M. G., Un caso interessante di equipartizione di energia (pres. dal Socio G. <i>Abetti</i>)	192
FORTINI T., Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio di Monte Mario e confronto con i risultati ottenuti precedentemente da altri Osservatori (pres. dal Socio G. <i>Armellini</i>)	194
ZANOBETTI D., Impedenza dei conduttori cilindrici pieni e cavi alle correnti ad impulso (pres. dal Socio Q. <i>Majorana</i>)	200
TOMBA A. M., I minerali del gruppo dell'Ortler-VII-Microclino della pegmatite di Val Martello e sua solubilità (pres. dal Corrisp. C. <i>Andreatta</i>)	203

RANZOLI F., Osservazioni sulla sessualità nel polichete «Hydroides norvegica» (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i>)	Pag. 207
STEFANI R., La fisiologia dell'accoppiamento in «Haploembia Solieri» Ramb. («Embioptera Oligotomidae» (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	211
GUALTIEROTTI T., Alcune determinazioni della densità dell'encefalo nell'uomo (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	216
LIVREA G., Gli effetti delle crisi convulsive da elettroshock (ES) sulla secrezione istaminica del piccolo stomaco di Pawlow-Bickel (pres. dal Socio <i>G. Amantea</i>)	219
CAVALLO G. e FALCONE G., Ossigeno e lisi in ghiacciaia (pres. dal Corrisp. <i>L. Califano</i>)	228
CAVALLO G. e FALCONE G., Perossidi e filamentizzazione batterica (pres. dal Corrisp. <i>L. Califano</i>)	234

FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1953.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. Nota I. Pag.	237
BOMPIANI E., Topologia differenziale. - VI. Invarianti topologici di elementi di una calotta	242
NATTA G. e CORRADINI P., Struttura di alcuni composti carbonilici del cobalto (pres. dal Corrisp. <i>G. Natta</i>)	248
DESIO A., Sull'eccezionale avanzamento di un ghiacciaio himalayano.	253

NOTE PRESENTATE DA SOCI

KAWAGUCHI A., Generalizzazioni del calcolo tensoriale e delle sue applicazioni (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	Pag. 255
GEYMONAT L., Analisi della validità degli assiomi di separazione in uno spazio non-V (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	262
LOMBARDO-RADICE L., Sui piani microdesarguesiani affini (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	264
GUGGENHEIMER H., Geometria pseudo-kähleriana. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	271
MARCHETTI L., Sul moto di un corpo rigido in un gas indefinito (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i>)	274
CANONICA L. e BACCHETTI T., Sintesi di α - ω -diacetilparaffine. Nota IV (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	278
FERRO R., Cristallografia differenziale delle polveri. - Considerazioni sull'interpretazione delle riflessioni secondo Debye-Scherrer. Nota I (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	285
FEDERLIN P., Il problema delle aldeidi in polarografia (pres. dal Corrisp. <i>G. Semerano</i>)	289
PIRANI R., I minerali del gruppo dell'Ortler. - VIII. Actinolite di Sas dell'Anel (Male) e sua solubilità (pres. dal Corrisp. <i>C. Andreatta</i>)	292
MARRÈ E., Azione inibente della florizina e della floretina sui sistemi deidrogenasici della pianta superiore (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	296
BUFFA P. e COLAJANNI L., L'acido citrico in relazione al calcio ed al fosfato inorganico nelle calcificazioni patologiche (pres. dal Socio <i>G. Vernoni</i>)	302
URBANI E., Osservazioni spettrofotometriche sull'ocite in crescita di «Antedon rosacea» Lamark. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	308

CONGRESSI

SEMERANO G., Relazione sul Convegno Internazionale di Polarografia a Bressanone Pag.	315
--	-----

COMMEMORAZIONI

TENANI M., Commemorazione del Socio Francesco Vercelli	Pag. 317
Personale accademico	332
Comunicazioni varie	332
Plichi suggellati	333
Presentazione di libri	334
Presentazione di Note e Memorie	335
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 novembre 1953	336

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1953.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. Nota II	Pag. 339
ARMELLINI G., Sopra le variazioni dell'eccentricità nel problema astronomico dei due corpi di masse decrescenti	345
CALOI P., Onde longitudinali e trasversali guidate dell'astenosfera	352
QUILICO A., Sul comportamento dei derivati dell'isossazolo di fronte agli alcoolati alcalini	357
REMOTTI E. e BONETTI D., Microemorragie da transito ematico e presumibile loro portata nell'economia dell'Embrione (pres. dal Corrisp. E. Remotti)	364

NOTE PRESENTATE DA SOCI

BERTOLINI F., Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Nota I (pres. dal Socio M. Picone)	Pag. 368
ROTH L., Sull'estensione di un teorema di Castelnuovo-Humbert (pres. dal Socio B. Segre)	376
MASOTTI A., Su alcune questioni di media nei moti centrali (pres. dal Corrisp. B. Finzi)	381
MARCHETTI L., Moti oscillatori di un corpo rigido galleggiante in un liquido di cui si considera l'inerzia (pres. dal Socio G. Krall)	387
COCCHI G., Il moto laminare vario in tubi cilindrici di sezione circolare (pres. dal Socio A. Signorini)	393
PEYRONEL G., Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota I (pres. dal Socio L. Cambi)	402
FERRO R., Cristallografia differenziale delle polveri. \approx Esami differenziali di primo ordine. Nota II (pres. dal Socio L. Rolla)	408
FAVERO P. e VECCHI E., Perfezionamento dell'apparecchiatura a sparpagliamento multiplo in polarografia oscillografica (pres. dal Corrisp. G. Semerano)	415
FUSCO R. e BIANCHETTI G., Sintesi dell'azaadamantano (pres. dal Socio L. Cambi)	420
SACCO A., Complessi isonitrilici del manganese monovalente (pres. dal Socio L. Cambi)	421
PIRANI R., I minerali del gruppo dell'Örtler. - IX. Actinolite e antofillite di Vedretta Alta-Hochwart (Ultimo) e loro solubilità (pres. dal Corrisp. C. Andreatta)	422
BALCONI M., I limiti di sostituzione silicio: alluminio nei minerali magmatici. Nota I (pres. dal Socio U. Panichi)	427
MARRÈ E., Interazione tra auxine e antiauxine a livello dell'attività deidrogenasica « in vitro » (pres. dal Socio S. Tonzig)	433

FIORI G., Sulla formazione di spermatofori in un Coleottero Tenebrionide della Tripolitania (pres. dal Corrisp. <i>G. Grandi</i>)	Pag. 440
MELLINI E., Influenze esercitate dalla vittima sul parassita nella simbiosi antagonistica « <i>Pterophorus microdactylus</i> » Hbn. (« <i>Lepidoptera Pterophoridae.</i> ») e « <i>Phytomyptera nitidiventris</i> » Rond. (« <i>Diptera Larvaevoridae</i> ») (pres. dal Corrisp. <i>G. Grandi</i>)	445
INFANTELLINA F., Modificazioni post-tetaniche di alcune proprietà funzionali nel muscolo (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	449
LIVREA G., Sul problema dei rapporti tra nutrizione e attività del miocardio (pres. dal Socio <i>G. Amantea</i>)	453
PERRI T., Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. Esperienze di trapianto di abbozzi di arto in embrioni di « <i>Bufo vulgaris</i> » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	463
GENNA G., Lorenzo il Magnifico e il fratello Giuliano dal punto di vista antropologico (pres. dal Socio <i>S. Sergi</i>)	469

C O M M E M O R A Z I O N I

MENEGHETTI E., Commemorazione del Socio Ugo Lombroso	Pag. 478
Comunicazioni varie	482
Personale accademico	482
Relazioni di Commissioni	482
Presentazione di libri	483
Presentazione di Note e Memorie	485
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 dicembre 1954	486
Indice per Autori	489
Indice per materie	492
Indici dei fascicoli	495

